目　　录

第一章　紧致微分流形上常微分方程系统的某类诸态备经性质*

设 M^n 为一紧致的 n 维 C^∞ 型 Riemann 流形，$n \geqslant 2$. M^n 上一 C^1 型常微系统是指 M^n 上的一 C^1 型切向量场. 这常微系统导出 M^n 上一单参数 C^1 型可微变换群，从而导出 M^n 的切空间从上一单参数变换群. 本章的主要目的，本质上，是探讨这后一变换群的若干诸态备经性质[1].

可是，本章的动机当初还不是仅仅从这一个(从文献看来颇似是新的)方向本身的目的而来的，我们原想讨论 M^n 上的结构稳定的常微系统. 这一种系统，它的基本概念在 1937 年为 A. Andronov 及 L. Pontrjagin 就一简单情况下提出，至最近已开始受到注意. 这种系统的意义以及关于它的最近研究概况可以在 M. Peixoto [2] 一文的序言及若干按语（以及所附少数参考文献)中清楚地看出，我们不打算在这里叙述. 总的说来，当流形 M^n 的维数 $n \geqslant 3$ 时，这方面目前已有的成果可算是甚少的.

举一例来说，当从事结构稳定性的讨论时，明显地，我们容易遇到：是否可以经过微小的 C^1- 扰动使得一 C^1 型常微系统的一个非显然的具有点回归性的轨道消失而成为一周期轨道的问题. 要处理这样的问题，我们不可能完全不涉及切向量在单参数变换群下的数量变化性质. 这理由说起来是简单的，正好象当我们讨论一通常的常微分方程组时，一般须涉及这方程组的系数函数的偏微商一样. 但前面一类型的问题主要是大范围的，可能有一部

---

* 本章对原文中的定理和公式的序号作了适当的变动.

1) "诸态备经性质"与通常所说的"遍历性"为同义词.

分是拓扑的，也有一部分是统计式的．本章的目的即在就这统计式的一部分提供若干基础．它在结构稳定系统的讨论方面的应用等等将出现在以后的章节及文章中．

在本章§4中，我们对于 M^n 上一个不包含奇点且对所给单参数变换群来说不变的非空的闭子集 F，联系了一整数 $k^*(F)$，叫作 F 的格数．它的几何意义，当 $n=3$ 时，易看出是 M^n 上在一点处某些一对的切向量所决定的两个方向在所给变换群中的变换下的某类渐近性质的估计．对于一般 $n>3$，这也可以有类似的解释．§3及§6中包含了某些切向量在所给变换群中的变换下长度变化的估计．这类结果大部分是用函数沿轨道取积分的时间中值的上极限表达出来的．在§7中，我们对于格数退化的3维 C^1 常微系统给出较多的讨论．在这一简短的序言中，欲进一步较确切地叙述这类结果，即令是扼要地叙述，将仍会显得过长．

我们工作的主要工具是 Kryloff-Bogoliouboff 诸态备经理论，这方面的情况见[1，第六章，§9]．这是一个关于紧致度量空间及其上一单参数变换群所构成的动力体系的一般理论．本章本质上涉及的是 M^n 上的切空间丛上的一单参数变换群．这丛空间自然不是紧致的；这些变换具有性质，即它们把 M^n 上一些点处的切空间彼此间线性地变换．可以说，本章大部分结果的导出也都依赖这一个简单性质．

§1. 某些在标架丛上的单参数变换群

本章中普遍以 M^n 表一紧致的 n 维 C^∞ 型微分流形，它是可度量的且其维数 $n\geqslant 2$．任取定 M^n 上一 C^∞ 型 Riemann 度量[1]．我们先叙述几个以后常用到的记号．M^n 上任一点处的切向量 u 及 v 的内积将记作 $u\cdot v$，u 的长度记作 $\|u\|$，即 $\|u\|=$

1) 本章的讨论中，普遍假定 M^n 上有一给定的 C^∞ 型 Riemann 度量(即在 M^n 上给定一正定对称的 C^∞ 型可微共变2阶张量场，它定义一 Riemann 度量)；在§8末我们给出要点，它实际上可以用来说明本文某些主要结论与 M^n 上的(C^∞ 型) Riemann 度量的选取无关．

$(u\cdot u)^{\frac{1}{2}}$（都是对所给的 Riemann 度量而言）。我们将以 $\mathscr{C}$ 表 M^n 的切空间丛，以 $\sigma:\mathscr{C}\to M^n$ 表它的投射。设 $1\leqslant l\leqslant n$。命 $\mathscr{U}_l$ 为 M^n 的通常的 l-标架丛，以 $p_l:\mathscr{U}_l\to M^n$ 为投射。这丛在 $x\in M^n$ 处的纤维 $p_l^{-1}(x)$ 由 M^n 一切的在 x 处的 l-标架（即，有顺序的且线性无关的切向量组 $(u_1,u_2,\cdots,u_l)$）所作成。一 l-标架 $\alpha=(u_1,u_2,\cdots,u_l)\in\mathscr{U}_l$ 叫作正交的，如果 $u_i\cdot u_j=0$ 对一切 $1\leqslant i<j\leqslant l$。容易看出，一切如此的正交 l-标架构成 $\mathscr{U}_l$ 的一子丛 $\mathscr{F}_l$，其投射将记作 q_l，即

$$q_l=p_l|\mathscr{F}_l.$$

关于丛的定义及它的拓扑，我们参考 [3, §§2, 3, 6]。这里，丛空间 $\mathscr{C}$，$\mathscr{U}_l$ 及 $\mathscr{F}_l$ 都是可度量的。

我们将考虑 M^n 上一 C^1 型常微系统 S，这即是：对 M^n 在其上每一点 x 处联系了一个切向量 $S(x)$，对一切 $x\in M^n$ 的这些 $S(x)$ 作成 M^n 上一 C^1 型可微的切向量场 S。因 M^n 是紧致且可度量的，S 产生 M^n 上一单参数 C^1 型可微变换群 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$。我们申述一下，这里所谓变换群是 C^1 型可微的是指由式子 $\phi(x,t)=\phi_t(x)$ 定义的映射 ϕ: $M^n\times(-\infty,\infty)\to M^n$ 是一 C^1 型可微的映射。若以 $e(x,t)$ 表微分流形 $M^n\times(-\infty,\infty)$ 在点 (x,t) 处沿 t 轴正方向的单位切向量，则 ϕ 的微分 $d\phi$ 将 $e(x,t)$ 映射至 $S(\phi_t(x))$。

对每一 $-\infty<t<\infty$，ϕ_t 是 M^n 上一 C^1 型可微映射，故 ϕ_t 的微分 $d\phi_t$ 将 M^n 在其上任一点 x 处的切空间线性变换至 M^n 在 $\phi_t(x)$ 处的切空间上。由是易验证 ϕ_t 自然地给出一拓扑映射

$$\Phi_t:\mathscr{C}\to\mathscr{C}$$

使得对任一 $u\in\mathscr{C}$，$\Phi_t(u)=d\phi_t(u)$。我们说 $\Phi_t(-\infty<t<\infty)$ 构成 $\mathscr{C}$ 上一单参数变换群。事实上，Φ_0 是 $\mathscr{C}$ 上的恒同映射。因 $\phi_t\phi_{t'}=\phi_{t+t'}$，故 $\Phi_t\Phi_{t'}=\Phi_{t+t'}$；因 $\phi:M^n\times(-\infty,\infty)\to M^n$ 是一 C^1 型可微映射，故由式子 $\Phi(u,t)=\Phi_t(u)$ 确定一（连续的）映射 $\Phi:\mathscr{C}\times(-\infty,\infty)\to\mathscr{C}$。这证明断语。显然，映射的交换

性

$$\phi_t a = a\Phi_t, \quad -\infty < t < \infty$$

成立。

常微系统 S 在 $\mathscr{C}$ 上的单参数变换群 $\Phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下是不变的，换言之，即对任意的 $x \in M^*$ 及 $-\infty < t < \infty$，

$$\Phi_t(S(x)) = S(\phi_t(x)). \tag{1.1}$$

事实上，$\phi_t\phi(x, s) = \phi_t\phi_t(x) = \phi(\phi_t(x), s)$（对一切 $(-\infty < s < \infty)$）。故

$$d\phi_t(S(x)) = d\phi_t(d\phi(e(x,0))) = d(\phi_t\phi)(e(x,0))$$
$$= d\phi(e(\phi_t(x),0)) = S(\phi_0\phi_t(x)) = S(\phi_t(x)).$$

一般地，设 $1 \leqslant l \leqslant n$。我们可类似地验证，对每一 $-\infty < t < \infty$，有拓扑映射

$$\Phi_t : \mathscr{U}_l \to \mathscr{U}_l$$

使得对任一 l-标架 $\alpha = (u_1, u_2, \cdots, u_l) \in \mathscr{U}_l$，$\Phi_t(\alpha) = (d\phi_t(u_1), d\phi_t(u_2), \cdots, d\phi_t(u_l))$；并且 $\Phi_t(-\infty < t < \infty)$ 构成 $\mathscr{U}_l$ 上一单参数变换群。

为了以下的方便，对任一 l-标架 $\alpha = (u_1, u_2, \cdots, u_l) \in \mathscr{U}_l$ 及任一在实数域上的非奇异的 l 阶方阵 $A = (a_{ij})$，我们将简单地用矩阵记号 $\alpha \cdot A$ 表示 l-标架

$$\left(\sum_{i=1}^{l} a_{i1}u_i, \ \sum_{i=1}^{l} a_{i2}u_i, \cdots, \ \sum_{i=1}^{l} a_{il}u_i\right).$$

既然微分 $d\phi_t$ 将 M^* 在其上任一点 x 处的切空间线性变换至 M^* 在 $\phi_t(x)$ 处的切空间上，据 Φ_t 的定义，下面(1.2)成立。

设 α 为一 l-标架 $\in \mathscr{U}_l$，A 为一在实数域上非奇异的 l 阶方阵，则

$$\Phi_t(\alpha \cdot A) = \Phi_t(\alpha) \cdot A. \tag{1.2}$$

本节余下部分中，我们将从 $\mathscr{U}_l$ 上的单参数变换群 $\Phi_t(-\infty < t < \infty)$ 出发以一定方式确定正交标架从 $\mathscr{F}_l$ 上一单参数变换群 $\chi_t(-\infty < t < \infty)$，$1 \leqslant l \leqslant n$。对任一 $\alpha \in \mathscr{U}_l$，命 $\Gamma(\alpha)$ 为具有下述性质 (i)及 (ii) 的(在实数域上的) l 阶三

角式的方阵，即

(i) $\Gamma(\alpha)$ 的对角线元素都是 1，对角线下面的元素都是 0，

(ii) $\alpha\cdot\Gamma(\alpha)$ 是正交的 l-标架.

这样 $\Gamma(\alpha)$ 的存在易从通常的 Gram-Schmidt 正交化手续得出；由是 $\Gamma(\alpha)=\alpha$ 若 $\alpha\in\mathscr{U}_1$，并且若一 $(l+1)$-标架 $\alpha'=(u_1, u_2,\cdots,u_{l+1})$ 中的 l-标架已经是正交的，则有

$$\Gamma(\alpha)=\left(\begin{array}{c|c} I_l & \begin{matrix} -\dfrac{u_{l+1}\cdot u_1}{\|u_1\|^2} \\ -\dfrac{u_{l+1}\cdot u_2}{\|u_2\|^2} \\ \vdots \\ -\dfrac{u_{l+1}\cdot u_l}{\|u_l\|^2} \end{matrix} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right), \tag{1.3}$$

其中 I_l 表 l 阶单位方阵. 从这些并对 l 取归纳法可看出，$\Gamma(\alpha)$ 由是 $\alpha\cdot\Gamma(\alpha)$ 都是由 α 唯一地确定的. 进一步易验证由式子 $\pi(\alpha)=\alpha\cdot\Gamma(\alpha),\alpha\in\mathscr{U}_l$，给出一(连续的)映射

$$\pi:\mathscr{U}_l\to\mathscr{F}_l, 1\leqslant l\leqslant n.$$

为了将来的方便，我们于此顺便提述下面的 (1.4).

设 $\alpha=(u_1,u_2,\cdots,u_l)\in\mathscr{U}_l$，$\alpha'=\alpha\cdot\Gamma(\alpha)=(u_1', u_2',\cdots, u_l')\in\mathscr{F}_l$，则

$$\|u_k'\|\leqslant\|u_k\|,\ k=1,2,\cdots,l. \tag{1.4}$$

事实上，我们用 (1.3) 并对 l 取归纳法直接计算得

$$u_k'\cdot u_k'\leqslant u_k\cdot u_k.$$

设 A 为一在实数域上的 l 阶三角式的方阵，其对角线元素都是 1，对角线下面的元素都是 $0(1\leqslant l\leqslant n)$，则对任一 l-标架 $\alpha\in\mathscr{U}_l$，恒有

$$\Gamma(\alpha)=A\Gamma(\alpha\cdot A). \tag{1.5}$$

事实上，$\alpha A\cdot\Gamma(\alpha A)=\alpha\cdot A\Gamma(\alpha A)$. 于是，据假设，易见 $A\Gamma(\alpha A)$ 是一个三角式的方阵，它对 α 而言，具有前述性质 (i)，

(ii)。但 $\Gamma(\alpha)$ 由 α 唯一地确定，如所欲证。

现在，对任一 $-\infty<t<\infty$，命

$$\chi_t:\mathscr{F}_l\to\mathscr{F}_l$$

为由 $\chi_t(\alpha)=\pi\Phi_t(\alpha)$ 定义的映射，我们说交换性在图表

$$\begin{array}{ccc}\mathscr{F}_l & \xrightarrow{\chi_t} & \mathscr{F}_l\\ \uparrow{\scriptstyle\pi} & & \uparrow{\scriptstyle\pi}\\ \mathscr{U}_l & \xrightarrow{\Phi_t} & \mathscr{U}_l\end{array}$$

中成立。事实上，对任一 $\alpha\in\mathscr{U}_l$，

$$\begin{aligned}\chi_t\pi(\alpha)&=\pi\Phi_t(\pi(\alpha))=\Phi_t(\pi(\alpha))\cdot\Gamma(\Phi_t(\pi(\alpha)))\\&=\Phi_t(\alpha\cdot\Gamma(\alpha))\cdot\Gamma(\Phi_t(\alpha\cdot\Gamma(\alpha)))\\&=[\Phi_t(\alpha)\cdot\Gamma(\alpha)]\cdot\Gamma(\Phi_t(\alpha)\cdot\Gamma(\alpha))\qquad\text{[据 (1.2)]}\\&=\Phi_t(\alpha)\cdot[\Gamma(\alpha)\Gamma(\Phi_t(\alpha)\cdot\Gamma(\alpha))]\\&=\Phi_t(\alpha)\cdot\Gamma(\Phi_t(\alpha))=\pi\Phi_t(\alpha).\qquad\text{[据 (1.5)]}\end{aligned}$$

我们说 $\chi_t(-\infty<t<\infty)$ 构成 $\mathscr{F}_l$ 上一单参数变换群。事实上，当 $t=0$ 时，$\Phi_0:\mathscr{U}_l\to\mathscr{U}_l$ 是恒同映射且对于 $\alpha\in\mathscr{F}_l$，$\pi(\alpha)=\alpha\cdot\Gamma(\alpha)$ 而 $\Gamma(\alpha)=I_l$，故 $\chi_0:\mathscr{F}_l\to\mathscr{F}_l$ 是恒同映射。其次，对任一 $\alpha\in\mathscr{F}_l$，据上面图表的交换性有 $\chi_s(\chi_t(\alpha))=\chi_s(\pi\Phi_t(\alpha))=\pi\Phi_s(\Phi_t(\alpha))=\pi\Phi_{s+t}(\alpha)=\chi_{s+t}(\alpha)$。再次，由式子 $\chi(\alpha,t)=\chi_t(\alpha)$，$\alpha\in\mathscr{F}_l$，定义一(连续的)映射 $\chi:\mathscr{F}_l\times(-\infty,\infty)\to\mathscr{F}_l$。这是因为，$\chi(\alpha,t)=\pi\Phi(\alpha,t)$，其中 Φ 是由 $\Phi(\beta,t)=\Phi_t(\beta),\beta\in\mathscr{U}_l$，定义的映射：$\mathscr{U}_l\times(-\infty,\infty)\to\mathscr{U}_l$。这证明断语。

这样，在 $\mathscr{F}_l$ 上就定义了单参数变换群 $\chi_t(-\infty<t<\infty)$。

设 $\alpha=(u_1,u_2,\cdots,u_l)$ 及 $\alpha'=(r_1u_1,r_2u_2,\cdots,r_lu_l)$ 均为正交的 l-标架 $\in\mathscr{F}_l$，其中 $r_1,r_2,\cdots,r_l$ 均为 $\neq0$ 的实数。设对任给的一 $-\infty<t<\infty$，$\chi_t(\alpha)=(v_1,v_2,\cdots,v_l)$，则

$$\chi_t(\alpha')=(r_1v_1,r_2v_2,\cdots,r_lv_l).\tag{1.6}$$

事实上，设 $\Phi_t(\alpha)=(w_1,w_2,\cdots,w_l)\in\mathscr{U}_l$，则

$$\Phi_l(\alpha') = (r_1w_1,\ r_2w_2,\cdots,\ r_lw_l).$$

若 $\Gamma(\Phi_l(\alpha)) = (a_{ij})$，直接验算就看出

$$\Gamma(\Phi_l(\alpha')) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{r_2}{r_1}a_{12} & \frac{r_3}{r_1}a_{13}\cdots & \frac{r_l}{r_1}a_{1l} \\ 0 & 1 & \frac{r_3}{r_2}a_{23}\cdots & \frac{r_l}{r_2}a_{2l} \\ 0 & 0 & 1 \quad \cdots & \frac{r_l}{r_3}a_{3l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \quad \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

而

$$\Phi_l(\alpha')\cdot\Gamma(\Phi_l(\alpha')) = (r_1v_1, r_2v_2,\cdots,r_lv_l).$$

(1.6) 证完。

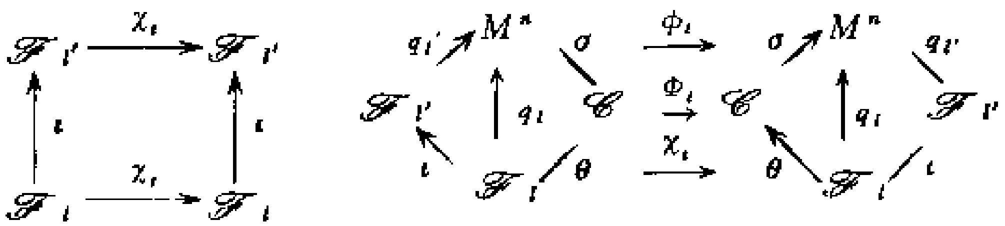
任给 $1 \leqslant l' \leqslant l \leqslant n$。命

$$\iota: \mathscr{U}_l \to \mathscr{U}_{l'}$$

为由 $\iota(u_1, u_2,\cdots, u_l) = (u_1, u_2,\cdots, u_{l'})$ 给出的映射，部分映射 $\iota|\mathscr{F}_l$ 也将简记作 ι。显然，$\iota(\mathscr{U}_l) = \mathscr{U}_{l'}$，$\iota(\mathscr{F}_l) = \mathscr{F}_{l'}$。又命

$$\theta: \mathscr{U}_l \to \mathscr{C}$$

为由 $\theta(u_1, u_2,\cdots, u_l) = u_1$ 给出的映射，部分映射 $\theta|\mathscr{F}_l$ 也将简记作 θ。交换性在图表



(1.7)

中成立。事实上，对任一 $\alpha \in \mathscr{U}_l$，从前述关于 $\Gamma(\alpha)$ 的性质 (i) 及 (ii) 易见 $\Gamma(\alpha)$ 的左上角 l' 阶子方阵恰是 $\Gamma(\iota(\alpha))$。据这性质及 χ_l 的定义易证 $\iota\chi_l = \chi_l\iota$。这里第二图表中的方形及三角形中交换性成立是明显的。

§2. 共变微商，函数 $\omega_k(\alpha)$

设 λ 为沿系统 S 一积分线 $\tilde{C}$ 的切于 M^n 的向量场，这意思是说，一映射 $\lambda:(-\infty,\infty)\to\mathscr{C}$ 使得对一切 $-\infty<t<\infty$，恒有 $\sigma\lambda(t)=\phi_t(\sigma\lambda(0))\in\tilde{C}$。如通常，$\lambda$ 沿 $\tilde{C}$ 在其上各点处的共变微商(简记作) $\nabla\lambda(t)$，假定存在且对 t 连续，则仍将给出沿 $\tilde{C}$ 切于 M^n 的一向量场 $\nabla\lambda$。但此处这些名词的用法与一般常见情形也许仍微有不同[1]，为了清楚，我们明确解释这共变微商 $\nabla\lambda(t)$ 的意义如下。当任取 M^n 在一点 $x'=\phi_{t'}(\sigma\lambda(0))\in\tilde{C}$ 的一邻域内的一局部坐标系 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 时，S 局部地可表成某一 n 维常微分方程组

$$\frac{dx_i}{dt}=S_i(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad i=1,2,\cdots,n,\tag{2.1}$$

于是，$\tilde{C}$ 在 x' 处局部地，即对于一切 $t\in$ 某一区间 (a,b)，可表成这方程组的一个当 $t=t'$ 时取值 $x_1',x_2',\cdots,x_n'$ 的解 $x_i=x_i(t,t';x_1',x_2',\cdots,x_n')$ $(i=1,2,\cdots,n)$；而 $\lambda(t)$ 可表成 $(\lambda_1(t),\lambda_2(t),\cdots,\lambda_n(t))$。于是，在任一 $a<t<b$ 处，共变微商 $\nabla\lambda$ 在这坐标系下的 n 个分量顺次按

$$\frac{d\lambda_i}{dt}+\sum_{j,k=1}^{n}\begin{Bmatrix}i\\jk\end{Bmatrix}\lambda_j\frac{dx_k}{dt}=\frac{d\lambda_i}{dt}+\sum_{j,k=1}^{n}\begin{Bmatrix}i\\jk\end{Bmatrix}\lambda_jS_k\tag{2.2}$$

取值，其中 $\begin{Bmatrix}i\\jk\end{Bmatrix}$ 是 Christoffel 记号。M^n 的这切向量 $\nabla\lambda(t)$ 与这局部坐标系的取法无干一事实的验证法如常，可以略去。

若 λ' 亦为一个沿 $\tilde{C}$ 切于 M^n 的向量场使得 $\sigma\lambda'(t)=\sigma\lambda(t)$，又若 $h(t)$ 为 $(-\infty,\infty)$ 上一连续的实函数，则可考虑实函数 $(\lambda\cdot\lambda')(t)=\lambda(t)\cdot\lambda'(t)$ 及分别由式子 $(h\lambda)(t)=h(t)\lambda(t)$，$(\lambda+\lambda')(t)=\lambda(t)+\lambda'(t)$ 定义的沿 $\tilde{C}$ 切于 M^n 的向量场

1) 例如，与通常考虑的情况颇不相同，沿 $\tilde{C}$ 的切向量 $\lambda(t)$ 对于 M^n 中的点 $\sigma\lambda(t)$ 来说不一定是单值的(当 $\tilde{C}$ 是奇点或周期解时，可能有这情况发生)；又即令 $\lambda(t)$ 对于 M^n 中的点 $\sigma\lambda(t)$ 来说是单值的，也不一定是连续的.

$h\lambda, \lambda + \lambda'$. 于此，我们提述一下几个有用的公式，即

$$\nabla(h\lambda) = h\nabla\lambda + \frac{dh}{dt}\lambda,\ \nabla(\lambda + \lambda') = \nabla\lambda + \nabla\lambda' \qquad (2.3)$$

（此处，假定 $\nabla\lambda'(t)$ 对一切 t 恒存在，h 对一切 t 有微商），

$$\frac{d\|\lambda\|^2}{dt}\left(=\frac{d(\lambda\cdot\lambda)}{dt}\right) = 2\lambda\cdot\nabla\lambda, \qquad (2.4)$$

$$\lambda\cdot\lambda' = \frac{1}{4}(\|\lambda + \lambda'\|^2 - \|\lambda - \lambda'\|^2),$$

$$\frac{d\lambda\cdot\lambda'}{dt} = \lambda\cdot\nabla\lambda' + \lambda'\cdot\nabla\lambda. \qquad (2.5)$$

以下，我们讨论两个特别情况。

I）设 λ 为沿 S 的一积分线切于 M^n 的向量场使得对一切 $-\infty<t<\infty$ 恒有 $\lambda(t) = \Phi_t(\lambda(0))$（这里 $\Phi_t(-\infty<t<\infty)$ 是 $\mathscr{C}$ 上的单参数变换群，见前节）。这是沿一条过 $\sigma(\lambda(0))\in M^n$ 的积分线的向量场，它也将记作 λ_u，其中 $u=\lambda(0)$.（显然，对一任给的 $u\in\mathscr{C}$，只有唯一如此的向量场 λ_u 使 $\lambda_u(0)=u$.）取 M^n 在 $x'=\phi_{t'}(\sigma(u))$ 处的一局部坐标系并考虑常微系统 (2.1) 及 $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \cdots, \lambda_n(t)$ 等如前。因系统 S 原假定是 C^1 型的，S_i 具有一阶的连续偏微商

$$\frac{\partial S_i}{\partial x_j},\ i, j = 1, 2, \cdots, n. \qquad (2.6)$$

取 $x_i(=x_i(t, t'; x'_1, x'_2, \cdots, x'_n))$ 对原始值 $x'_1, x'_2, \cdots, x'_n$ 沿向量 $\lambda' = (\lambda'_1(t), \lambda'_2(t), \cdots, \lambda'_n(t))$ 的微商，则有

$$\lambda_i(t) = \left.\frac{\partial x_i}{\partial\lambda'}\right|_t.$$

故据周知的事实，$\lambda_i(t)$ 适合方程组

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = \frac{\partial S_i}{\partial\lambda'} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial S_i}{\partial x_j}\lambda_j,\ i = 1, 2, \cdots, n, \qquad (2.7)$$

这结合 (2.2) 给出 $\nabla\lambda(t')$ 或 $\nabla\lambda_u(t')$ 的存在。

对任给的 $u\in\mathscr{C}$ 及 $-\infty<t<\infty$，记

$$D(u,t) = \nabla\lambda_u(t).$$

我们说

D是一(连续的)映射：$\mathscr{C} \times (-\infty, \infty) \to \mathscr{C}$. (2.8)

事实上,因 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 及 $\Phi_t(-\infty < t < \infty)$ 分别是 M^* 及 $\mathscr{C}$ 上的单参数变换群且 $\sigma\Phi_t = \phi_t\sigma$ 对一切 $-\infty < t < \infty$ 成立，这论断易从(2.2)，(2.7)及偏微商(2.6)的连续性推出。

II) 设 $1 \leqslant k \leqslant l \leqslant n$. 命

$$\theta_k: \mathscr{U}_l \to \mathscr{C}$$

为由 $\theta_k(u_1, u_2, \cdots, u_l) = u_k$ 给出的自然映射。(当 $k=1$ 时，θ_1 即为 $\theta: \mathscr{U}_l \to \mathscr{C}$，见前节末.)对任给的一正交$l$-标架 $\alpha = (w_1, w_2, \cdots, w_l) \in \mathscr{F}_l$，命

$$\lambda_{\alpha k}(t) = \theta_k \chi_t(\alpha), \quad -\infty < t < \infty.$$

若以 $\tilde{C}_\alpha$ 表系统 S 过 $q_t(\alpha) \in M^*$ 的积分线,则 $\lambda_{\alpha k}$ 是沿 $\tilde{C}_\alpha$ 切于 M^* 的一向量场。

我们说 $\nabla\lambda_{\alpha k}$ 在任一 $-\infty < t < \infty$ 处都存在。事实上,由式子 $\lambda_{w_k}(t) = \Phi_t(w_k)$ 给出一个前面(I)中所考虑的沿 $\tilde{C}_\alpha$ 的向量场 λ_{w_k}. 当 $k=1$ 时,因 $\theta_1\chi_t(\alpha) = \Phi_t(w_1)$，据(I)中所述,这断语成立。归纳地,设对 $i = 1, 2, \cdots, k$ 这断语已都成立,其中 $k < l$. 则从

$$\lambda_{\alpha, k+1} = \lambda_{w_{k+1}} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{w_{k+1}} \cdot \lambda_{\alpha i}}{\|\lambda_{\alpha i}\|^2} \lambda_{\alpha i} \tag{2.9}$$

(看 χ_t 的定义及(1.3))及(2.3)—(2.5)，易见这断语对 $k+1$ 亦成立。

对任给的 $\alpha \in \mathscr{F}_l$ 及 $-\infty < t < \infty$，记

$$E_k(\alpha, t) = \nabla\lambda_{\alpha k}(t), \quad k = 1, 2, \cdots, l,$$

我们说

E_k $(k = 1, 2, \cdots, l)$，都是(连续的)映射：

$$\mathscr{F}_l \times (-\infty, \infty) \to \mathscr{C}. \tag{2.10}$$

事实上,因 $\Phi_t\theta_1 = \theta_1\chi_t: \mathscr{F}_l \to \mathscr{C}$，故

$$E_1(\alpha,t)=D(\theta_1(\alpha),t),$$

由是据(2.8) E_1 是连续的，当 $1\leqslant k<l$ 时，用(2.3)—(2.5)直接计算式子(2.9)中两端的共变微商 $\nabla\lambda_{\alpha,k+1}(t)$ 等，即得

$$E_{k+1}(\alpha,t)=D(\theta_{k+1}(\alpha),t)-\sum_{i=1}^{k}[a_iE_i(\alpha,t)+b_i\theta_i\chi_t(\alpha)],$$

其中

$$a_i=\frac{\Phi_t\theta_{k+1}(\alpha)\cdot\theta_i\chi_t(\alpha)}{\|\theta_i\chi_t(\alpha)\|^2},$$

$$\begin{aligned}b_i&=\frac{d}{dt}\left(\frac{\lambda_{\alpha k+1}\cdot\lambda_{\alpha i}}{\|\lambda_{\alpha i}\|^2}\right)\\&=\frac{\Phi_t\theta_{k+1}(\alpha)\cdot E_i(\alpha,t)+\theta_i\chi_t(\alpha)\cdot D(\theta_{k+1}(\alpha),t)}{\|\theta_i\chi_t(\alpha)\|^2}\\&\quad-\frac{2[\Phi_t\theta_{k+1}(\alpha)\cdot\theta_i\chi_t(\alpha)][\theta_i\chi_t(\alpha)\cdot E_i(\alpha,t)]}{\|\theta_i\chi_t(\alpha)\|^4}.\end{aligned}$$

这些结合(2.8)并对 k 取归纳法易完成(2.10)的证明。

对任一 $\alpha\in\mathscr{F}_l$，我们将考虑 $(-\infty,\infty)$ 上的实函数

$$\zeta_{\alpha k}(t)=\|\theta_k\chi_t(\alpha)\|,\ k=1,2,\cdots,l;\ -\infty<t<\infty.$$

因 $\chi_t(\alpha)$ 是 l-标架，向量 $\theta_k\chi_t(\alpha)\neq 0$，故

$$\zeta_{\alpha k}(t)\ 恒>0.$$

又因 $\chi_t(-\infty<t<\infty)$ 是 $\mathscr{F}_l$ 上的单参数变换群，这些显然都是 $(-\infty,\infty)$ 上的连续函数。

函数 $\zeta_{\alpha k}(t)$ 都是对 t 连续可微的。事实上，据(2.4)等，有

$$\left.\frac{d\zeta_{\alpha k}}{dt}\right|_t=\frac{\lambda_{\alpha k}(t)\cdot\nabla\lambda_{\alpha k}(t)}{\sqrt{\lambda_{\alpha k}(t)\cdot\lambda_{\alpha k}(t)}}=\frac{\theta_k\chi_t(\alpha)\cdot E_k(\alpha,t)}{\|\theta_k\chi_t(\alpha)\|},\quad(2.11)$$

据(2.10)等，这是对 t 的连续函数。

我们将考虑 $\mathscr{F}_l$ 上的函数

$$\omega_k(\alpha)=\left.\frac{d\zeta_{\alpha k}}{dt}\right|_0,\ k=1,2,\cdots,l.$$

命题 2.1 $\omega_k(\alpha)$ $(k=1,2,\cdots,l)$ 都是 $\mathscr{F}_l$ 上的连续函

数且具有下述性质（i°）及（ii°），即

（i°）对任意的 $\alpha\in\mathscr{F}_l$ 及 $-\infty<t'<\infty$，恒有

$$\omega_k(\chi_{t'}(\alpha))=\left.\frac{d\zeta_{\alpha k}}{dt}\right|_{t'},$$

（ii°）对任意的 $\alpha=(u_1,u_2,\cdots,u_l)$ 及 $\alpha'=(r_1u_1,r_2u_2,\cdots,r_lu_l)\in\mathscr{F}_l$（其中诸 r_k 均为$\neq 0$ 的实数），恒有

$$\omega_k(\alpha')=|r_k|\omega_k(\alpha).$$

证 事实上，在(2.11)中置 $t=0$，有

$$\omega_k(\alpha)=\frac{\theta_k(\alpha)\cdot E_k(\alpha,0)}{\|\theta_k(\alpha)\|},$$

据(2.10)等，这是对 $\alpha\in\mathscr{F}_l$ 的连续函数。其次，欲证（i°）有

$$\zeta_{\chi_{t'}(\alpha)k}(t)=\|\theta_k\chi_t(\chi_{t'}(\alpha))\|=\zeta_{\alpha k}(t+t').$$

故

$$\omega_k(\chi_{t'}(\alpha))=\left.\frac{d\zeta_{\alpha k}(t+t')}{dt}\right|_0=\left.\frac{d\zeta_\alpha(t)}{dt}\right|_{t'}.$$

末了，若 α 及 α' 如（ii°）中所给，则据(1.6)，对任一 $-\infty<t<\infty$ 恒有

$$\theta_k\chi_t(\alpha')=r_k\theta_k\chi_t(\alpha),$$

由是

$$\zeta_{\alpha' k}(t)=|r_k|\zeta_{\alpha k}(t),$$

这蕴涵 $\omega_k(\alpha')=|r_k|\omega_k(\alpha)$。命题证完。

设 $1\leqslant l'<l\leqslant n$。据前所述，对任一 $\alpha\in\mathscr{F}_l$ 以及在 $\mathscr{F}_l$ 上我们定义了函数 $\zeta_{\alpha k}(t)$ 及 $\omega_k(\alpha)$。同样地，对任一 $\alpha'\in\mathscr{F}_{\alpha'}$ 及在 $\mathscr{F}_{\alpha'}$ 上我们也可以定义一组类似的函数。据图表(1.7)中一方形的交换性及这些函数的定义，易见它们具有下述关系，即对任意的 $\alpha\in\mathscr{F}_l$ 及 $-\infty<t<\infty$，

$$\zeta_{\alpha k}(t)=\zeta_{\iota(\alpha)k}(t),\ 1\leqslant k\leqslant l';$$

从而

$$\omega_k(\alpha)=\omega_k(\iota(\alpha)),\ 1\leqslant k\leqslant l',$$

这 ι 是自然映射：$\mathscr{F}_l\to\mathscr{F}_{l'}$，给出如同前节末。

§3. 函数 $\log\zeta_{\alpha k}(t)$

前面提过，对任一 $\alpha\in\mathscr{F}_l$ 实函数 $\zeta_{\alpha k}(t)$ 恒 $>0(1\leqslant k\leqslant l)$。我们将由是考虑对数函数 $\log\zeta_{\alpha k}(t)$。本节中，我们将建立类如下面的事实，即 若 F 是 M^n 中非空的闭子集在单参数变换群 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变，则在某些点 $\in F$ 处有正交的 l-标架 α，使得对一切 $k(1\leqslant k\leqslant l)$，下面两个极限存在且相等：

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\zeta_{\alpha k}(t)=\lim_{t\to-\infty}\frac{1}{t}\lim\log\zeta_{\alpha k}(t).$$

（在后面§8中较易看出函数 $\zeta_{\alpha k}(t)$ 所具有的较特别的意义。）

为着方便，我们先提述诸态备经理论中将要在这里用到的几件事实。给定一非空的紧致及可度量的空间 X 上一单参数变换群，或者说，一动力体系 $\varphi_t(-\infty<t<\infty)$。记 $\Delta(X)$ 及 $\Omega(X)$ 为集合，它们分别由 X 上一切不变的正规测度 μ 及一切连续实函数 $f(x)$ 组成（这里，正规 $\Leftrightarrow\mu(X)=1$；不变 $\Leftrightarrow$ 对 X 的任一 Borel 子集 B 及任一 $-\infty<t<\infty$，$\mu(B)=\mu(\varphi_t(B))$）。一 $\mu\in\Delta(X)$ 叫作可遍的，如果对 X 中任一不变的 μ-可测子集 X'（这里，不变 $\Leftrightarrow$ 对任一 $-\infty<t<\infty$，$\varphi_t(X')=X'$），$\mu(X')>0$ 蕴涵 $\mu(X-X')=0$。一点 $c\in X$ 叫作准正则的，如果对任一 $f(x)\in\Omega(X)$，极限

$$L_+(f,c)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(\varphi_t(c))dt \tag{3.1}$$

存在。照著名的 Kryloff-Bogoliouboff 理论中一些结果来说（例如，见 [1，第六章]），我们有：(i) $\Delta(X)$ 非空；(ii) 若 $c\in X$ 是准正则点，则有唯一的 $\mu_c\in\Delta(X)$ 使得对一切 $f(x)\in\Omega(X)$，

$$L_+(f,c)=\int_X f(x)d\mu_c;$$

(iii) 若 Q 为一集合，由一切具有可遍的 μ_c 的准正则点 c 组成，则 Q 是 X 中的不变子集，且对任一 $\mu\in\Delta(X)$，Q 是 μ-可测的且 $\mu(Q)=1$；并且，(iv) 若 $\mu\in\Delta(X)$ 是可遍的，且 Q_μ 为一

切使 $\mu_c = \mu$ 的点 $c \in Q$ 组成的集合，则 Q_μ 是 X 中的不变及 μ-可测子集且 $\mu(Q_\mu) = 1$.

对于我们的目的来说，我们将不仅如同一般讨论的情形一样，要断定对于某些 $c \in X$，(3.1) 中的(正向)极限的存在；同时还须要考虑对于这些同样的 c 以及任一 $f(x) \in \Omega$，(负向)极限

$$L_-(f,c) = \lim_{T \to -\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi_t(c))dt$$

是否也存在的问题. 明确地说，我们需要这样一个论断，即

任给一可通的 $\mu \in \Delta(X)$. 命 P_μ 为 X 中一切具有下述性质的点 c 作成的集合，即对任一 $f(x) \in \Omega(X)$，$L_+(f,c)$ 及 $L_-(f,c)$ 都存在且

$$L_+(f,c) = L_-(f,c) = \int_X f(x)d\mu,$$

则 P_μ 是 X 中的不变及 μ-可测子集且

$$\mu(P_\mu) = 1. \tag{3.2}$$

事实上，若命 $\varphi'_t = \varphi_{-t}$，易见 $\varphi'_t(-\infty < t < \infty)$ 也构成 X 上一单参数变换群，且对它来说，μ 也是一可通的不变正规测度；并且，对任意的 $c \in X$ 及 $f(x) \in \Omega(X)$ 有等式

$$L_-(f,c) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi'_t(c))dt,$$

假如这里两端的极限有一端存在. 命 Q'_μ 为一切具有下述性质的点 $c \in X$ 作成的集合，即对任一 $f(x) \in \Omega(X)$，

$$L_-(f,c) \text{ 存在且} = \int_X f(x)d\mu.$$

于是，应用前面引述的结果到变换群 $\varphi'_t(-\infty < t < \infty)$ 上，即得 Q'_μ 是 μ-可测的且 $\mu(Q'_\mu) = 1$. 这结合 μ 的可通性的假设以及前面关于 Q_μ 的性质给出 $Q_\mu \cap Q'_\mu$ 是 μ-可测集合且具有 μ-测度 1. 但 $Q_\mu \cap Q'_\mu \subset P_\mu$. 故 (3.2) 成立.

现在，我们仍回到从 $\mathscr{F}_l$ 及其上的单参数变换群 $\chi_t(-\infty < t < \infty)$. 一正交的 l-标架 $\alpha = (u_1, u_2, \cdots, u_l) \in \mathscr{F}_l$ 叫作正规的，如果 $\|u_k\| = 1$ $(k = 1, 2, \cdots, l)$. 容易看出，在 M^n 上各

点处一切的正规标架构成 $\mathscr{F}_l$ 的一子丛 $\mathscr{F}_l^\#$，其投射将记作 $q_l^\#$，即

$$q_l^\# = q_l | \mathscr{F}_l^\#.$$

我们注意到：由于 M^n 是紧致的，从空间 $\mathscr{F}_l^\#$ 是紧致的. 又因从空间 $\mathscr{F}_l$ 是可度量的，$\mathscr{F}_l^\#$ 也是可度量的.

我们将在 $\mathscr{F}_l^\#$ 上定义一单参数变换群 $\chi_t^\#(-\infty < t < \infty)$ 如下。命

$$\vartheta: \mathscr{F}_l \to \mathscr{F}_l^\#$$

为由

$$\vartheta(\alpha) = \left(\frac{\theta_1(\alpha)}{\|\theta_1(\alpha)\|}, \frac{\theta_2(\alpha)}{\|\theta_2(\alpha)\|}, \cdots, \frac{\theta_l(\alpha)}{\|\theta_l(\alpha)\|}\right)$$

给出的映射。对每一 $-\infty < t < \infty$，命 $\chi_t^\#$ 为映射

$$\chi_t^\# = \vartheta\chi_t | \mathscr{F}_l^\#: \mathscr{F}_l^\# \to \mathscr{F}_l^\#.$$

据 (1.6) 易见交换性在图表

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F}_l^\# & \xrightarrow{\chi_t^\#} & \mathscr{F}_l^\# \\ \uparrow{\scriptstyle\vartheta} & & \uparrow{\scriptstyle\vartheta} \\ \mathscr{F}_l & \xrightarrow{\chi_t} & \mathscr{F}_l \end{array}$$

中成立. 我们说 $\chi_t^\#(-\infty < t < \infty)$ 构成 $\mathscr{F}_l^\#$ 上一单参数变换群. 事实上，当 $t = 0$ 时，$\chi_0^\#$ 显然是 $\mathscr{F}_l^\#$ 上的恒同映射. 其次，对任一 $\alpha \in \mathscr{F}_l^\#$，$\chi_s^\#\chi_t^\#(\alpha) = \chi_s^\#\vartheta\chi_t(\alpha) = \vartheta\chi_s\chi_t(\alpha) = \vartheta\chi_{s+t}(\alpha) = \chi_{s+t}^\#(\alpha)$. 再次，由式子 $\chi^\#(\alpha, t) = \chi_t^\#(\alpha)$ 给出（连续的）映射：$\mathscr{F}_l^\# \times (-\infty, \infty) \to \mathscr{F}_l^\#$. 这是因为，若命 χ: $\mathscr{F}_{tl} \times (-\infty, \infty) \to \mathscr{F}_l$ 为由式子 $\chi(\alpha', t) = \chi_t(\alpha')$ 给出的映射，则 $\chi^\# = \vartheta\chi$. 这证明断语.

从 $\chi_t^\#$ 的定义，易见交换性在图表

$$\begin{array}{ccc} M^n & \xrightarrow{\phi_t} & M^n \\ \uparrow{\scriptstyle q_l^\#} & & \uparrow{\scriptstyle q_l^\#} \\ \mathscr{F}_l^\# & \xrightarrow{\chi_t^\#} & \mathscr{F}_l^\# \end{array}$$

中成立。由是，若 F 是 M^n 中对 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 来说不变的闭子集，则 $(q_l^\#)^{-1}(F)$ 是 $\mathscr{F}_l^\#$ 中对 $\chi_t^\#(-\infty<t<\infty)$ 来说不变的闭子集。又因 $\mathscr{F}_l^\#$ 及 M^n 都是紧致及可度量的空间，易见若 V 是 $\mathscr{F}_l^\#$ 中对 $\chi_t^\#(-\infty<t<\infty)$ 来说不变的闭子集，则 $q_l^\#(V)$ 也是 M^n 中对 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 来说不变的闭子集。$\chi_t^\#(-\infty<t<\infty)$ 限制在 $\mathscr{F}_l^\#$ 中一不变的非空的闭子集 V 上自然地给出 V 上一单参数变换群，它仍将记作 $\chi_t^\#(-\infty<t<\infty)$。这时 V 是紧致及可度量的，故 V 上有在 $\chi_t^\#(-\infty<t<\infty)$ 下不变及可通的正规测度。

我们仍将考虑对于一 $\alpha\in\mathscr{F}_l$ 的函数 $\zeta_{\alpha k}(t)(1\leqslant k\leqslant l)$. 若 $\alpha\in\mathscr{F}_l^\#$，显然 $\zeta_{\alpha k}(0)=\|\theta_k(\alpha)\|=1$。于此，我们顺便提述下面一个有用的等式，即

$$\zeta_{\chi_t^\#(\alpha)k}(t)=\frac{\zeta_{\alpha k}(s+t)}{\zeta_{\alpha k}(s)},\quad \alpha\in\mathscr{F}_l^\#. \tag{3.3}$$

这等式的证明易从 $\zeta_{\chi_t^\#(\alpha)k}(t)=\|\theta_k\chi_t(\chi_t^\#(\alpha))\|$ 及 (1.6) 等得出。我们也将考虑前节引入的 $\mathscr{F}_l$ 上的连续函数 $\omega_k(\alpha)$.

定理 3.1 设 V 是 $\mathscr{F}_l^\#$ 中对 $\chi_t^\#(-\infty<t<\infty)$ 来说不变的非空的闭子集。命 μ 是 V 上一个在 $\chi_t^\#(-\infty<t<\infty)$ 下不变及可通的正规测度。若 V_μ 是 V 中所有使得对一切 $k(k=1,2,\cdots,l)$，有下面的极限的 α 作成的集合，即

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\log\zeta_{\alpha k}(T)=\lim_{T\to-\infty}\frac{1}{T}\log\zeta_{\alpha k}(T)=\int_V\omega_k(\beta)d\mu,$$

则 V_μ 是 V 中对 $\chi_t^\#(-\infty<t<\infty)$ 来说的不变的 μ-可测子集，且 $\mu(V_\mu)=1$.

证 据 (3.3) 易见这 V_μ 是对 $\chi_t^\#(-\infty<t<\infty)$ 来说的不变的集合。命 V'_μ 为集合，它由 V 中所有具有下述性质的 α 组成，即对一切 $k(k=1,2,\cdots,l)$，我们有极限

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\omega_k(\chi_t^\#(\alpha))dt=\lim_{T\to-\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\omega_k(\chi_t^\#(\alpha))\,dt$$
$$=\int_V\omega_k(\beta)d\mu.$$

又据(3.2)，对于V及其上单参数变换群 $\chi_t^\#(-\infty < t < \infty)$ 来说我们现在有V中的子集 P_μ，它是 μ-可测的且具有 μ-测度 1。据 V'_μ 及 P_μ 的定义，显然 $P_\mu \subset V'_\mu$。由是 V'_μ 是 μ-可测的且 $\mu(V'_\mu) = 1$。故欲证明定理，只须证 $V_\mu = V'_\mu$，也只须证

引理 3.2 对任一 $\alpha \in \mathscr{F}_l^\#$，我们有

$$\log \zeta_{\alpha k}(t) = \int_0^t \omega_k(\chi_s^\#(\alpha))ds, \quad k = 1, 2, \cdots, l.$$

事实上，欲证的等式右面的被积函数是对 s 的连续函数且

$$\log \zeta_{\alpha k}(0) = \log 1 = 0.$$

故引理成立，如果(对一切 t)

$$\omega_k(\chi_t^\#(\alpha)) = \frac{d}{dt} \log \zeta_{\alpha k}(t) = \frac{1}{\zeta_{\alpha k}(t)} \frac{d\zeta_{\alpha k}(t)}{dt}.$$

但这等式是成立的，因为

$$\chi_t^\#(\alpha) = \left(\frac{\theta_1\chi_t(\alpha)}{\zeta_{\alpha 1}(t)}, \frac{\theta_2\chi_t(\alpha)}{\zeta_{\alpha 2}(t)}, \cdots, \frac{\theta_l\chi_t(\alpha)}{\zeta_{\alpha l}(t)}\right),$$

$$\chi_t(\alpha) = (\theta_1\chi_t(\alpha), \theta_2\chi_t(\alpha), \cdots, \theta_l\chi_t(\alpha)),$$

由是据命题 2.1，

$$\omega_k(\chi_t(\alpha)) = \frac{d\zeta_{\alpha k}(t)}{dt},$$

$$\omega_k(\chi_t^\#(\alpha)) = \frac{1}{\zeta_{\alpha k}(t)} \omega_k(\chi_t(\alpha)).$$

引理证完。

§4. 格数 $k^*(F)$

设 $\beta = (v_1, v_2, \cdots, v_l)$ 是 M^n 在其上一点 x 处 l 个有顺序的切向量组，$1 \leqslant l \leqslant n$。我们将考虑这些向量所张的平行多面体的体积 $\nu(\beta) = \nu(v_1, v_2, \cdots, v_l)$。这是由下述方式得出的，即在 x 处任取 M^n 的一正规 l-标架 $\alpha = (u_1, u_2, \cdots, u_l) \in \mathscr{F}_l^\#$ 使得每个 v_i 都是这些 u_j 的线性组合，或用矩阵记号来写，即是 $\beta = \alpha A$，其中 A 是一 l 阶方阵。于是，$\nu(\beta)$ 取作 A 的行列式的绝对

值，

$$\nu(\beta)=|\det A|.$$

易见 $\nu(\beta)$ 的确定与 x 处的如上所述的正规标架的选取无干。

下面诸事实是明显的：$\nu(\beta)\geqslant 0$，$\nu(\beta)>0$ 当且仅当诸 v^i 线性无关(即 $\beta\in\mathscr{U}_l$)，并且若 $\beta'=\beta B$ 其中 B 是一 l 阶方阵，则

$$\nu(\beta')=\nu(\beta)|\det.B|.$$

从关于切向量的一些通常论据，易验证 $\nu(v_1,v_2,\cdots,v_l)$ 是 l 个变量 $v_1,v_2,\cdots,v_l$ 的一并连函数，即：若 $v_1,v_2,\cdots,v_l$ 是 M^n 在其上同一点处的切向量，则对任一 $\varepsilon>0$，v_i 在 M^n 的切空间从 $\mathscr{C}$ 中有邻域 $W_i(i=1,2,\cdots,l)$，使得只要 $w_i\in W_i$ 且诸 w_i 都是 M^n 上同一点处的切向量，即有

$$|\nu(v_1,v_2,\cdots,v_l)-\nu(w_1,w_2,\cdots,w_l)|<\varepsilon.$$

我们有

$$\nu(\alpha)=\nu(\pi(\alpha))=\|\theta_1\pi(\alpha)\|\cdot\|\theta_2\pi(\alpha)\|\cdot\cdots\cdot\|\theta_l\pi(\alpha)\|,\quad(4.1)$$

$$\text{对任一 }\alpha\in\mathscr{U}_l$$

(其中 π 是映射：$\mathscr{U}_l\to\mathscr{F}_l$，见§1)。事实上，据 π 的定义，对于 $\alpha\in\mathscr{U}_l$ 有 $\pi(\alpha)=\alpha\cdot\Gamma(\alpha)$，其中 $\Gamma(\alpha)$ 是一个三角式的方阵，它的对角线元素都是 1。由是，因 $\det\Gamma(\alpha)=1$，据 $\nu(\alpha)$ 的定义等易见(4.1)成立。

本节主要目的是在探讨 M^n 上在系统 S 的常点处与积分线相正交的一些向量所决定的方向在由 S 导出的单参数变换群中的变换下的某类渐近性质。命 M 为 M^n 上对于 S 来说一切常点作成的集合 ($x\in M$ 当且仅当 $S(x)\neq 0$)。这是 M^n 的开子集。设 $1\leqslant l\leqslant n-1$。考虑 M^n 上在任一点 $x\in M$ 处与 $S(x)$ 相正交的 l 个线性无关的切向量 u_i 作成的 l-标架 $\in\mathscr{U}_l$。易见一切如此的 l-标架构成 $\mathscr{U}_l$ 的一子丛 $\mathscr{L}_l$，它以 M 为底空间，它的投射将记作 ρ_l，即

$$\rho_l=q_l|\mathscr{L}_l.$$

当 $l=1$ 时，$\mathscr{L}_1$ 在任一点 x 处的纤维 $\rho_1^{-1}(x)$ 恰由 M^n 在 x 处一切与 $S(x)$ 正交且不为 0 的切向量所组成，我们也将考虑 $\mathscr{L}_l$ 的

一子丛 $\mathscr{L}_l^{\#}$，它由一切使得 $\|u_i\|=1$ 的 l-标架 $\alpha=(u_1,u_2,\cdots,u_l)\in\mathscr{L}_l$ 所组成。这丛仍以 M 为底空间，其投射将记作 $\rho_l^{\#}$，即

$$\rho_l^{\#}=\rho_l|\mathscr{L}_l^{\#}.$$

当 $l=1$ 时，$\mathscr{L}_1^{\#}$ 在任一 $x\in M$ 处的纤维 $(\rho^{\#})^{-1}(x)$ 恰由 M^n 在 x 处一切与 $S(x)$ 相正交且具有单位长的切向量所组成的 $n-2$ 维球。当 $l=1$ 时，我们也将用下面较简单的记号，即

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_1,\ \rho=\rho_1;\ \mathscr{L}^{\#}=\mathscr{L}_1^{\#},\ \rho^{\#}=\rho_1^{\#}.$$

我们将指出 M^n 上的单参数变换群 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 自然地导出 $\mathscr{L}_l$ 上一单参数变换群 $\psi_t(-\infty<t<\infty)$。我们将就已经建立的论据来说明这事实。在 §1 中我们从 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 定义了 $\mathscr{F}_2$ 上的单参数变换群 $\chi_t(-\infty<t<\infty)$。在 $\mathscr{F}_2$ 中考虑形式如 $(S(x)),u)$ 的标架，这里 $x\in M$，u 是 M^n 在 x 处与 $S(x)$ 相正交的一个切向量。易见一切如此的2-标架构成 $\mathscr{F}_2$ 的子丛 $\mathscr{L}'$，它以 M 为底空间。对任一 $u\in\mathscr{L}$，命

$$f_0(u)=(S(\rho(u)),\ u).$$

这给出一(在上的)拓扑映射：$\mathscr{L}\to\mathscr{L}'$(并且这是一个丛映射)。据(1.1)及 χ_t 的定义易见 $\mathscr{L}'$ 在 $\chi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变，即，对任一 $-\infty<t<\infty$，$\chi_t(\mathscr{L}')=\mathscr{L}'$。所以，对任一 $u\in\mathscr{L}$，命

$$\psi_t(u)=f_0^{-1}\chi_t f_0(u),$$

则由这式子给出 $\mathscr{L}$ 上一单参数变换群 $\psi_t(-\infty<t<\infty)$。

我们可扩充上述定义方式到一般情况 $1\leqslant l\leqslant n-1$。为此，我们将置

$$\psi_t(\alpha)=(\psi_t(u_1),\psi_t(u_2),\cdots,\psi_t(u_l))$$

对任意的

$$\alpha=(u_1,u_2,\cdots,u_l)\in\mathscr{L}_l\text{ 及 }-\infty<t<\infty.\tag{4.2}$$

易见这式子的等号右端仍是一 l-标架。事实上，这里诸 $u_k'=\psi_t(u_k)$ 都是 M^n 中同一点 $x'\in M$ 处的 l 个与 $u'=S(x')$ 相正交的切向量，并且据 $\mathscr{F}_2$ 上的变换 χ_t 的定义及(1.3)易见

$$u'_k = \Phi_t(u_k) - \frac{u' \cdot \Phi_t(u_k)}{\|u'\|^2} u' \tag{4.3}$$

(这里 Φ_t 是 M^n 的切空从 $\mathscr{C}$ 上的变换，见 § 1)。于是，由于 u' 与这 l 个切向量 $\Phi_t(u_k)$ 线性无关，这 l 个 u'_k 也是线性无关的。我们说式子(4.2)给出 $\mathscr{L}_l$ 上一单参数变换群 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$。事实上，显然 ϕ_0 是恒同映射且 $\phi_s\phi_t = \phi_{s+t}$；并且亦易验证由式子 $\phi(\alpha, t) = \phi_t(\alpha)$，$\alpha \in \mathscr{L}_l$，给出一(连续的)映射 $\mathscr{L}_l \times (-\infty, \infty) \to \mathscr{L}_l$。用较直观的说法来说，(4.3)表明 $\phi_t(u_1, u_2, \cdots u_l)$ 中第 k 个向量恰是 $\Phi_t(u_k)$ 在 M^n 上 $x' = \sigma\Phi_t(u_k)$ 处的切空间中与 $S(x')$ 相正交的 $n-1$ 维子空间上的垂直投影。对任一 $\alpha \in \mathscr{L}_l$，式子

$$\phi_t\rho_l(\alpha) = \rho_l\phi_t(\alpha) \in M$$

成立。

设 α 及 $\alpha' \in \mathscr{L}_l$ 且设 $\alpha' = \alpha A$ 其中 A 为一非奇异的 l 阶方阵，则对任一 $-\infty < t < \infty$，$\phi_t(\alpha') = \phi_t(\alpha)A$。特别地，若 $\alpha = (u_1, u_2, \cdots, u_l)$，$\alpha' = (r_1u_1, r_2u_2, \cdots, r_lu_l)$ (其中诸 r_k 均为 $\neq 0$ 的实数)且 $\phi_t(\alpha) = (v_1, v_2, \cdots, v_l)$，则

$$\phi_t(\alpha') = (r_1v_1, r_2v_2, \cdots, r_lv_l). \tag{4.4}$$

这易从(4.3)及 Φ_t 将 M^n 在任一点 x 处的切空间线性地变换到 M^n 在 $\phi_t(x)$ 处的切空间上一事实推出。

我们也将考虑 $\mathscr{L}_l^{\#}$ 上一单参数变换群 $\phi_t^{\#}(-\infty < t < \infty)$。这 $\phi^{\#}$ 的定义由正规化 $\phi_t(\alpha)$ 中诸向量给出，即

$$\phi_t^{\#}(u_1, u_2, \cdots, u_l) = \left(\frac{\phi_t(u_1)}{\|\phi_t(u_1)\|}, \frac{\phi_t(u_2)}{\|\phi_t(u_2)\|}, \cdots, \frac{\phi_t(u_l)}{\|\phi_t(u_l)\|}\right),$$

其中 $\alpha = (u_1, u_2, \cdots, u_l) \in \mathscr{L}_l^{\#}$，用(4.4)易证这些 $\phi_t^{\#}$ 构成 $\mathscr{L}_l^{\#}$ 上一单参数变换群。(细节与 § 3 中关于变换 $\chi_t^{\#}$ 的讨论相类，因此略去。)对任一 $\alpha \in \mathscr{L}_l^{\#}$，式子

$$\phi_t\rho_l^{\#}(\alpha) = \rho_l^{\#}\phi_t^{\#}(\alpha) \in M$$

成立。

现在，任给一 $\alpha = (u_1, u_2, \cdots, u_l) \in \mathscr{L}_l^{\#}$，亦即，任给 M^n 在

其上一点 $x \in M$ 处的 l 个与 $S(x)$ 都正交且长度都为 1 的线性无关的切向量 $u_1, u_2, \cdots, u_l$ $(1 \leqslant l \leqslant n-1)$. 我们将考虑 $(-\infty, \infty)$ 上的实函数

$$\eta_\alpha^*(t) = \nu(\phi_t^\#(\alpha)).$$

因 $\nu(v_1, v_2, \cdots, v_l)$ 是 $\mathscr{U}_l$ 上对 l 个变量 $v_1, v_2, \cdots, v_l$ 的一并连续的函数，且 $\phi_t^*(-\infty < t < \infty)$ 是 $\mathscr{L}_l^\#(\subset \mathscr{U}_l)$ 上的单参数变换群，故 $\eta_\alpha^*(t)$ 对 t 是连续的，又因 l-标架 $\phi_t^\#(\alpha)$ 中的 l 个向量都具有长度 1 且线性无关，据 (1.5) 及 (4.1) 易见恒有

$$0 < \eta_\alpha^*(t) \leqslant 1.$$

对任给一 $\varepsilon > 0$，我们将记 $\eta_{\alpha\epsilon}^*(t)$ 为实数集

$$A_{\alpha\epsilon} = \{t \in (-\infty, \infty) \mid \eta_\alpha^*(t) \geqslant \varepsilon\}$$

在 $(-\infty, \infty)$ 上的特征函数。

这 $\alpha \in \mathscr{L}_l^\#$ 将叫作对 $\phi_t^\#(-\infty < t < \infty)$ 来说是正向平均线性无关的，如果存在某一 $\varepsilon > 0$ 使得不等式

$$I_+^*(\alpha, \varepsilon) = \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} \int_0^T \eta_{\alpha\epsilon}^*(t) dt > 0$$

成立，否则，将称 α (对 $\phi_t^\#(-\infty < t < \infty)$ 来说)是正向平均线性相关的。同样地，这 α 叫作(对 $\phi_t^\#(-\infty < t < \infty)$ 来说) 是负向平均线性无关或负向平均线性相关的，按是否有某一 $\varepsilon > 0$ 使得不等式

$$I_-^*(\alpha, \varepsilon) = \overline{\lim_{T\to-\infty}} \frac{1}{T} \int_0^T \eta_{\alpha\epsilon}^*(t) dt > 0$$

成立而定。明显地，$1 \geqslant I_+^*(\alpha, \varepsilon) \geqslant 0$, $1 \geqslant I_-^*(\alpha, \varepsilon) \geqslant 0$; 且若 $\varepsilon > \varepsilon' > 0$, 则 $\eta_{\alpha\epsilon'}^*(t) \geqslant \eta_{\alpha\epsilon}^*(t)$, 由是 $I_+^*(\alpha, \varepsilon') \geqslant I_+^*(\alpha, \varepsilon)$, $I_-^*(\alpha, \varepsilon') \geqslant I_-^*(\alpha, \varepsilon)$.

设 $\alpha' = \phi_s^\#(\alpha)$ 对任给的一 $-\infty < s < \infty$. 则 $\eta_{\alpha'}^*(t) = \nu(\phi_t^\#(\phi_s^\#(\alpha))) = \nu(\phi_{s+t}^\#(\alpha)) = \eta_\alpha^*(s+t)$. 由是，对任一 $\varepsilon > 0$, $\eta_{\alpha'\epsilon}^*(t) = \eta_{\alpha\epsilon}^*(s+t)$, 这蕴涵

$$I_+^*(\alpha', \varepsilon) = I_+^*(\alpha, \varepsilon) \text{ 及 } I_-^*(\alpha', \varepsilon) = I_-^*(\alpha, \varepsilon). \tag{4.5}$$

因此，任给 $\alpha\in\mathscr{L}_l^\#$ 及 $-\infty<s<\infty$。命 $\alpha'=\phi_s^\#(\alpha)$。若 α（对 $\phi_t^\#(-\infty<t<\infty)$ 来说）是正向平均线性无关的，则 α' 也是正向平均线性无关的；若 α 是负向平均线性无关的，则 α' 也是如此的。

对于 $1\leqslant l'<l\leqslant n-1$，命 $\iota:\mathscr{L}_l^\#\to\mathscr{L}_{l'}^\#$ 为由 $\iota(u_1,u_2,\cdots,u_l)=(u_1,u_2,\cdots,u_{l'})$ 给出的自然映射。从 $\mathscr{L}_l^\#$ 等上的变换 $\phi_t^\#$ 的定义，易见对任一 $\alpha\in\mathscr{L}_l^\#$，恒有

$$\iota\phi_t^\#(\alpha)=\phi_t^\#\iota(\alpha)(-\infty<t<\infty).$$

命题 4.1 任给 $\alpha\in\mathscr{L}_l^\#$。命 $\alpha'=\iota(\alpha)\in\mathscr{L}_{l'}^\#$ $(1\leqslant l'\leqslant l)$。若 α 是正向平均线性无关的，则 α' 也是正向平均线性无关的；若 α 是负向平均线性无关的，则 α' 也是如此的。

证 我们将用(4.1)推证：对任给的 $-\infty<t<\infty$ 恒有

$$\eta_{\alpha'}^*(t)\geqslant\eta_\alpha^*(t),$$

由是易见命题 4.1 成立。事实上，简记 $\beta=\phi_t^\#(\alpha)\in\mathscr{L}_l^\#$，$\beta'=\phi_t^\#(\alpha')\in\mathscr{L}_{l'}^\#$。则 $\beta'=\iota(\beta)$。考虑 $\pi(\beta)=\beta\cdot\Gamma(\beta)=(v_1,v_2,\cdots,v_l)\in\mathscr{F}_l$，其中 $\Gamma(\beta)$ 是一个三角式方阵，它的对角线元素都是 1，对角线下面的元素都是 0，由是 $\Gamma(\beta)$ 的左上角 l' 阶子方阵恰是 $\Gamma(\beta')$ 而 $\pi(\beta')=\beta'\cdot\Gamma(\beta')=(v_1,v_2,\cdots,v_{l'})\in\mathscr{F}_l$。故据(4.1)，

$$\eta_\alpha^*(t)=\nu(\beta)=\|v_1\|\cdot\|v_2\|\cdot\cdots\cdot\|v_l\|,$$
$$\eta_{\alpha'}^*(t)=\nu(\beta')=\|v_1\|\cdot\|v_2\|\cdot\cdots\cdot\|v_{l'}\|.$$

但 $\beta\in\mathscr{L}_l^\#$。故若 $\beta=(u_1,u_2,\cdots,u_l)$，则据(1.4)即有

$$\|v_k\|\leqslant\|u_k\|=1$$

对

$$l'\leqslant k\leqslant l,$$

这给出

$$\eta_{\alpha'}^*(t)\geqslant\eta_\alpha^*(t).$$

命题 4.1 证完。

任一 $\alpha\in\mathscr{L}^\#-\mathscr{L}_1^\#$ 都是正向及负向平均线性无关的，这是因为：$\mathscr{L}^\#$ 由 M^* 上某些长度为 1 的切向量组成，由是对任意的 $\alpha\in\mathscr{L}^\#$ 及 $-\infty<t<\infty$ 恒有 $\eta_\alpha^*(t)=1$。

现在，任给 $x \in M$(即 x 是 M^* 上系统 S 的常点)。具有下述性质的整数 $l \leqslant n-1$ 中最大的一个整数将叫作 x 的正向格数，并记作 $k_+^*(x)$。 这性质即是：对于 l 来说有一 $\alpha \in (\rho_l^\#)^{-1}(x)$，它是正向平均线性无关的。($\alpha \in (\rho_l^\#)^{-1}(x)$ 意即 M^* 在 x 处有 l 个与 $S(x)$ 都正交且长度为 1 的切向量组 $\alpha=(u_1, u_2, \cdots, u_l) \in \mathscr{L}_l^\#$.) 同样地，一切使得有负向平均线性无关的 $\alpha \in (\rho_l^\#)^{-1}(x)$ 的整数 $l \leqslant n-1$ 中最大的一个将叫作 x 的负向格数，并记作 $k_-^*(x)$。明显地，我们有 $1 \leqslant k_+^*(x) \leqslant n-1$，$1 \leqslant k_-^*(x) \leqslant n-1$。又对任一 $-\infty < s < \infty$，据 (4.5) 等恒有

$$k_+^*(x) = k_+^*(\phi_s(x))$$

及

$$k_-^*(x) = k_-^*(\phi_s(x)),$$

换句话说，即 $k_+^*(x)$ 及 $k_-^*(x)$ 都是沿 M^* 上系统 S 的积分线不变的整数。

设 F 是 M^* 中一非空的子集，不包含对系统 S 来说的奇点。我们将记

$$k_+^*(F) = \operatorname*{Max}_{x \in F}\{k_+^*(x)\}, \quad k_-^*(F) = \operatorname*{Max}_{x \in F}\{k_-^*(x)\},$$

分别叫作 F 的正向及负向格数。记

$$k^*(F) = \operatorname{Max}\{k_+^*(F), k_-^*(F)\},$$

这将叫作 F 的格数。显然 $1 \leqslant k^*(F) \leqslant n-1$。又简记

$$V_F = (\rho_k^\#)^{-1}(F) \subset \mathscr{L}_k^\#,$$

其中 $k = k^*(F)$. 因 $\rho_k^\#(\mathscr{L}_k^\#) = M$ 且 F 非空，故 V_F 也是非空集.

下面的格数定理是本节主要的结果。

定理 4.2 设 F 是 M^* 中一非空的闭子集，不包含对系统 S 来说的奇点且在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变。则

(i) F 的正向格数与负向格数相等：

$$k_+^*(F) = k_-^*(F).$$

(ii) 存在 $\alpha \in V_F$ 使得 $\rho_k^\#(\alpha)$ 对于 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 来说是 P 式稳定的 ($k = k^*(F)$)，且

$$\lim_{\epsilon\to+0}\left(\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{T}\int_0^T \eta^*_{\alpha\epsilon}(t)dt\right)=\lim_{\epsilon\to+0}\left(\overline{\lim_{T\to-\infty}}\frac{1}{T}\int_0^T \eta^*_{\alpha\epsilon}(t)dt\right)=1. \tag{*}$$

定理证明稍后才完成。记 $L=(\rho^\#)^{-1}(F)\subset\mathscr{L}^\#$，$g^\#=\rho^\#|L:L\to F$，其中 F 是这定理假设中所给的。考虑 L 的 k 重 Descartes 积

$$L_k=\underbrace{L\times L\times\cdots\times L}_{\text{共}k\text{个}}$$

中的子空间

$$L_k^\#=\{(u_1,u_2,\cdots,u_k)\in L_k|g^\#(u_1)=g^\#(u_2)=\cdots=g^\#(u_k)\},$$

其中 $k=k^*(F)$。显然，$(u_1,u_2,\cdots,u_k)\in L_k^\#\Longleftrightarrow u_1,u_2,\cdots,u_k$ 是 M^n 在其上一点 $\in F$ 处的 k 个单位长切向量；前面所述的 V_F 是 $L_k^\#$ 的子集，它恰由一切使 $u_1,u_2,\cdots,u_k$ 线性无关的 $\alpha=(u_1,u_2,\cdots,u_k)\in L_k^\#$ 所组成。于是，

$$V_F=\{\alpha\in L_k^\#|\nu(\alpha)>0\}.$$

记

$$V_F^\#=L_k^\#-V_F.$$

则从 $\nu(u_1,u_2,\cdots,u_k)$ 对变量 $u_1,u_2,\cdots,u_k$ 来说的一并连续性，V_F 及 $V_F^\#$ 分别为 $L_k^\#$ 中的开子集及闭子集。

我们说 $L_k^\#$ 是一紧致的可度量空间。事实上，因 $\mathscr{L}^\#$ 是可度量的，易见 $L_k^\#$ 是可度量的。其次，因 F 是 M^n 的闭子集而 M^n 是紧致的，故 F 自身也是紧致的。于是，因从 $\mathscr{L}^\#$ 在任一 $x\in M$ 处的纤维 $(\rho^\#)^{-1}(x)$ 都是 $\mathscr{L}^\#$ 的紧致子集（$(\rho^\#)^{-1}(x)$ 实际上是一 $n-2$ 维球），L 由是 L_k 是紧致的。从 $g^\#:L\to F$ 的连续性易见 $L_k^\#$ 是 L_k 的闭子集。故 $L_k^\#$ 是紧致的。

在 $L_k^\#$ 上我们将以自然方式定义一单参数变换群。事实上，因 F 是 M^n 中在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变的子集且因对任一 $\alpha\in\mathscr{L}_k^\#$ 恒有 $\rho_k^\#\phi_t^\#(\alpha)=\phi_t\rho_k^\#(\alpha)$，故 V_F 也是 $\mathscr{L}_k^\#$ 中在 $\phi_t^\#(-\infty<t<\infty)$ 下不变的子集；为方便，对任一 $-\infty<t<\infty$ 暂记 $\phi_t'=\phi_t^\#|V_F:V_F\to V_F$。又从 $F\subset M^n$ 在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$

下的不变性等，则 L 也是 $\mathscr{L}^{\#}$ 中在 $\phi_t^{\#}(-\infty<t<\infty)$ 下不变的子集。于是，若对任一 $(u_1,u_2,\cdots,u_k)\in L_k^{\#}$ 置

$$\phi_t^{\#}(u_1,u_2,\cdots,u_k)=(\phi_t^{\#}(u_1),\ \phi_t^{\#}(u_2),\cdots,\ \phi_t^{\#}(u_k)),$$

据 $L_k^{\#}$ 的定义等易验证这式子给出 $L_k^{\#}$ 上一单参数变换群 $\phi_t^{\#}(-\infty<t<\infty)$ 使得对每一 $-\infty<t<\infty$，这 $\phi_t^{\#}$ 限制在 V_F 上时恰为 ϕ_t'。在这变换群下，V_F 由是 $L_F^{\#}$ 自然也都是 $L_k^{\#}$ 中的不变子集。

定理 4.2 的证明 先证下面引理。

引理 4.3 在前述的紧致的可度量空间 $L_k^{\#}=V_F^{\#}\cup V_F$ 上，存在一个对单参数变换群 $\phi_t^{\#}(-\infty<t<\infty)$ 来说的不变及可通的正规测度 μ 使 $\mu(V_F)=1$。

证 首先，设 $k=k_1^*(F)$，考虑 $L_k^{\#}$ 上对 $\phi_t^{\#}(-\infty<t<\infty)$ 来说的（正向的，即当 $t\to\infty$ 时的）极小吸引中心 $C^{\#}$（见 [1，第五章，§6]），我们说 $C^{\#}$ 不包含在 $V_F^{\#}$ 内。事实上，相反地设 $C^{\#}\subset V_F^{\#}$，则 $V_F^{\#}$ 是对 $\phi_t^{\#}(-\infty<t<\infty)$ 来说的（正向的）吸引中心。因 k 是 F 的正向格数，存在一 $\alpha\in V_F$ $(=(\rho_k^{\#})^{-1}(F)\subset\mathscr{L}_k^{\#})$ 使得对某一 $\epsilon>0$，

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{T}\int_0^T\eta_{\alpha\epsilon}^*(t)dt>0,$$

注意 $\nu(\beta)$ 对于 $\beta\in L_k^{\#}$ 是连续的函数。故若命 U_ϵ 为一切使 $\nu(\beta)<\epsilon$ 的 $\beta\in L_k^{\#}$ 作成的集合，则 U_ϵ 是 $L_k^{\#}$ 的一开子集 $\supset V_F^{\#}$。于是，因 $\eta_\alpha^*(t)=\nu(\phi_t^{\#}(\alpha))<\epsilon$ 当且仅当 $\phi_t^{\#}(\alpha)\in U_\epsilon$，据吸引中心的定义我们又有

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\eta_{\alpha\epsilon}(t)dt=1,$$

其中 $\eta_{\alpha\epsilon}(t)$ 表实数集 $\{t\in(-\infty,\infty)\,|\,\eta_\alpha^*(t)<\epsilon\}$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上的特征函数。但 $\eta_{\alpha\epsilon}^*(t)+\eta_{\alpha\epsilon}(t)=1$ 对一切 $-\infty<t<\infty$。这给出

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{T}\int_0^T\eta_{\alpha\epsilon}^*(t)dt=0,$$

它与前面一不等式矛盾. 这矛盾证明我们的断语.

既然 $C^{\#}$ 不包含在 $V_F^{\#}$ 内, 则因 $C^{\#}$ 是 $L_k^{\#}$ 中一切对 $\phi_t^{\#}(-\infty < t < \infty)$ 来说的正则点(即既可通又密集的点)作成的集合的闭包(见 [1, 第六章, 定理 28]), 且因 $V_F^{\#}$ 是 $L^{\#}$ 的闭子集, 故存在正则点 $\in V_F$. 由是, 因 V_F 是 $L^{\#}$ 中在 $\phi_t^{\#}(-\infty < t < \infty)$ 下不变的开子集, 易见 $L^{\#}$ 上有在 $\phi_t^{\#}(-\infty < t < \infty)$ 下不变且可通的正规测度 μ 使 $\mu(V_F) = 1$. 这证明引理在 $k = k_+^*(F)$ 情况下成立.

其次, 设 $k = k_-^*(F)$. 则存在一 $\alpha \in V_F(\subset \mathscr{L}_k^{\#})$ 使得对某一 $\varepsilon > 0$,

$$\overline{\lim_{T\to-\infty}} \frac{1}{T}\int_0^T \eta_{\alpha\varepsilon}^*(t)dt > 0.$$

论证进行的其余部分与前面平行, 只须在这时考虑关于 $L_k^{\#}$ 上的变换群 $\phi_t^{\#}(-\infty < t < \infty)$ 的负向极小吸引中心及负向正则点等等. 由是引理仍成立.

现在, 我们来证明定理 4.2. 首先由前述引理, 我们可在紧致的可度量空间 $L_k^{\#}$ 上任取定一个在 $\phi_t^{\#}(-\infty < t < \infty)$ 下不变及可通的正规测度 μ 使 $\mu(V_F) = 1$ (亦即使 $\mu(V_F^{\#}) = \mu(L_k^{\#} - V_F) = 0$). 命 $P^{\#}$ 为一切具有下述性质的 $\alpha \in V_F$ 作成的集合, 即对 $L_k^{\#}$ 上任一连续实函数 $f(\beta)$ 我们有极限

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(\phi_t^{\#}(\alpha))dt$$

$$= \lim_{T\to-\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(\phi_t^{\#}(\alpha))dt = \int_{L_k^{\#}} f(\beta)d\mu. \qquad (4.6)$$

则据 (3.2) 等, 易见 $P^{\#}$ 是 V_F 中的 μ-可测子集且 $\mu(P^{\#}) = 1$.

对任一 j, $j = 1, 2, 3, \cdots$, 命

$$V_j = \left\{\alpha \in L_k^{\#} | \nu(\alpha) > \frac{1}{j}\right\}, \quad W_j = \left\{\alpha \in L_k^{\#} | \nu(\alpha) \geqslant \frac{1}{j}\right\}.$$

显然, $V_1 \subset W_1 \subset \cdots \subset V_j \subset W_j \subset V_{j+1} \subset \cdots$. 因 $\nu(\beta)$ 对 $\beta \in L_k^{\#}$ 是连续的, 这些 V_j 及 W_j 分别是 $L_k^{\#}$ 中的开子集及闭子集. 又因

$$V_F = \{\alpha \in L_\xi^\# \mid \nu(\alpha) > 0\},$$

我们有

$$V_F = \bigcup_{j=1,2,3,\cdots} W_j,$$

这给出

$$\lim_{j\to\infty} \mu(W_j) = \mu(V_F) = 1. \qquad (4.7)$$

对每个 j, W_j 及 $L_\xi^\# - V_{j+1}$ 是 $L_\xi^\#$ 中不相交的闭子集。据 Urysohn 引理,可取 $L_\xi^\#$ 上的连续实函数 $f_j(\beta)$ 使得对任一 $\beta \in L_\xi^\#$ 恒有 $0 \leqslant f_j(\beta) \leqslant 1$, 且 $f_j(\beta) = 1$ 当 $\beta \in W_j$, $f_j(\beta) = 0$ 当 $\beta \in L_\xi^\# - V_{j+1}$. 记 $\bar{f}_j(\beta)$ 为 W_j 在 $L_\xi^\#$ 上的特征函数,则显然有

$$\bar{f}_j(\beta) \leqslant f_j(\beta) \leqslant \bar{f}_{j+1}(\beta), \quad j = 1, 2, 3, \cdots$$

这结合 (4.6) 给出: 若 $\alpha \in P^\#$, 则

$$\begin{aligned}1 &\geqslant \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T}\int_0^T \eta^*_{\alpha\frac{1}{j+1}}(t)dt = \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T}\int_0^T \bar{f}_{j+1}(\phi_t^\#(\alpha))dt \\ &\geqslant \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T}\int_0^T f_j(\phi_t^\#(\alpha))dt = \int_{L_\xi^\#} f_j(\beta)d\mu \\ &\geqslant \int_{L_\xi^\#} \bar{f}_j(\beta)d\mu = \mu(W_j), \quad j = 1, 2, 3, \cdots.\end{aligned}$$

同样地,对任一 $\alpha \in P^\#$ 我们也有

$$1 \geqslant \overline{\lim_{T\to-\infty}} \frac{1}{T}\int_0^T \eta^*_{\alpha\frac{1}{j+1}}(t)dt \geqslant \mu(W_j), \quad j = 1, 2, 3, \cdots.$$

故据 (4.7), 对任一 $\alpha \in P^\#$ 定理 4.2 中的等式 (*) 成立。但 $\mu(P^\#) = 1$, 且 $\rho_\xi^\#: \mathscr{L}_\xi^\# \to M$ 是连续的并且 $\rho_\xi^\# \phi_t^\# = \phi_t^\# \rho_\xi^\#$ 对任一 $-\infty < t < \infty$, 故存在对 $\phi_t^\#(-\infty < t < \infty)$ 来说是 P 式稳定的 $\bar{a} \in P^\#$ (见 [1, 第六章,定理 10]),从而 $\rho_\xi^\#(\bar{a}) \in F$ 对于 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 来说也是 P 式稳定的。这证明定理 4.2-(ii)。于是 $k^*(F) \leqslant \mathrm{Min}\{k_+^*(F), k_-^*(F)\}$, 这给出定理 4.2-(i)。定理证完。

系 4.4 同定理 4.2 假设,命空间 $L_\xi^\# = V_F^\# \cup V_F$ 及其上单参数变换群 $\phi_t^\#(-\infty < t < \infty)$ 给出如前。设 μ 是 $L_\xi^\#$ 上一个在

$\phi_t^\#(-\infty < t < \infty)$ 下不变及可通的正规测度使得$\mu(V_P) = 1$。则一切使得定理 4.2 中的等式(*)成立的 $\alpha \in V_P$ 作成 $L_t^\#$ 中一个在 $\phi_t^\#(-\infty < t < \infty)$ 下不变的 μ-可测子集 $P_\mu^\#$，它具有 μ-测度 1。

事实上，据(4.5)易见 $P_\mu^\#$ 在 $\phi_t^\#(-\infty < t < \infty)$ 下不变，又前面定理证明中的集合 $P^\#$ 包含在 $P_\mu^\#$ 内。于是，因 $P^\#$ 是 μ-可测的且 $\mu(P^\#) = 1$，故 $P_\mu^\#$ 也是 μ-可测的且 $\mu(P_\mu^\#) = 1$。

下面命题中所叙述的将使我们较易于计算格数，这也就是要去判定相当的标架 $\alpha \in \mathscr{L}_l^\#$ 是否（对 $\phi_t^\#(-\infty < t < \infty)$ 来说）平均线性相关或无关。

命题 4.5 任给 $\alpha \in \mathscr{L}_l^\#$。则 α（对 $\phi_t^\#(-\infty < t < \infty)$来说）正向平均线性无关的充要条件是

$$I_+^*(\alpha) = \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T}\int_0^T \eta_\alpha^*(t)dt > 0;$$

同样地，α 负向平均线性无关的充要条件是

$$I_-^*(\alpha) = \overline{\lim_{T\to-\infty}} \frac{1}{T}\int_0^T \eta_\alpha^*(t)dt > 0.$$

证 我们只证命题结论中的前半，后半可类似地证。

充分性。设

$$\varepsilon = \frac{1}{2} I_+^*(\alpha) > 0.$$

欲证条件充分，只须证对这 ε，

$$I_+^*(\alpha, \varepsilon) = \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T}\int_0^T \eta_{\alpha\varepsilon}^*(t)dt > 0.$$

为此，命 $\bar{\eta}_{\alpha\varepsilon}(t)$ 为实数集 $\{t \in (-\infty, \infty) \mid \eta_\alpha^*(t) < \varepsilon\}$ 在$(-\infty, \infty)$上的特征函数。则有

$$\eta_\alpha^*(t) = \bar{\eta}_{\alpha\varepsilon}(t)\eta_\alpha^*(t) + \eta_{\alpha\varepsilon}^*(t)\eta_\alpha^*(t).$$

于是，因 $\eta_\alpha^*(t) \leqslant 1$，

$$I_+^*(\alpha) \leqslant \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T}\int_0^T \bar{\eta}_{\alpha\varepsilon}(t)\eta_\alpha^*(t)dt + \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T}\int_0^T \eta_{\alpha\varepsilon}^*(t)\eta_\alpha^*(t)dt$$

$$\leqslant \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon\eta_{\alpha\varepsilon}(t)dt + \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T}\int_0^T \eta^*_{\alpha\varepsilon}(t)dt$$

$$\leqslant \varepsilon + I^*_+(\alpha, \varepsilon) = \frac{1}{2} I^*_+(\alpha) + I^*_+(\alpha, \varepsilon).$$

故必有 $I^*_+(\alpha, \varepsilon) > 0$。

必要性. 设对于某一 $\varepsilon > 0$，有 $I_+(\alpha, \varepsilon) > 0$. 则据 $\eta^*_{\alpha\varepsilon}(t)$ 的定义以及 $0<\eta^*_\alpha(t) \leqslant 1$，有

$$I^*_+(\alpha) \geqslant \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T}\int_0^T \eta^*_\alpha(t)\eta^*_{\alpha\varepsilon}(t)dt \geqslant I^*_+(\alpha,\varepsilon) > 0.$$

这证明条件必要。

据这命题，则我们可取其中所述条件当作 $\alpha\in\mathscr{L}^\#_l$ 的平均线性无关的定义以代替以前所给的方式上稍许不同的定义. 但以前的定义对于证明定理 4.2 等来说用起来较方便的。

我们现在仍考虑前面给的空间 $L^\#_k = V^\#_F \cup V_F (k = k^*(F))$. 因对任一 $\beta\in V_F$ 恒有 $\nu(\beta) > 0$，故若 μ 是 $L^\#_k$ 上一个在 $\phi^\#_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变及可遍的正规测度如同系 4.4 假设中给，则有

$$\int_{L^\#_k} \nu(\beta)d\mu > 0.$$

系 4.6 同系 4.4 假设. 则一切使得有极限

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \eta^*_\alpha(t)dt = \lim_{T\to-\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \eta^*_\alpha(t)dt = \int_{L^\#_k} \nu(\beta)d\mu$$

的 $\alpha\in V_F$ 作成 $L^\#_k$ 中一个在 $\phi^\#_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变的 μ-可测子集 P'_μ，它具有 μ-测度 1。

证 事实上，因

$$\eta^*_\alpha(s+t) = \nu(\phi^\#_{s+t}(\alpha)) = \nu(\phi^\#_t(\phi^\#_s(\alpha))) = \eta^*_{\alpha'}(t),$$

其中 $\alpha' = \phi^\#_s(\alpha)$，易见 P'_μ 在 $\phi^\#_t(-\infty < t < \infty)$下不变. 明显地，定理 4.2 证明中的集合 $P^\#$ 包含在 P'_μ 内. 因 $P^\#$ 是 μ-可测的且 $\mu(P^\#) = 1$，故 P'_μ 也是 μ-可测的且 $\mu(P'_\mu) = 1$。

本节前面，我们对于 M^n 在其上对系统 S 来说的常点处探讨

了切向量所决定的方向的某类渐近性质，于其中，要求这些切向量与通过向量的始点处的积分线正交。这对于我们某些目的来说将会是较重要的。不难看出，我们的讨论在取消这要求的情况下仍可照另一方式来进行。这自然也将说明系统 S 在 M^* 的切空间丛上所导出的单参数变换群的一类性质。在下面，我们将简单地给出这讨论的要点。由于这进行的轨则与本节前面的类似，故把细节略去。

仍考虑以前给的以 M^* 为底空间的标架丛 $\mathscr{U}_l(1\leqslant l\leqslant n)$，及其上的单参数变换群 $\Phi_t(-\infty<t<\infty)$。命 $\mathscr{U}_l^{\#}$ 为 $\mathscr{U}_l$ 的子丛，它由一切使向量 $u_k(k=1,2,\cdots,l)$ 的长度为 1 的 $\alpha=(u_1,u_2,\cdots,u_l)\in\mathscr{U}_l$ 组成。记 $p_l^{\#}:\mathscr{U}_l^{\#}\to M^*$ 为这子丛的投射。在 $\mathscr{U}_l^{\#}$ 上有单参数变换群 $\Phi_t^{\#}(-\infty<t<\infty)$，它由正规化 $\Phi_t(\alpha)(\alpha\in\mathscr{U}_l^{\#})$ 中诸向量来定义，即

$$\Phi_t^{\#}(u_1,u_2,\cdots,u_l)=\left(\frac{\Phi_t(u_1)}{\|\Phi_t(u_1)\|},\right.$$

$$\left.\frac{\Phi_t(u_2)}{\|\Phi_t(u_2)\|},\cdots,\frac{\Phi_t(u_l)}{\|\Phi_t(u_l)\|}\right).$$

对任给的一 $\alpha\in\mathscr{U}_l^{\#}$，记

$$\eta_\alpha(t)=\nu(\Phi_t^{\#}(\alpha)).$$

如同前面，这里 $\eta_\alpha(t)$ 也是对 t 来说的连续函数；对任一 $-\infty<t<\infty$ 恒有 $0<\eta_\alpha(t)\leqslant 1$，并且若 $l=1$，则恒有 $\eta_\alpha(t)=1$。

设 $x\in M^*$。我们将记 $k_+(x)$ 为具有下述性质的整数 $1\leqslant l\leqslant n$ 中的最大整数，即存在 $\alpha\in(p_l^{\#})^{-1}(x)$ 及 $\varepsilon>0$ 使得，对于实数集

$$B_{\alpha\varepsilon}=\{t\in(-\infty,\infty)\,|\,\eta_\alpha(t)\geqslant\varepsilon\}$$

在 $(-\infty,\infty)$ 上的特征函数 $\eta_{\alpha\varepsilon}(t)$，不等式

$$I_+(\alpha,\varepsilon)=\varlimsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\eta_{\alpha\varepsilon}(t)dt>0$$

成立。同样地，记 $k_-(x)$ 为具有下述性质的整数 $1\leqslant l\leqslant n$ 中的最大的一个，即存在 $\alpha\in(p_l^{\#})^{-1}(x)$ 及 $\varepsilon>0$ 使得

$$l_-(\alpha, \varepsilon) = \overline{\lim_{T\to-\infty}} \frac{1}{T}\int_0^T \eta_{\alpha\varepsilon}(t)dt > 0.$$

设 F 为 M^* 中一非空的子集。记

$$k_+(x) = \operatorname*{Max}_{x\in F}\{k_+(x)\},\ k_-(x) = \operatorname*{Max}_{x\in F}\{k_-(x)\},$$

$$k(F) = \operatorname{Max}\{k_+(F), k_-(F)\}.$$

对于定理 4.2，系 4.4 及命题 4.5，系 4.6 等，我们在这里有类似的叙述；较主要地，我们有

定理 4.7 设 F 为 M^* 中在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变的非空的闭子集。则

(i) $k_+(F) = k_-(F)$,

(ii) 存在 $\alpha \in (p_k^\#)^{-1}(F)(\subset \mathscr{U}_k^\#)$ 使得 $p_k^\#(\alpha)$ 对 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 来说是 P 式稳定的，且

$$\lim_{\varepsilon\to+0} l_+(\alpha, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to+0} l_-(\alpha, \varepsilon) = 1,$$

其中 k 表 $k_+(F)$.

这可用与定理 4.2 证明相类似的方式来证。

§5. 关于格数的判定方式

设 $1 \leqslant l \leqslant n-1$. 对任一标架 $\alpha \in \mathscr{L}_l$，简记

$$\xi^*_{\alpha k}(t) = \|\theta_k\phi_t(\alpha)\|,\ k = 1, 2, \cdots, l,$$

其中 θ_k 是自然映射：$\mathscr{U}_l \to \mathscr{C}$（见 §2）。显然这些 $\xi^*_{\alpha k}(t)$ 是 $(-\infty, \infty)$ 上的连续函数，且恒有 $\xi^*_{\alpha k}(t) > 0$（因 $\theta_k\phi_t(\alpha) \neq 0$）。对任一正交的标架 $\in \mathscr{L}_l$，记

$$\zeta^*_{\alpha k}(t) = \|\theta_k\pi(\phi_t(\alpha))\|, k = 1, 2, \cdots, l,$$

其中 π 是映射：$\mathscr{U}_l \to \mathscr{F}_l$，见 §1。这些 $\zeta^*_{\alpha k}(t)$ 也是 $(-\infty, \infty)$ 上的连续函数，恒 >0；且当 $t = 0$ 时，$\zeta^*_{\alpha k}(0) = \|\theta_k(\alpha)\|$.

设 α 是一正交的标架 $\in \mathscr{L}_l$. 则

$$v(\phi_t(\alpha)) = \zeta^*_{\alpha 1}(t)\cdot\zeta^*_{\alpha 2}(t)\cdots\zeta^*_{\alpha l}(t). \tag{5.1}$$

这易从 (4.1) 得出。

对任一 $\alpha \in \mathscr{L}_l^\#$，我们有

$$\eta_\alpha^*(t) = \frac{\nu(\phi_t(\alpha))}{\xi_{\alpha 1}^*(t)\cdot\xi_{\alpha 2}^*(t)\cdots\xi_{\alpha l}^*(t)}. \tag{5.2}$$

事实上，这易从

$$\phi_t^\#(\alpha) = \left(\frac{\theta_1\phi_t(\alpha)}{\|\theta_1\phi_t(\alpha)\|},\right.$$

$$\left.\frac{\theta_2\phi_t(\alpha)}{\|\theta_2\phi_t(\alpha)\|},\cdots,\frac{\theta_l\phi_t(\alpha)}{\|\theta_l\phi_t(\alpha)\|}\right)$$

及函数 $\nu(\beta)$ 的定义等推出。

命题 5.1 设 $\alpha\in\mathscr{L}_l$。对任给的一 $-\infty<s<\infty$，简记

$$\alpha(s) = \left(\frac{\theta_1\pi\phi_s(\alpha)}{\|\theta_1\pi\phi_s(\alpha)\|},\frac{\theta_2\pi\phi_s(\alpha)}{\|\theta_2\pi\phi_s(\alpha)\|},\cdots,\frac{\theta_l\pi\phi_s(\alpha)}{\|\theta_l\pi\phi_s(\alpha)\|}\right)\in\mathscr{F}_l^\#,$$

$$\alpha[s] = \left(\frac{\theta_1\phi_s(\alpha)}{\|\theta_1\phi_s(\alpha)\|},\frac{\theta_2\phi_s(\alpha)}{\|\theta_2\phi_s(\alpha)\|},\cdots,\frac{\theta_l\phi_s(\alpha)}{\|\theta_l\phi_s(\alpha)\|}\right)\in\mathscr{L}_l^\#.$$

则对任一 $-\infty<t<\infty$，我们有

$$\nu(\phi_{s+t}(\alpha)) = \nu(\phi_s(\alpha))\cdot\nu(\phi_t(\alpha(s))),$$

$$\xi_{\alpha k}^*(s+t) = \xi_{\alpha k}^*(s)\cdot\xi_{\alpha[s]k}^*(t),\quad k=1,2,\cdots,l.$$

证 事实上，$\alpha(s)$ 是一正规的 l-标架，且显然有 $\phi_s(\alpha)=\alpha(s)\cdot A$,其中 A 是某一 l 阶方阵。故 $\nu(\phi_s(\alpha))=|\det.A|$。又据 (4.4) 等有

$$\begin{aligned}\nu(\phi_{t+s}(\alpha)) &= \nu(\phi_t(\phi_s(\alpha))) = \nu(\phi_t(\alpha(s)\cdot A))\\ &= \nu(\phi_t(\alpha(r)))\cdot|\det.A|.\end{aligned}$$

这给出的欲证的等式中的前一个。其次，显然有

$$\theta_k\phi_s(\alpha) = r_k\theta_k(\alpha[s]),$$

其中

$$r_k = \xi_{\alpha k}^*(s) = \|\theta_k\phi_s(\alpha)\|.$$

这结合 (4.4) 给出

$$\theta_k\phi_{t+s}(\alpha) = \theta_k\phi_t(\phi_s(\alpha)) = r_k\theta_k(\phi_t(\alpha[s]),$$

从而欲证的第二个等式成立。命题 5.1 证完。

我们将指出上述的函数 $\xi_{\alpha k}^*(t)$ 及 $\zeta_{\alpha k}^*(t)$ 与 § 3 中的对于某些 $\alpha'\in\mathscr{F}_{l'}$ 的函数 $\zeta_{\alpha' k}(t)$ 的关系。对任一 $\alpha=(u_1,u_2,\cdots,$

$u_l) \in \mathscr{L}_l$，命

$$\bar{f}(\alpha) = (S(\rho_l(\alpha)), u_1, u_2, \cdots, u_l) \in \mathscr{U}_{l+1}$$

（其中 ρ_l 是丛投射：$\mathscr{L}_l \to M$，见 § 4）及

$$g(\alpha) = (S(\rho_l(\alpha))/\|S(\rho_l(\alpha))\|, u_1, u_2, \cdots, u_l).$$

易见这些式子给出（连续的）映射

$$\bar{f}, g: \mathscr{L}_l \to \mathscr{U}_{l+1}. \tag{5.3}$$

若 $l = 1$，则因 u_1 与 $S(\rho_l(\alpha))$正交，我们有 $\bar{f}(\alpha) \in \mathscr{F}_2$。若 α 是正交的标架 $\in \mathscr{L}_1$，则 $\bar{f}(\alpha)$ 是正交的标架 $\in \mathscr{F}_{l+1}$；若 α 是正规的，则 $g(\alpha)$ 也是正规的。

我们说，对任一 $\alpha \in \mathscr{L}_l$，

$$\xi^*_{\alpha k}(t) = \zeta_{\alpha_k 2}(t)，\text{其中 } \alpha_k = g(\theta_k(\alpha)) \in \mathscr{F}_2. \tag{5.4}$$

事实上，命 $\alpha = (u_1, u_2, \cdots, u_l), x = \rho_l(\alpha)$，据 (4.2) 有

$$\phi_t(\alpha) = (\phi_t(u_1), \phi_t(u_2), \cdots, \phi_t(u_l)),$$

其中 $\phi_t(u_k) \in \mathscr{L}$；据 $\mathscr{L}$ 上变换 ϕ_t 的定义，

$$\phi_t(u_k) = \theta_2\chi_t(S(x), u_k) = \theta_2\chi_t(\alpha_k).$$

这给出 (5.4)。其次，我们说对任一正交的标架 $\in \mathscr{L}_l$，

$$\zeta^*_{\alpha k}(t) = \zeta_{g(\alpha), k+1}(t). \tag{5.5}$$

事实上，命

$$\alpha = (u_1, u_2, \cdots, u_l), u = S(\rho_l(\alpha)).$$

对任给的一 $-\infty < t < \infty$，简记

$$\alpha' = \phi_t(\alpha) = (\phi_t(u_1), \phi_t(u_2), \cdots, \phi_t(u_l)).$$

从 (4.3) 及 (1.1) 易看出

$$S(\rho_l(\alpha')) = \Phi_t(u)$$

及

$$\bar{f}(\alpha') = (\Phi_t(u), \Phi_t(u_1), \cdots, \Phi_t(u_l)) \cdot A = \Phi_t(\bar{f}(\alpha)) \cdot A,$$

其中 A 为某一个三角式的方阵，其对角线元素都是 1，对角线下面的元素都是 0。由是据 (1.5) 有

$$\begin{aligned}\pi(\bar{f}(\alpha')) &= \bar{f}(\alpha') \cdot \Gamma(\bar{f}(\alpha')) = \Phi_t(\bar{f}(\alpha)) \cdot A\Gamma(\bar{f}(\alpha')) \\ &= \Phi_t(\bar{f}(\alpha)) \cdot \Gamma(\Phi_t(\bar{f}(\alpha)) \\ &= \pi(\Phi_t(\bar{f}(\alpha)) \in \mathscr{F}_{l+1}.\end{aligned}$$

但 α' 中诸向量 $\phi_t(u_k)$ 都与 $\Phi_t(u)$ 正交，从而

$$\Gamma(\bar{f}(\alpha')) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Gamma(\alpha') \end{pmatrix}.$$

故 $\pi(\bar{f}(\alpha')) = \bar{f}(\pi(\alpha'))$。因此，

$$\bar{f}\pi(\alpha') = \pi(\Phi_t(\bar{f}(\alpha))) = \chi_t(\bar{f}(\alpha)),$$

而

$$\theta_k\pi(\alpha') = \theta_{k+1}\chi_t(\bar{f}(\alpha)), \quad k = 1, 2, \cdots, l.$$

但据 (1.6) 有

$$\theta_{k+1}\chi_t(\bar{f}(\alpha)) = \theta_{k+1}\chi_t(\bar{g}(\alpha)), \quad k = 1, 2, \cdots, l.$$

这给出 (5.5)。

定理 5.2[1)] 任给 $\alpha \in \mathscr{L}_l^{\#}(1 \leqslant l \leqslant n-1)$，并任设一序列

$$0 < T_1 < T_2 < T_3 < \cdots,$$

它作成半线 $(0, \infty)$ 上一相对稠密数集。则 α [对 $\psi_t^{\#}(-\infty < t < \infty)$ 来说] 正向平均线性相关的一个充分条件是存在极限

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{T_m} \sum_{i=1}^{m} \eta_\alpha^*(T_i) = 0.$$

进一步，若再设

$$\Delta = \inf_{i=1,2,3,\cdots} \{T_{i+1} - T_i\} > 0,$$

则这条件也是必要的。

证 据命题 4.5，这里 α 正向平均线性相关的充要条件是

$$l_+^*(\alpha) = \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} \int_0^T \eta_\alpha^*(t)dt = 0.$$

为证明这定理，我们将考虑这式子中的积分。首先，我们有

$$\int_0^T \eta_\alpha^*(t)dt = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{T_i}^{T_{i+1}} \eta_\alpha^*(t)dt + \int_{T_m}^{T} \eta_\alpha^*(t)dt \qquad (5.6)$$

对任意的 $m \geqslant 1$ 及 $T_m \leqslant T \leqslant T_{m+1}$，

1）为了简单，我们只对正向平均线性相关一情况考虑这样一个定理；在负向情况下，我们不难给出与这定理相当的一叙述。又对于§4末所述的一情况，我们也有与此相似的一个定理；它的证明方式也可仿照这里的来进行。

其中 T_0 表 0. 对任一 $i, i = 0, 1, 2, 3, \cdots$, 我们将考虑函数

$$R_{\alpha i}(t) = \frac{\nu(\phi_t(\alpha(T_i)))}{\xi^*_{\alpha[T_i]1}(t)\cdot\xi^*_{\alpha[T_i]2}(t)\cdots\xi^*_{\alpha[T_i]l}(t)}.$$

于是,据命题 5.1 及(5.2)易见

$$\eta^*_\alpha(T_i + t) = \eta^*_\alpha(T_i)R_{\alpha_i}(t).$$

用这等式,则(5.6)式成为

$$\int_0^T \eta^*_\alpha(t)dt = \sum_{i=0}^{m-1} \eta^*_\alpha(T_i)\int_0^{T_{i+1}-T_i} R_{\alpha i}(t)dt$$

$$+ \eta^*_\alpha(T_m)\int_0^{T-T_m} R_{\alpha_m}(t)dt,\ T_m \leqslant T \leqslant T_{m+1}. \quad (5.7)$$

下面,我们将证明函数 $R_{\alpha i}(t)$ 在区间 $0 \leqslant t \leqslant T_{i+1} - T_i$ 上对 $i = 0, 1, 2, 3, \cdots$ 来说一致有下界 $R > 0$ 且一致有上界 $R' < \infty$. 事实上,考虑 Descartes 积 $\mathscr{F}' = \mathscr{F}^{\#}_{l+1} \times (-\infty, \infty)$. 在 $\mathscr{F}_{l+1}(\supset\mathscr{F}^{\#}_{l+1})$ 上,因 $\chi_t(-\infty < t < \infty)$ 是单参数变换群,故由式子 $\chi'(\beta, t) = \chi_t(\beta), (\beta, t) \in \mathscr{F}'$, 给出一(连续的)映射 χ': $\mathscr{F}' \to \mathscr{F}_{l+1}$. 同样地,考虑Descartes 积 $\mathscr{F}'' = \mathscr{F}^{\#}_2 \times (-\infty, \infty)$ 及其上由式子 $\chi''(\gamma, t) = \chi_t(\gamma) \in \mathscr{F}_2$, $(\gamma, t) \in \mathscr{F}''$, 给出的映射 $\chi'': \mathscr{F}'' \to \mathscr{F}_2$. 命

$$\zeta'_k(\beta, t) = \|\theta_{k+1}\chi'(\beta, t)\| = \zeta_{\beta, k+1}(t),$$

$$(\beta, t) \in \mathscr{F}',\ k = 1, 2, \cdots, l;$$

$$\zeta''(\gamma, t) = \|\theta_2\chi''(\gamma, t)\| = \zeta_{\gamma 2}(t),\ (\gamma, t) \in \mathscr{F}''.$$

则 $\zeta'_k(\beta, t)$ 及 $\zeta''(\gamma, t)$ 分别是 $\mathscr{F}'$ 及 $\mathscr{F}''$ 上的连续函数,且它们的函数值都恒 >0. 据假设,序列 $0 < T_1 < T_2 < T_3 < \cdots$ 作成半线 $(0, \infty)$ 上一相对稠密数集;这蕴涵

$$\Delta' = \sup_{i=0,1,2,3,\cdots}\{T_{i+1} - T_i\} < \infty$$

(见[1, 第五章, § 7]). 记

$$W' = \mathscr{F}^{\#}_{l+1} \times \langle 0, \Delta'\rangle \subset \mathscr{F}',$$

$$W'' = \mathscr{F}^{\#}_2 \times \langle 0, \Delta'\rangle \subset \mathscr{F}''.$$

则因 $\mathscr{F}^{\#}_{l+1}$ 及 $\mathscr{F}^{\#}_2$ 都是紧致的(见 § 3), W' 及 W'' 分别是

$\mathscr{F}'$ 及 $\mathscr{F}''$ 中的紧致子集。故若命

$$a_k = \operatorname*{Min}_{(\beta,t)\in W'}\{\zeta'_k(\beta,t)\},\quad a'_k = \operatorname*{Max}_{(\beta,t)\in W'}\{\zeta'_k(\beta,t)\},$$

$$k = 1, 2, \cdots, l;$$

$$b = \operatorname*{Min}_{(\gamma,t)\in W''}\{\zeta''(\gamma,t)\},\quad b' = \operatorname*{Max}_{(\gamma,t)\in W''}\{\zeta''(\gamma,t)\},$$

则从函数 $\zeta'_k(\beta,t)$ 的连续性等，易见

$$0 < a_k \leqslant a'_k < \infty;\ 0 < b \leqslant b' < \infty.$$

我们于是置

$$R = \frac{a_1a_2\cdots a_l}{(b')^l},\quad R' = \frac{a'_1a'_2\cdots a'_l}{(b)^l}.$$

显然，

$$0 < R \leqslant R' < \infty.$$

我们说

$$R \leqslant R_i(t) \leqslant R' \text{ 对任意的 } 0 \leqslant t \leqslant T_{i+1} - T_i$$

$$\text{及 } i = 0, 1, 2, 3, \cdots. \tag{5.8}$$

但这现在是明显的，因为 $\alpha(T_i)$是一正规的标架 $\in \mathscr{F}^{\#}_l \cap \mathscr{L}_l$ 且 $\langle 0, T_{i+1} - T_i\rangle \subset \langle 0, \Delta'\rangle$。故据 (5.1) 及 (5.5) 有

$$a_1a_2\cdots a_l \leqslant v(\phi_t(\alpha(T_i))) = \zeta^*_{\alpha(T_i)1}(t)\cdot\zeta^*_{\alpha(T_i)2}(t)\cdots\zeta^*_{\alpha(T_i)l}(t)$$

$$= \zeta_{g(\alpha(T_i))2}(t)\cdot\zeta_{g(\alpha(T_i))3}(t)\cdots\zeta_{g(\alpha(T_i)),l+1}(t) \leqslant a'_1a'_2\cdots a'_l.$$

类似地有

$$(b)^l \leqslant \xi^*_{\alpha(T_i)1}(t)\cdot\xi^*_{\alpha(T_i)2}(t)\cdots\xi^*_{\alpha(T_i)l}(t) \leqslant (b')^l.$$

由是 (5.8) 成立。

结合 (5.7) 及 (5.8) 我们有

$$R\left(\sum_{i=0}^{m-1}(T_{i+1} - T_i)\eta^*_\alpha(T_i)\right)$$

$$\leqslant \int_0^T \eta^*_\alpha(t)dt \leqslant R'\left(\sum_{i=0}^{m}(T_{i+1} - T_i)\eta^*_\alpha(T_i)\right),$$

$$\text{对任意的 } m \geqslant 1 \text{ 及 } T_m \leqslant T \leqslant T_{m+1}.$$

于是，直接计算就得

$$\Delta R\,\frac{1}{T_{m+1}}\left(\sum_{i=0}^{m+1}\eta^*_\alpha(T_i)\right) - \Delta R\,\frac{1}{T_{m+1}}(\eta^*_\alpha(T_m) + \eta^*_\alpha(T_{m+1}))$$

$$\leqslant \frac{1}{T}\int_0^T \eta_\alpha^*(t)dt \leqslant \Delta' R' \frac{1}{T_m}\left(\sum_{i=0}^{m} \eta_\alpha^*(T_i)\right) \quad (T_m \leqslant T \leqslant T_{m+1}). \tag{5.9}$$

但 $0<\eta_\alpha^*(t)\leqslant 1$；并且序列 $0<T_1<T_2<T_3<\cdots$ 作成 (θ,∞) 上一相对稠密数集，这(不但蕴涵 $\Delta'<\infty$ 且)蕴涵当 $m\to\infty$ 时，$T_m\to\infty$。从这些以及(5.9)易验证

$$0\leqslant \Delta R \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{T_m}\left(\sum_{i=0}^{m} \eta_\alpha^*(T_i)\right) \leqslant \varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \eta_\alpha^*(t)dt$$

$$\leqslant \Delta' R' \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{T_m}\left(\sum_{i=1}^{m} \eta_\alpha^*(T_i)\right).$$

从而定理(5.2)成立。

一序列 $0<T_1<T_2<T_3<\cdots$ 作成半线(θ,∞)上一相对稠密数集使

$$\inf_{i=1,2,3,\cdots} \{T_{i+1}-T_i\}>0$$

的一个简单例子是对于一给定的实数 $T'>0$ 来说的序列

$$0<T'<2T'<3T'<\cdots.$$

系 5.3 任给一 $\alpha\in\mathscr{L}_l^\#$ 及一实数 $T'>0$。若有

$$\lim_{m\to\infty}\eta_\alpha^*(mT')=0,$$

则 α 是正向平均线性相关的。

事实上，若对任给的一 $\varepsilon>0$，存在一 m_ε 使得只要 $m>m_\varepsilon$，即有 $\eta_\alpha^*(mT')<\varepsilon$，则

$$\varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{mT'}\sum_{i=1}^{m}\eta_\alpha^*(iT') \leqslant \lim_{m\to\infty}\frac{1}{mT'}\sum_{i=1}^{m_\varepsilon}\eta_\alpha^*(iT')$$

$$+\varlimsup_{m\to\infty}\frac{1}{mT'}\sum_{i=m_\varepsilon+1}^{m}\eta_\alpha^*(iT')\leqslant\frac{\varepsilon}{T'}.$$

于是，据定理 5.2 易见系 5.3 成立。证完。

因对任一非空的 $F\subset M(\subset M^n)$，恒有 $1\leqslant k^*(F)\leqslant n-1$，

故当 $n=2$ 时，F 恒有格数 $=n-1$。但对一般 n，F 可能有退化的格数(即 $k^*(F)<n-1$)。当 $n=3$ 时，一个在某一 M^3 中由常点组成的，具有退化格数的非空不变闭子集 F 的简单例子可作出如下。在这例子中，F 可以是一个异于周期解的极小集合。

例 在 $(-\infty,\infty)$ 上任取一 C^∞ 型可微的实函数 $\tilde{P}(x)$，并设 $\tilde{P}(x)=0$ 对一切的 $x\leqslant\frac{1}{2}$ 及 $x\geqslant\frac{3}{2}$。命

$$\left.\frac{d\tilde{P}}{dx}\right|_{x=1}=b\neq 0.$$

在欧氏平面 E^2 上可作一拓扑变换

$$P':E^2\to E^2$$

如下。用 $z=[r,\tau]$ 表示 E^2 中的点 z 的极坐标。于是，P' 在极坐标系下由式子 $P'[r,\tau]=[r,\tau+\tilde{P}(r)]$ 给出。这是一 C^∞ 型可微的拓扑变换。由于当 $x\geqslant\frac{3}{2}$ 时，$\tilde{P}(x)=0$，P' 可扩充至 2 维球 $S^2=E^2\cup(\infty)$ 上一 C^∞ 型可微的(在上)拓扑变换

$$g:S^2\to S^2$$

(使 $g(\infty)=\infty$)。S^2 中的圆 $K:r=1$ 显然在变换 g 下不变。任取定 S^2 上一 C^∞ 型 Riemann 度量使得它限制在 E^2 中一个包含 K 的开子集上时与原来的欧氏度量一致。对任一 $z\in k$，命 u_z 及 u'_z 分别为 K 在 E^2 内具有单位长的(逆时针方向的)切向量及(外向的)法向量，从 g 的定义易验证

$$dg(u_z)=u_{g(z)},\quad dg(u'_z)=bu_{g(z)}+u'_{g(z)}$$

(其中 dg 表 g 的微分)。简记 $\alpha_z=(u_z,u'_z)$。

S^2 上在一点 $z\in k$ 处任给的一线性无关的切向量组 $\gamma_z=(w_z,w'_z)$ 可简单地表成 $\gamma_z=\alpha_z C$，其中 C 是一非奇异的 2 阶方阵，并记 $dg(\gamma_z)=(dg(w_z),dg(w'_z))$。特别地，我们有

$$dg(\alpha_z)=\alpha_{g(z)}B,\ \text{其中}\ B=\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

于是，

$$\left.\begin{aligned}&dg(\gamma_z) = dg(\alpha_z)C = \alpha_{g(z)}BC,\\&dg^m(\gamma_z) = dg(dg^{m-1}(\gamma_z)) = \alpha_{g^m(z)}B^mC,\\&\qquad m = 2, 3, 4, \cdots.\end{aligned}\right\} \tag{5.10}$$

故若命

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_1' \\ c_2 & c_2' \end{pmatrix},$$

则有

$$dg^m(\gamma_z) = (w_{zm}, w_{zm}'), \tag{5.11}$$

其中

$$w_{zm} = (c_1 + mbc_2)u_{g^m(z)} + c_2 u'_{g^m(z)},$$
$$w'_{zm} = (c_1' + mbc_2')u_{g^m(z)} + c_2' u'_{g^m(z)}.$$

我们现在考虑 Descartes 积 $\bar{N}^3 = S^2 \times (-\infty, \infty)$ 上由式子

$$\phi'(z,t) = (g^{-1}(z), t + 1)$$

定义的 C^∞ 型可微的拓扑变换 $\phi': \bar{N}^3 \to \bar{N}^3$，并考虑商空间

$$\bar{M}^3 = \bar{N}^3/\phi'.$$

对任给的一 $(z,t) \in \bar{N}^3$，集合 $\{\phi'^m(z,t) \in \bar{N}^3 | m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\}$ 恰作成 $\bar{M}^3$ 中一点。$\bar{M}^3$ 是一紧致的 3 维 C^∞ 型微分流形。命 $\phi: \bar{N}^3 \to \bar{M}^3$ 为自然映射。对任一 $z \in S^2$，等同 z 与 $\phi(z,0) \in \bar{M}^3$，则 S^2 实现在 $\bar{M}^3$ 内作为其子微分流形。明显地，对任意的 $x = \phi(z,t') \in \bar{M}^3$ 及 $-\infty < t < \infty$，式子

$$\phi_t(x) = \phi(z, t + t')$$

给出 $\bar{M}^3$ 上一 C^∞ 型可微的单参数变换群 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$，从而 $\bar{M}^3$ 上有一 C^∞ 型常微系统 S，它产生这变换群。这系统 S 显然没有奇点。我们易取 $\bar{M}^3$ 上一 C^∞ 型 Riemann 度量使得它限制在 S^2 上时与 S^2 上原给的 Riemann 度量一致且使得 S^2 到处与 S 的积分线正交。

现在，任设 $z \in K$。我们说

$$k_+^*(z) < 2. \tag{5.12}$$

事实上，欲证此，据系 5.3 只须证

$$\lim_{m\to\infty} \eta^*_{\gamma_z}(m) = 0,$$

其中 $\gamma_z=(w_z, w'_z)$ 是 S^2 在 z 处任意的一线性无关的切向量组使 $\|w_z\|=\|w'_z\|=1$. 用前述的记号并据(5.2), (5.10) 及 (5.11) 易见

$$\eta^*_{\gamma_z}(m)=\frac{\nu(dg^m(\gamma_z))}{\|w_{zm}\|\cdot\|w'_{zm}\|}=\frac{\nu(\alpha_{g^m(z)})|\det.B^mC|}{\|w_{zm}\|\cdot\|w'_{zm}\|}.$$

但 $\det B=1$, 且 $\alpha_{g^m(z)}$ 是 $\bar{M}^3$ 在 $g^m(z)$ 处的一正规标架,由是也有 $\nu(\alpha_{g^m}(z))=1$. 从而

$$\eta^*_{\gamma_z}(m)=\frac{|\det.C|}{\|w_{zm}\|\cdot\|w'_{zm}\|}.$$

因 C 是一非奇异的方阵,故 c_2 及 c'_2 中至少有一个 $\neq 0$, 这结合 $b\neq 0$ 等蕴涵这两个式子

$$\lim_{m\to\infty}\|w_{zm}\|=\infty,\quad \lim_{m\to\infty}\|w'_{zm}\|=\infty$$

中至少有一个成立; 并且 若 $c_2=0$, 则 $\|w_{zm}\|=|c_1|\neq 0$; 若 $c'_2=0$,则 $\|w'_{zm}\|=|c'_1|\neq 0$, $m=1,2,3,\cdots$. 从这些,易看出 (5.12) 成立.

命 $\tilde{P}(1)=a\pi$. 若 a 是一无理数, 则系统 S 过任一 $z\in K$ 的积分线的闭包是一异于周期解(及奇点)的极小集合,它与 S^2 的交集恰是圆 K, 它具有退化的格数. 若 a 是一有理数, 则过任一 $z\in K$ 处的积分线是一周期解,它也具有退化的格数.

从上述例子出发我们容易作出, 在 $n>3$ 的情况下具有退化的格数的异于周期解及奇点的极小集合的例子.事实上,设 $N^{n'}$ 是一紧致的 n' 维 C^∞ 型 Riemann 流形, $n'\geq 1$. 则

$$L^{n+n'}=M^n\times N^{n'}$$

是一紧致的 $n+n'$ 维 C^∞ 型微分流形, M^n 及 $N^{n'}$ 上的 Riemann 度量自然地给出 $L^{n+n'}$ 上一 Riemann 度量、对于 M^n 上一 C^1 型常微系统 S, 我们可在 $L^{n+n'}$ 上作一 C^1 型常微系统 S' 使得, 对任一 $(x,y)\in L^{n+n'}$, 向量 $S'(x,y)$ 在因子空间 M^n 及 $N^{n'}$ 上的分量分别是 $S(x)$ 及 0.

任给一 $y_0\in N^{n'}$. 命 $\Theta: M^n\to L^{n+n'}$ 为由 $\Theta(x)=(x, y_0)$ 定义的在中拓扑映射. 设 F 是 M^n 中一个在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$

下不变且不包含奇点的非空的闭子集，易见 $\Theta(F)$ 也是 $L^{n+n'}$ 中（对 S' 来说的）不变且不包含奇点的非空的闭子集。若 F 是周期解，则 $\Theta(F)$ 也是周期解；若 F 是异于周期解的极小集合，则 $\Theta(F)$ 也是这样一个集合，并且若 $k^*(F) < n-1$，则

$$k^*(\Theta(F)) < n + n' - 1.$$

§6. 某类函数的比较

本节中，我们考虑一紧致的可度量空间 X 及其上一单参数变换群 $\varphi_t(-\infty < t < \infty)$。命 l 为任一给定的整数 $\geqslant 1$。设对于每一 $x \in X$，联系了 l 个在 $(-\infty, \infty)$ 上的连续实函数

$$h_{x1}(t), h_{x2}(t), \cdots, h_{xl}(t),$$

它们都是正函数（即，对任一 $-\infty < t < \infty$，恒有 $h_{xk}(t) > 0$），且它们具有下述性质（i*）及（ii*），即对于 $k = 1, 2, \cdots, l$，

（i*）$h_k(x,t) = h_{xk}(t)$ 是 Descartes 积 $X \times (-\infty, \infty)$ 上的连续函数。

（ii*）对任意的 $x \in X$，$-\infty < s < \infty$ 及 $-\infty < t < \infty$，我们有

$$h_{\varphi_s(x)k}(t) = \frac{h_{xk}(s+t)}{h_{xk}(s)}.$$

于此，我们顺便指出（ii*）的一简单推论，即

（ii'）　　　　$h_{xk}(0)$ 恒 $= 1$

（对任一 $x \in X$）。事实上，$\varphi_0(x) = x$；在（ii*）中置 $s = t = 0$ 即得出（ii'）。

在对于上面这些函数进一步进行讨论之前，我们先说明一下与以前诸节目下有直接关连的一些函数：

在§§2,3中，我们讨论过对于每一 $\alpha \in \mathscr{F}_l^\#$ 的连续正实函数

$$\zeta_{\alpha k}(t) = \|\theta_k \chi_t(\alpha)\|, \quad k = 1, 2, \cdots, l,$$

其中 $1 \leqslant l \leqslant n$。这 $\mathscr{F}_l^\#$ 是紧致的可度量空间。这些函数适合这里的性质（i*）。据（3.3），它们对于 $\mathscr{F}_l^\#$ 上的变换群 $\chi_t^\#(-\infty < t < \infty)$ 来说也适合这里的性质（ii*）。

其次，设 F 为 M^* 中一个在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变，不包含奇点的非空的闭子集．命 κ 为 F 的格数 $(1\leqslant\kappa\leqslant n-1)$．命空间 $L_\kappa^\#$ 给出如同 § 4 中；这是一紧致的可度量空间．对每一 $\alpha=(u_1,u_2,\cdots,u_\kappa)\in L_\kappa^\#$，我们可定义 $(-\infty,\infty)$ 上的连续正实函数

$$\xi_{\alpha k}^*(t)=\|\phi_t(u_k)\|,\quad k=1,2,\cdots,\kappa,$$

这里 ϕ_t 是 $\mathscr{L}$ 上的变换(§4)．这些函数适合这里的性质(i*)．它们对 $L_\kappa^\#$ 上的变换群 $\phi_t^\#(-\infty<t<\infty)$ 来说也适合这里性质(ii*)．事实上，据(4.4)易验证

$$\xi_{\phi_t^\#(\alpha)k}^*(s+t)=\frac{\xi_{\alpha k}^*(s+t)}{\xi_{\alpha k}^*(s)},\quad \alpha\in L_\kappa^\#.$$

我们希望对于 M^* 上某些切向量的长度在单参数变换群下的变化性质作出适当估计．函数 $\xi_{\alpha k}(t)$ 等都是由这样一些切向量的长度所构成的．特别地，我们要对这类函数用适当方式来作数值上的比较．这比较方式具体实现在下述定理中．

定理 6.1 命 X 为一紧致的可度量空间，$\varphi_t(-\infty<t<\infty)$ 为 X 上一单参数变换群．设对一给定的整数 $l\geqslant 2$ 及任一 $x\in X$，正实函数 $h_{x1}(t),\ h_{x2}(t),\cdots,\ h_{xl}(t)$ 给出如前，它们具有性质(i*)，(ii*)．又设 μ 是 X 上对 $\varphi_t(-\infty<t<\infty)$ 来说的不变且可遍的正规测度．则对于 1，2，…，l 的某一排列 $k\to p(k)$，一切使诸不等式

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{T}\int_0^T\frac{\mathrm{Min}\{h_{xp(1)}(t),h_{xp(2)}(t),\cdots,h_{xp(k-1)}(t)\}}{\mathrm{Max}\{h_{xp(k)}(t),h_{xp(k+1)}(t),\cdots,h_{xp(l)}(t)\}}dt>0,\tag{I_k}$$

$$\overline{\lim_{T\to-\infty}}\frac{1}{T}\int_0^T\frac{\mathrm{Min}\{h_{xp(k)}(t),h_{xp(k+1)}(t),\cdots,h_{xp(l)}(t)\}}{\mathrm{Max}\{h_{xp(1)}(t),h_{xp(2)}(t),\cdots,h_{xp(k-1)}(t)\}}dt>0,\tag{II_k}$$

$$k=2,3,\cdots,l,$$

都成立的 $x\in X$ 作成的集合 W 是一个在 $\varphi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变的 μ-可测集合，且 W 具有 μ-测度 1．

证 命 $\nu^{\#}$ 为 Descartes 积 $X^{\#}=X\times(-\infty,\infty)$上由$X$的测度$\mu$及$(-\infty,\infty)$的 Lebesgue 测度所自然给出的积测度．考虑 $X^{\#}$ 上的函数 $h_k(x,t)=h_{x_k}(t)$．我们说，对任给的 $1\leqslant j\leqslant l$，存在$1,2,\cdots,j$的一排列 $k\to\tau_j(k)$ 及 $X^{\#}$ 中一闭子集H_j使得下述(1)，(2)成立，即

(1) 对任一 $(x,t)\in H_j$，恒有

$$h_{\tau j(1)}(x,t)\geqslant h_{\tau j(2)}(x,t)\geqslant\cdots\geqslant h_{\tau j(j)}(x,t);$$

(2) 命 $\widetilde{H}_j(x,t)$ 为集合H_j在 $X^{\#}$ 上的特征函数，则有

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{T}\int_{X\times(0,T)}\widetilde{H}_j(x,t)d\nu^{\#}>0.$$

我们将对 j 取归纳法来证明这断语．事实上，当 $j=1$ 时，这断语显然成立，只须取 $H_1=X^{\#}$．今设这断语对某一$1\leqslant j<l$已成立．对每一 $1\leqslant k\leqslant j$，记

$$B_k=\{(x,t)\in H_j\,|\,h_{j+1}(x,t)\geqslant h_{\tau j(k)}(x,t)\},$$
$$B'_k=\{(x,t)\in H_j\,|\,h_{j+1}(x,t)\leqslant h_{\tau j(k)}(x,t)\}.$$

因 H_j 是 $X^{\#}$ 中的闭子集，故据定理假设中所述关于函数 $h_k(x,t)$ 等的连续性 (i*)，B_k 及 B'_k 也都是 $X^{\#}$ 中的闭子集．又 $H_j=B_k\cup B'_k$，这蕴涵 $\widetilde{H}_j(x,t)\leqslant\widetilde{B}_k(x,t)+\widetilde{B}'_k(x,t)$，这里 $\widetilde{B}_k(x,t)$ 及 $\widetilde{B}'_k(x,t)$ 也分别表示集合 B_k 及 B'_k 在 $X^{\#}$ 中的特征函数．于是据归纳假设，对每个 $1\leqslant k\leqslant j$ 易见这两个不等式

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{T}\int_{X\times(0,T)}\widetilde{B}_k(x,t)d\nu^{\#}>0, \qquad (\bar{I}_k)$$

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{T}\int_{X\times(0,T)}\widetilde{B}'_k(x,t)d\nu^{\#}>0 \qquad (\bar{I}'_k)$$

中至少有一个成立．

设不等式 $(\bar{I}_1)$ 成立，则我们的断语对 $j+1$ 成立；这时可取$1,2,\cdots,j+1$ 的一排列为 $\tau_{j+1}(1)=j+1$，$\tau_{j+1}(k)=\tau_j(k-1)$ 对 $2\leqslant k\leqslant j+1$，并取 $H_{j+1}=B_1$．设不等式 $(\bar{I}'_j)$ 成立，则我们的断语对 $j+1$ 亦成立；这时可取$1,2,\cdots,j+1$ 的一排列为

$\tau_{j+1}(k)=\tau_j(k)$ 对 $1\leqslant k\leqslant j$，$\tau_{j+1}(j+1)=j+1$，

并取 $H_{j+1}=B'_j$。今设 $(\bar{I}_1)$ 及 $(\bar{I}'_j)$ 都不成立。则必有 $2\leqslant i_0\leqslant j$ 使得 $(\bar{I}_{i_0-1})$ 不成立但 $(\bar{I}_{i_0})$ 成立。记

$$C_{i_0}=\{(x,t)\in B_{i_0}\mid h_{j+1}(x,t)\geqslant h_{\tau_j(i_0-1)}(x,t)\},$$
$$C'_{i_0}=\{(x,t)\in B_{i_0}\mid h_{j+1}(x,t)\leqslant h_{\tau_j(i_0-1)}(x,t)\}.$$

易见 C_{i_0} 及 C'_{i_0} 都是 $X^\#$ 中的闭子集。 又 $B_{i_0}=C_{i_0}\cup C'_{i_0}$ 且 $C_{i_0}\subset B_{i_0-1}$，这些蕴涵

$$\widetilde{B}_{i_0}(x,t)\leqslant\widetilde{C}_{i_0}(x,t)+\widetilde{C}'_{i_0}(x,t)$$

及

$$\widetilde{C}_{i_0}(x,t)\leqslant\widetilde{B}_{i_0-1}(x,t),$$

其中 $\widetilde{C}_{i_0}(x,t)$ 及 $\widetilde{C}'_{i_0}(x,t)$ 也分别表示集合 C_{i_0} 及 C'_{i_0} 在 $X^\#$ 中的特征函数。于是，因 $(\bar{I}_{i_0-1})$ 不成立但 $(\bar{I}_{i_0})$ 成立，易见

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{T}\int_{X\times(0,T)}\widetilde{C}'_{i_0}(x,t)d\nu^\#>0.$$

我们的断语由是对 $j+1$ 仍成立；只须取 $1,2,\cdots,j+1$ 的一排列为

$$\tau_{j+1}(k)=\begin{cases}\tau_j(k) & 对\quad k\leqslant i_0-1,\\ j+1 & 对\quad k=i_0,\\ \tau_j(k-1) & 对\quad k>i_0;\end{cases}$$

并取 $H_{j+1}=C'_{i_0}$。现在，归纳步骤完成。我们的断语就证明了。

命 $p=\tau_l$。下面我们将证明：$1,2,\cdots,l$ 的这一个排列 $k\to p(k)$ 是一个适合定理中所述要求的排列，换言之，即对这排列来说，一切使不等式 (I_k) 及 (II_k) 对于 $k=1,2,\cdots,l$ 都成立的 $x\in X$ 作成的集合 W 是一个在 $\varphi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变的 μ-可测集，且 $\mu(W)=1$。首先，让我们指出：若命

$$m_k(x,t)=\mathrm{Min}\{h_{p(1)}(x,t),\ h_{p(2)}(x,t),\cdots,\ h_{p(k-1)}(x,t)\},$$
$$M_k(x,t)=\mathrm{Max}\{h_{p(k)}(x,t),\ h_{p(k+1)}(x,t),\cdots,\ h_{p(l)}(x,t)\},$$
$$N_k(x,t)=\mathrm{Min}\left\{\frac{m_k(x,t)}{M_k(x,t)},\ 1\right\},$$
$$(x,t)\in X^\#,\ k=2,3,\cdots,l,$$

则恒有 $N_k(x,t)>0$，由是据前面已证的断语中的条件(1)及

(2)，我们有

$$J_+(k)=\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{T}\int_{X\times(0,T)}N_k(x,t)dv^{\#}$$

$$\geqslant\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{T}\int_{X\times(0,T)}\widetilde{H}_l(x,t)dv^{\#}>0,\qquad(6.1)$$

$$k=2,3,\cdots,l.$$

我们也将记

$$m'_k(x,t)=\mathrm{Min}\{h_{p(k)}(x,t),\ h_{p(k+1)}(x,t),\cdots,\ h_{p(l)}(x,t)\},$$

$$M'_k(x,t)=\mathrm{Max}\{h_{p(1)}(x,t),\ h_{p(2)}(x,t),\cdots,\ h_{p(k-1)}(x,t)\},$$

$$N'_k(x,t)=\mathrm{Min}\left\{\frac{m'_k(x,t)}{M'_k(x,t)},\ 1\right\},$$

$$(x,t)\in X^{\#},\ k=2,3,\cdots,l,$$

并考虑

$$J_-(k)=\overline{\lim_{T\to-\infty}}\frac{1}{T}\int_{X\times(0,T)}N'_k(x,t)dv^{\#}.$$

对任一 $x\in X$，置

$$m_{xk}(t)=m_k(x,t),\ M_{xk}(t)=M_k(x,t),$$

$$m'_{xk}(t)=m'_k(x,t),M'_{xk}(t)=M'_k(x,t).$$

明显地，

$$\frac{m_{xk}(t)}{M_{xk}(t)}\ \text{及}\ \frac{m'_{xk}(t)}{M'_{xk}(t)}$$

分别是定理叙述的不等式 (I_k) 及 (II_k) 中的被积函数. 又命 $W_+(k)$ 为使得不等式 (I_k) 成立的一切 $x\in X$ 作成的集合，$W_-(k)$ 为使得不等式 (II_k) 成立的一切 $x\in X$ 作成的集合 $(k=2,3,\cdots,l)$. 则显然有

$$W=\bigcap_{k=2,3,\cdots,l}(W_+(k)\cap W_-(k)).$$

我们说 $W_+(k)$ 及 $W_-(k)$，$k=2,3,\cdots,l$，都是 X 中对 $\varphi_t(-\infty<t<\infty)$ 来说不变的子集. 事实上，若对任意的 $x\in X$ 及 $-\infty<s<\infty$，置

$$m_x(s)=\mathrm{Min}\ \{h_{x1}(s),\ h_{x2}(s),\cdots,\ h_{xl}(s)\},$$

$$M_x(s) = \mathrm{Max}\ \{h_{x1}(s),\ h_{x2}(s), \cdots,\ h_{xl}(s)\}$$

($m_x(s)$ 及 $M_x(s)$ 都 > 0)，则定理假设中所述条件（ii*）蕴涵对任一 $-\infty < t < \infty$，

$$m_{\varphi_s(x)_k}(t) \geqslant \frac{m_{xk}(s+t)}{M_x(s)},\quad M_{\varphi_s(x)_k}(t) \leqslant \frac{M_{xk}(s+t)}{m_x(s)},$$

$$m'_{\varphi_s(x)_k}(t) \geqslant \frac{m'_{xk}(s+t)}{M_x(s)},\quad M'_{\varphi_s(x)_k}(t) \leqslant \frac{M'_{xk}(s+t)}{m_x(s)},$$

$$k = 2, 3, \cdots, l,$$

从而

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T}\int_0^T \frac{m_{\varphi_s(x)_k}(t)}{M_{\varphi_s(x)_k}(t)}\,dt \\
&\geqslant \frac{m_x(s)}{M_x(s)} \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T}\int_0^T \frac{m_{xk}(s+t)}{M_{xk}(s+t)}\,dt \\
&= \frac{m_x(s)}{M_x(s)} \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T}\int_0^T \frac{m_{xk}(t)}{M_{xk}(t)}\,dt.
\end{aligned}$$

同样地，有

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{T\to-\infty}} \frac{1}{T}\int_0^T \frac{m'_{\varphi_s(x)_k}(t)}{M'_{\varphi_s(x)_k}(t)}\,dt \\
&\geqslant \frac{m_x(s)}{M_x(s)} \overline{\lim_{T\to-\infty}} \frac{1}{T}\int_0^T \frac{m'_{xk}(t)}{M'_{xk}(t)}\,dt,
\end{aligned}$$

$$k = 2, 3, \cdots, l.$$

从这些不等式，易见我们的断语成立。

应用 Fubini 定理，可表 $J_+(k)$ 及 $J_-(k)$ 为

$$\begin{aligned}
J_+(k) &= \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T}\int_0^T \left(\int_X N_k(x,t)\,d\mu\right) dt \\
&= \overline{\lim_{T\to\infty}} \int_X \left(\frac{1}{T}\int_0^T N_k(x,t)\,dt\right) d\mu,
\end{aligned}$$

$$k = 2, 3, \cdots, l, \tag{6.2}$$

$$J_-(k) = \overline{\lim_{T\to-\infty}} \frac{1}{T}\int_0^T \left(\int_X N'_k(x,t)\,d\mu\right) dt$$

$$= \overline{\lim_{T\to-\infty}} \int_X \left(\frac{1}{T}\int_0^T N'_k(x,t)dt\right) d\mu,$$

$$k = 2, 3, \cdots, l. \tag{6.3}$$

我们将借助这些式子来继续进行定理(6.1)的证明。

在(6.1)中我们已给 $J_+(k) > 0$ $(k = 2, 3, \cdots, l)$. 我们现在再证明

$$J_-(k) > 0, \ k = 2, 3, \cdots, l. \tag{6.4}$$

事实上，据定理假设中的条件(ii*)，有

$$h_k(\varphi_t(x), t)h_k(x, s) = h_k(x, s + t),$$

于其中置 $s = -t$，就得

$$h_k(\varphi_{-t}(x), t)h_k(x, -t) = 1, \ k = 1, 2, \cdots, l.$$

从这式子易导出

$$m'_k(x, -t) = \frac{1}{M_k(\varphi_{-t}(x), t)},$$

$$M'_k(x, -t) = \frac{1}{m_k(\varphi_{-t}(x), t)},$$

$$k = 2, 3, \cdots, l,$$

从而

$$\frac{m'_k(x, -t)}{M'_k(x, -t)} = \frac{m_k(\varphi_{-t}(x), t)}{M_k(\varphi_{-t}(x), t)},$$

$$N'_k(x, -t) = N_k(\varphi_{-t}(x), t).$$

对这后一式子的两端就 X 上的测度 μ 取积分就有

$$\int_X N'_k(x, -t)d\mu = \int_X N_k(\varphi_{-t}(x), t)d\mu.$$

但据定理假设，X 上的测度 μ 在 $\varphi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变，易见

$$\int_X N_k(\varphi_{-t}(x), t)d\mu = \int_X N_k(x, t)d\mu,$$

因此，

$$\int_X N'_k(x, -t)d\mu = \int_X N_k(x, t)d\mu.$$

这结合(6.2)，(6.3)及(6.1)给出

$$J_-(k) = J_+(k) > 0,\ k = 2, 3, \cdots, l,$$
也就证明了(6.4).

我们说 $W_+(k)$ 是 X 中的 μ-可测子集且 $\mu(W_+(k)) > 0$ $(k = 2, 3, \cdots, l)$. 这是因为函数 $m_k(x, t)/M_k(x, t)$ 在 $X^\#$ 上连续，从而

$$W_+(k) = \left\{x \in X \middle| \overline{\lim_{T\to\infty}} L_k(x, T) > 0\right\}$$

是 X 的 μ-可测子集，其中

$$L_k(x, T) = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{m_k(x, t)}{M_k(x, t)} dt.$$

类似地，我们也有 X 的一 μ-可测子集

$$\widetilde{W}_+(k) = \left\{x \in X \middle| \overline{\lim_{T\to\infty}} \widetilde{L}_k(x, T) > 0\right\},$$

其中

$$\widetilde{L}_k(x, T) = \frac{1}{T}\int_0^T N_k(x, t) dt.$$

但据(6.1), $J_+(k) > 0$. 于是，因 μ 是 X 的有限测度 $(\mu(X) = 1)$ 且 $N_k(x, t)$ 是 $X^\#$ 上的有界函数 $(0 < N_k(x, t) \leqslant 1)$, 据(6.2)易验证 $\mu(\widetilde{W}_+(k)) > 0$. 又从 $N_k(x, t)$ 的定义我们有

$$W_+(k) \supset \widetilde{W}_+(k).$$

这给出 $\mu(W_+(k)) > 0$. 同样地，用(6.4)等我们有 $W_-(k)$ 是 X 中的 μ-可测子集且 $\mu(W_-(k)) > 0$.

据假设，μ 是 X 上一个在 $\varphi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变及可通的正规测度. 既然 $W_+(k)$ 及 $W_-(k)$ 都是 X 上对 $\varphi_t(-\infty < t < \infty)$ 来说的不变的 μ-可测子集且

$$\mu(W_+(k)) > 0,\ \mu(W_-(k)) > 0,\ k = 2, 3, \cdots, l,$$

故

$$W = \bigcap_{k=2,3,\cdots,l}(W_+(k) \cap W_-(k))$$

是 X 中一个在 $\varphi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变的 μ-可测子集，且

$$\mu(W) = 1.$$

定理 6.1 证完.

注 前面提过，§§2, 3 中的正实函数 $\zeta_{\alpha_k}(t)$, $\alpha \in \mathscr{F}_l^\#$, 对于

$\mathscr{F}_l^\#$ 上的变换群 $\chi_t^\#(-\infty < t < \infty)$ 来说适合本节中所述的条件 (i*) 及 (ii). 现在，设 μ 是 $\mathscr{F}_l^\#$ 上一个在 $\chi_t^\#(-\infty < t < \infty)$ 下不变及可遍的正规测度. 据定理 (3.1), 则使得对 $k=1, 2, \cdots, l$ 都有极限

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\log\zeta_{\alpha_k}(T)=\lim_{T\to-\infty}\frac{1}{T}\log\zeta_{\alpha_k}(T)=\int_{\mathscr{F}_l^\#}\omega_k(\beta)d\mu$$

的一切 $\alpha\in\mathscr{F}_l^\#$ 作成一个在 $\chi_t^\#(-\infty < t < \infty)$ 下不变的 μ-可测集合 W'，它具有 μ-测度 1. 简记

$$c_k=\int_{\mathscr{F}_l^\#}\omega_k(\beta)d\mu,\quad k=1,2,\cdots,l,$$

并设 $l\geqslant 2$. 若这里诸 c_k 彼此间都不相等，例如说，诸 c_k 列成

$$c_{p(1)} > c_{p(2)} > \cdots > c_{p(l)},$$

则定理 6.1 对于这些函数 $\zeta_{\alpha_k}(t)$ 以及 $1,2,\cdots,l$ 的这一排列 $k\to p(k)$ 来说容易看出成立. 事实上，这时易验证对任给的一 $\alpha\in W'$，恒有某一个 T' 使得当 $t>T'$ 时

$$\zeta_{p(1)}(t)>\zeta_{p(2)}(t)>\cdots>\zeta_{p(l)}(t),$$

从而定理 6.1 中的不等式 (I_k) 成立 $(k=2,3,\cdots,l)$. 类似地可验证定理 6.1 中的不等式 (II_k) $(k=2, 3, \cdots, l)$ 对任一 $x\in W'$ 这时亦成立. 可是，假如这里有某些个数的 c_k 彼此间相等，我们不能用这种办法来直接导出对于函数 $\zeta_{\alpha_k}(t)$ 来说的定理 6.1.

现在，我们仍回到本节开始时所给的空间 X 及其上的单参数变换群 $\varphi_t(-\infty < t < \infty)$. 记 $\mathfrak{S}$ 为 $X^\#=X\times(-\infty,\infty)$ 上一切具有性质 (i*) 及 (ii*) 的正实函数 $h(x,t)$ 作成的集合(即 $h(x,t)$ 连续，且对任一 $x\in X$, $h_x(t)=h(x,t)$ 适合条件

$$h_{\varphi_t(x)}(t)h_x(s)=h_x(s+t)).$$

易直接验证：若 $h(x,t)$ 及 $h'(x,t)\in\mathfrak{S}$，则函数 $h(x,t)h'(x,t)$ 及 $1/h(x,t)$ 也都 $\in\mathfrak{S}$.

对任一 $x\in X$ 及与 x 相联系的 $(-\infty, \infty)$ 上任一函数 $h_x(t)$ 及任一 $\varepsilon>0$，我们将记 $h_{x\varepsilon}(t)$ 为实数集

$$\{t\in(-\infty,\infty)\mid h_x(t)\geqslant \varepsilon\}$$

在$(-\infty,\infty)$上的特征函数。设$h(x,t)\in\mathfrak{S}$。置$h_x(t)=h(x,t)$。命E_+^h为一切具有下述性质$x\in X$作成的集合，即对于x存在一$\varepsilon>0$使得

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{T}\int_0^T h_{x\varepsilon}(t)\,dt>0. \tag{6.5}$$

同样地，命E_-^h为一切具有下述性质的$x\in X$作成的集合，即对于x存在一$\varepsilon>0$使得

$$\overline{\lim_{T\to-\infty}}\frac{1}{T}\int_0^T h_{x\varepsilon}(t)\,dt>0. \tag{6.6}$$

我们可应用定理6.1来证明下面的定理6.2。

定理6.2 命紧致的可度量空间X及其上的单参数变换群$\varphi_t(-\infty<t<\infty)$以及函数集$\mathfrak{S}$给出如前。设$\mu$为$X$上一个在$\varphi_t(-\infty<t<\infty)$下不变且可通的正规测度。任给$h(x,t)\in\mathfrak{S}$，我们以上述方式定义集合$E_+^h$及$E_-^h\subset X$。则$E_+^h$及$E_-^h$都是$X$中在$\varphi_t(-\infty<t<\infty)$下不变的$\mu$-可测子集，且$E_+^h$及$E_-^h$两个中至少有一个具有$\mu$-测度1。

证 我们先证E_+^h是X中对$\varphi_t(-\infty<t<\infty)$来说的不变子集。事实上，任给一$x\in E_+^h$，则据定义，对于$x$存在一$\varepsilon>0$使得(6.5)成立。对任给的一$-\infty<s<\infty$，简记$x'=\varphi_s(x)$并置$\varepsilon'=\varepsilon/h_x(s)$(其中$h_x(s)=h(x,s)$)。据定理假设，

$$h_{x'}(t-s)h_x(s)=h_x(t).$$

于是，易见$h_{x\varepsilon}(t)=h_{x'\varepsilon'}(t-s)$，从而

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{T}\int_0^T h_{x'\varepsilon'}(t)\,dt=\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{T}\int_0^T h_{x\varepsilon}(t)\,dt>0.$$

故$x'\in E_+^h$。这证明E_+^h在$\varphi_t(-\infty<t<\infty)$下不变。同样可证$E_-^h$也在$\varphi_t(-\infty<t<\infty)$下不变。

其次，对任给的一$x\in X$，简记

$$\tilde{h}_x(t)=\mathrm{Min}\ \{h_x(t),1\}$$

(这是$(-\infty,\infty)$上一连续的正函数)，我们说$x\in E_+^h$的一个充分

必要条件是

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{h}_x(t)\,dt > 0. \tag{6.7}$$

事实上，设(6.7)成立．置

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{h}_x(t)\,dt > 0.$$

则因 $\tilde{h}_x(t) \leqslant 1$，用命题 4.5 充分性部分的证明中一办法，在这里可证

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{h}_{x\varepsilon}(t)\,dt > 0,$$

其中 $\tilde{h}_{x\varepsilon}(t)$ 表实数集 $\{t\in(-\infty,\infty)|\tilde{h}_x(t)\geqslant\varepsilon\}$ 在$(-\infty,\infty)$上的特征函数；易见恒有 $h_{x\varepsilon}(t)\geqslant\tilde{h}_{x\varepsilon}(t)$，从而(6.5)对这 ε 成立．这证明条件充分． 其逆，设对于 x 存在一 $\varepsilon>0$ 使得(6.5)成立．置 $\varepsilon'=\mathrm{Min}\{\varepsilon,1\}$．于是，易见

$$\frac{1}{\varepsilon'}\tilde{h}_x(t)\geqslant\tilde{h}_{x\varepsilon'}(t)\geqslant h_{x\varepsilon}(t),$$

从而(6.7)亦成立．这证明条件必要．断语证完．

从上述断语，$E_+^\pm$ 是 μ-可测的，因为

$$E_+^\pm=\left\{x\in X\,\middle|\,\overline{\lim_{T\to\infty}}\tilde{H}(x,T)>0\right\},$$

其中

$$\tilde{H}(x,T)=\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{Min}\{h(x,t),1\}\,dt,$$

而 $\mathrm{Min}\{h(x,t),1\}$ 是 $X^\#$ 上的连续函数．同样可见 $E_-^\pm$ 也是μ-可测的．

我们现在应用定理 6.1 来完成这定理的证明．于此，我们将考虑 $X^\#$ 上的三个函数 $h(x,t)$及 $h_1(x,t)=h_2(x,t)=1$．这些都是 $\mathfrak{S}$ 中的函数．照定理 6.1，则对于这三个函数的某一个排列来说，一切使得与这排列相应的一组不等式 (I_k) 及 (II_k) $(k=2,3)$，都成立的 $x\in X$ 作成一 μ-可测集 W，且 $\mu(W)=1$．可是，由于 $h_1(x,t)$ 与 $h_2(x,t)$ 相等，这三个函数的所有可能不

同的排列方式是

$$\{1,1,h(x,t)\},\ \{1,h(x,t),1\},\ \{h(x,t),1,1\}.$$

照前两种排列方式，则对任一 $x\in W$ 我们都有

$$\overline{\lim_{T\to-\infty}}\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{Min}\{1,h_x(t)\}dt=\overline{\lim_{T\to-\infty}}\frac{1}{T}\int_0^T \tilde{h}_x(t)\,dt>0,$$

由是据前面所述一断语，$W\subset E_-^{\Delta}$；从而 $\mu(E_-^{\Delta})=1$。照后一种排列方式，则对任一 $x\in W$ 我们有

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{Min}\{h_x(t),1\}dt=\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{T}\int_0^T \tilde{h}_x(t)\,dt>0,$$

由是据前面所述一断语，亦有 $W\subset E_+^{\Delta}$；从而 $\mu(E_+^{\Delta})=1$。定理 6.2 证完。

§7. 格数退化的 3 维常微系统

本章前面诸节中我们讨论了 M^n 上的标架由于单参数变换群 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 的影响所产生的某些统计式的数量性质．我们注意较多的是在常点处的这些标架．

今设 F 是 M^n 中一非空的闭子集，不包含奇点且在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变．任给 $1\leqslant l\leqslant n$．考虑 M^n 上一切的、在 F 中的点处具有下述性质的正交 l-标架 α 作成的集合 U_{Fl}，这性质是 α 中的第一个向量是 M^n 上对系统 S 来说的积分线的一个切向量．用我们以前的记号来表示，即 U_{Fl} 是这样的集合：

$$U_{Fl}=\{\alpha\in\mathscr{F}_l\,|\,q_l(\alpha)\in F$$

且

$$\theta_1(\alpha)=rS(q_l(\alpha)),\ r\neq 0\in(-\infty,\infty)\}$$

(q_l 是丛投射：$\mathscr{F}_l\to M^n$)．记 $U_{Fl}^{\#}$ 为一切正规的 l-标架 $\in U_{Fl}$ 作成的集合，即

$$U_{Fl}^{\#}=U_{Fl}\cap\mathscr{F}_l^{\#}\subset\mathscr{F}_l.$$

由于 F 在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变，据 (1.1) 及 (1.6) 易见 U_{Fl} 对于 $\mathscr{F}_l$ 上的单参数变换群 $\chi_t(-\infty<t<\infty)$ 来说是 $\mathscr{F}_l$ 中的不变子集。类似地，可见 $U_{Fl}^{\#}$ 对于 $\mathscr{F}_l^{\#}$ 上的单参数变换群 $\chi_t^{\#}(-\infty<t<\infty)$ 来说也是 $\mathscr{F}_l^{\#}$ 中的不变子集。因 M^n

及 $\mathscr{F}_l^\#$ 都是紧致的可度量空间且 F 是 M^* 的闭子集，据系统 S 的连续性易见 $U_{Fl}^\#$ 是紧致的. 自然，$U_{Fl}^\#$ 不是空集. 为考察 $U_{Fl}^\#$ 的标架中各个向量的长度在变换群 $\chi_t^\#(-\infty<t<\infty)$ 下的变化，以前的定理 3.1 可以应用.照这定理来说，则对 $U_{Fl}^\#$ 上任一个在 $\chi_t^\#(-\infty<t<\infty)$ 下不变及可遍的正规测度 μ，一切使得具有极限

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\log\zeta_{\alpha k}(T)=\lim_{T\to-\infty}\frac{1}{T}\log\zeta_{\alpha k}(T)=\int_{U_{Fl}^\#}\omega_k(\beta)d\mu,$$

$$k=1,2,\cdots,l$$

的 $\alpha\in U_{Fl}^\#$ 作成一个在 $\chi_t^\#(-\infty<t<\infty)$ 下不变的 μ-可测子集，它具有 μ-测度 1.

我们有

$$\zeta_{\alpha 1}(t)=\frac{\|S(\phi_t(q_l(\alpha)))\|}{\|S(q_l(\alpha))\|}，对任一\ \alpha\in U_{Fl}^\#, \tag{7.1}$$

事实上，这易从 (1.1) 及 (1.6) 等推出.

对 $U_{Fl}^\#$ 上任一个在 $\chi_t^\#(-\infty<t<\infty)$ 下不变及可遍的正规测度 μ，我们有

$$\int_{U_{Fl}^\#}\omega_1(\beta)d\mu=0. \tag{7.2}$$

事实上，F 是紧致的且对任一 $x\in F$，恒有 $S(x)\neq 0$. 故据 (7.1) 及 S 的连续性易见对任给的一 $\alpha\in U_{Fl}^\#$，函数 $\log\zeta_{\alpha 1}(t)$（对一切 $-\infty<t<\infty$)有上界 $<\infty$ 且有下界 $>-\infty$，由是

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\log\zeta_{\alpha 1}(T)=0.$$

这给出 (7.2).

我们自然希望对于 $\mathscr{F}_l^\#$ 上的其他 $l-1$ 个函数 $\omega_2(\beta)$, $\omega_3(\beta),\cdots,\omega_l(\beta)$ 也有一些进一步的了解. 可是，在最一般情况下，这方面我们目下不打算论述. 设 M^* 的维数 $=3$，并设 F 的格数 $\kappa^*(F)=1$（这样 F 的存在的例子见 § 5 中). 在这情况下我们可以有下面定理中所述的结论.

定理 7.1 设 M^n 的维数 $n=3$。并设 F 是 M^3 中一个不包含（对系统 S 来说的）奇点且在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变的非空的闭子集，它具有退化的格数。则对于 $U_F^* = U_{F3}^{\#}(\subset \mathscr{F}_3^{\#}$，这里 $U_{F3}^{\#}$ 的意义给出如前）上任一个在 $\chi_t^{\#}(-\infty<t<\infty)$ 下不变且可通的正规测度 μ，我们有

$$\int_{U_F^*} \omega_2(\beta)d\mu = \int_{U_F^*} \omega_3(\beta)d\mu. \tag{7.3}$$

证 任给 U_F^* 上一个在 $\chi_t^{\#}(-\infty<t<\infty)$ 下不变且可通的正规测度 μ。用定理 3.1，我们首先任取定 M^3 上在一点 $\bar{x}\in F$ 处的正规标架

$$\bar{\alpha} = \left(\frac{S(\bar{x})}{\|S(\bar{x})\|}, \bar{u}_2, \bar{u}_3\right) \in U_F^*$$

使得有极限

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log \zeta_{\bar{\alpha}k}(T) = \lim_{T\to-\infty} \frac{1}{T} \log \zeta_{\bar{\alpha}k}(T) = \int_{U_F^*} \omega_k(\beta)d\mu,$$

$$k=2,3. \tag{7.4}$$

为了方便，我们将如同在 §4 中一样，也考虑在 $n=3$ 这情况下的空间 $\mathscr{L}^{\#}\subset\mathscr{L}$ 及 $\mathscr{L}_2^{\#}\subset\mathscr{L}_2$ 等，并记

$$L = (\rho^{\#})^{-1}(F)\subset\mathscr{L}^{\#}.$$

记 $\tilde{\alpha} = (\bar{u}_2, \bar{u}_3)$，这是一正规标架 $\in \mathscr{L}_2^{\#}$。据 (5.5)，我们有

$$\zeta_{\tilde{\alpha}1}^*(t) = \zeta_{\bar{\alpha}2}(t),\ \ \zeta_{\tilde{\alpha}2}^*(t) = \zeta_{\bar{\alpha}3}(t), \tag{7.5}$$

其中 $\zeta_{\tilde{\alpha}k}^*(t) = \|\theta_k\pi\phi_t(\tilde{\alpha})\|$ $(k=1,2)$。又据 (1.4) 及 π 的定义等，我们有

$$\zeta_{\tilde{\alpha}1}^*(t) = \xi_{\tilde{\alpha}1}^*(t),\ \ \zeta_{\tilde{\alpha}2}^*(t) \leqslant \xi_{\tilde{\alpha}2}^*(t), \tag{7.6}$$

其中 $\xi_{\tilde{\alpha}k}^*(t) = \|\theta_k\phi_t(\tilde{\alpha})\|$ $(k=1,2)$。这里后一不等式以及 (7.5) 蕴涵

$$\log\xi_{\tilde{\alpha}2}^*(t) \geqslant \log\zeta_{\tilde{\alpha}2}^*(t) = \log\zeta_{\bar{\alpha}3}(t),$$

从而

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log\xi_{\tilde{\alpha}2}^*(T) \geqslant \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log\zeta_{\bar{\alpha}3}(T)$$

$$=\lim_{T\to-\infty}\frac{1}{T}\log\zeta_{a3}(T)\geqslant\lim_{T\to-\infty}\frac{1}{T}\log\xi^*_{\bar a2}(T). \tag{7.7}$$

我们将证明存在极限

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\log\xi^*_{\bar a2}(T)&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\log\xi^*_{\bar a1}(T),\\ \lim_{T\to-\infty}\frac{1}{T}\log\xi^*_{\bar a2}(T)&=\lim_{T\to-\infty}\frac{1}{T}\log\xi^*_{\bar a1}(T).\end{aligned}\tag{7.8}$$

由是这结合 (7.4)—(7.7) 就证明了定理结论中的等式 (7.3).

为证明 (7.8)，我们考虑 $\mathscr{L}$ 上的函数

$$\omega(u)=\omega_2(g(u)),$$

这里，$\omega_2(\beta)$ 是给在 §2 中的 $\mathscr{F}_2$ 上的函数，u 是 M^3 上的切向量 $\in\mathscr{L}$，又 g 是由式子

$$g(u)=\left(\frac{S(\rho(u))}{\|S(\rho(u))\|},\ u\right)$$

定义的映射：$\mathscr{L}\to\mathscr{F}_2$. 据命题 2.1，$\omega(u)$ 是 $\mathscr{L}$ 上的连续函数．又我们有映射 $\theta_k:\mathscr{L}_2\to\mathscr{L}$ 使

$$\theta_k(u_1,u_2)=u_k,\quad k=1,2.$$

我们说

$$\log\xi^*_{\bar a k}(T)=\int_0^T\omega(\theta_k\phi^\#_t(\bar\alpha))dt,\quad k=1,2, \tag{7.9}$$

其中 $\phi^\#_t(-\infty<t<\infty)$ 是给在§4中的 $\mathscr{L}^\#_2$ 上的单参数变换群．事实上，据 (5.4) 我们有 $\xi^*_{\bar a k}(t)=\zeta_{\bar a_k 2}(t)$，其中

$$\bar\alpha_k=\left(\frac{S(\rho(\bar u_k))}{\|S(\rho(\bar u_k))\|},\ \bar u_k\right)\in\mathscr{F}^\#_2,\quad k=1,2.$$

故据引理 3.2，欲证明 (7.9) 只须证

$$\omega(\theta_k\phi^\#_t(\bar\alpha))=\omega_2(\chi^\#_t(\bar\alpha_k)),\quad k=1,2,$$

这里 $\chi^\#_t(-\infty<t<\infty)$ 是 $\mathscr{F}^\#_2$ 上的单参数变换群，见 §3．但这等式易从 $\phi^\#_t$ 及 $\chi^\#_t$ 的定义以及 (1.6) 得出，即

$$\omega(\theta_k\phi^\#_t(\bar\alpha))=\omega\left(\frac{\phi_t(\bar u_k)}{\|\phi_t(\bar u_k)\|}\right)$$

$$= \omega_2\left(\frac{S(\rho\phi_t(\bar{u}_k))}{\|S(\rho\phi_t(\bar{u}_k))\|}, \frac{\phi_t(\vec{u}_k)}{\|\phi_t(\vec{u}_k)\|}\right)$$
$$= \omega_2(\chi_t^{\#}(\tilde{\alpha}_k)).$$

由是 (7.9) 成立。

欲完成(7.8)的证明，我们将如同在 §4 中一样，考虑 L 的 2 重 Descartes 积 $\bar{L} = L \times L$ 中的子空间

$$L^{\#} = \{(u_1, u_2) \in \bar{L} \mid \rho^{\#}(u_1) = \rho^{\#}(u_2)\}.$$

这是紧致的空间。在 $L^{\#}$ 上也可定义单参数变换群 $\phi_t^{\#}(-\infty < t < \infty)$ 使 $\phi_t^{\#}(u_1, u_2) = (\phi_t^{\#}(u_1), \phi_t^{\#}(u_2))$。于是，考虑 $L^{\#}$ 上的函数 $\nu(u_1, u_2)$ 及

$$\tilde{\omega}(u_1, u_2) = |\omega(u_1) - \omega(u_2)|.$$

这些都是 $L^{\#}$ 上连续的(因而也是有界的)函数。命

$$V^{\#} = \{(u_1, u_2) \in L^{\#} \mid \nu(u_1, u_2) = 0\}.$$

则据 $\nu(u_1, u_2)$ 的定义等，易见 $V^{\#}$ 由一切使 $u_2 = \pm u_1$ 的 $(u_1, u_2) \in L^{\#}$ 所组成。据命题2.1，亦易见对任一 $(u_1, u_2) \in V^{\#}$，恒有

$$\tilde{\omega}(u_1, u_2) = 0.$$

现在，任给一 $\varepsilon > 0$。考虑 $V = \tilde{\omega}^{-1}((-\varepsilon, \varepsilon))$，这是 $V^{\#}$ 在 $L^{\#}$ 中的一邻域，从 $L^{\#}$ 的紧致性及 $V^{\#}$ 的定义等，可取 $\varepsilon' > 0$ 使得只要 $(u_1, u_2) \in L^{\#}$ 且 $\nu(u_1, u_2) < \varepsilon'$，即有 $\tilde{\omega}(u_1, u_2) < \varepsilon$。又对于前面所给的 $\tilde{\alpha} \in \mathscr{L}_2^{\#}$，易见 $\tilde{\alpha} \in L^{\#}$。于是，考虑函数 $\eta_{\tilde{\alpha}}^*(t) = \nu(\phi_t^{\#}(\tilde{\alpha}))$ 及 $\eta_{\tilde{\alpha}\varepsilon'}^*(t)$ (见 §4)。因 F 具有退化的格数(据定理假设)，故有

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T}\int_0^T \eta_{\tilde{\alpha}\varepsilon'}^*(t)dt = \overline{\lim_{T\to-\infty}} \frac{1}{T}\int_0^T \eta_{\tilde{\alpha}\varepsilon'}^*(t)dt = 0. \qquad (7.10)$$

从而对任一 $T > 0$ 或 $T < 0$，

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T (\omega(\theta_1\phi_t^{\#}(\tilde{\alpha})) - \omega(\theta_2\phi_t^{\#}(\tilde{\alpha})))dt\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{\omega}(\phi_t^{\#}(\tilde{\alpha}))dt$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^T (1 - \eta_{\tilde{\alpha}\varepsilon'}^*(t))\tilde{\omega}(\phi_t^{\#}(\tilde{\alpha}))dt$$

$$+\frac{1}{T}\int_0^T \eta^*_{\bar{a}\varepsilon'}(t)\tilde{\omega}(\phi_t^{\#}(\bar{\alpha}))dt$$

$$\leqslant \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon dt+\left[\sup_{(u_1,u_2)\in L^{\#}}\tilde{\omega}(u_1,u_2)\right]\frac{1}{T}\int_0^T \eta^*_{\bar{a}\varepsilon'}(t)dt.$$

这结合 (7.9) 及 (7.10) 等给出

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\left|\frac{1}{T}(\log\xi^*_{\bar{a}2}(T)-\log\xi^*_{\bar{a}1}(T))\right|\leqslant\varepsilon,$$

$$\overline{\lim_{T\to-\infty}}\left|\frac{1}{T}(\log\xi^*_{\bar{a}2}(T)-\log\xi^*_{\bar{a}1}(T))\right|\leqslant\varepsilon.$$

但 ε 是任给的一数 >0. 故有极限

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}(\log\xi^*_{\bar{a}2}(T)-\log\xi^*_{\bar{a}1}(T))=0$$

$$=\lim_{T\to-\infty}\frac{1}{T}(\log\xi^*_{\bar{a}2}(T)-\log\xi^*_{\bar{a}1}(T)). \tag{7.11}$$

现在，(7.8) 的证明易用 (7.11) 及 (7.4)—(7.6) 等完成。定理 7.1 证完。

同样方式可用来证明（一紧致的 2 维 C^∞ 型微分流形）M^2 上 C^1 型常微系统 S 的一个相类似性质，即

定理 7.2 设 M^n 的维数 $n=2$. 并设 F 是 M^2 中一个在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变的非空的闭子集使得 $\kappa(F)<2$. 则对于 $U_F=(q_1^{\#})^{-1}(F)$ 上任一个在 $\chi_t^{\#}(-\infty<t<\infty)$ 下不变且可通的正规测度 μ，我们有

$$\int_{U_F}\omega_1(\beta)d\mu=\int_{U_F}\omega_2(F)d\mu.$$

这里 $\kappa(F)$ 的意义见 §4 末，$\omega_k(\beta)$ $(k=1,2)$ 是 §2 中所给的 $\mathscr{F}_1$ 上的函数，$q_1^{\#}$ 是丛投射：$\mathscr{F}_1^{\#}\to M^2$(§3).

§8. 方阵 $R_\alpha(t)$ 及发散量 divS

考虑 M^n 上的正规标架丛 $\mathscr{F}_n^{\#}$. 任给 M^n 上一点 x 处的一正规标架 $\alpha=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$，并简记

$$\alpha(t)=(u_1(t),u_2(t),\cdots,u_n(t))=\chi_t^{\#}(\alpha)\in\mathscr{F}_*^{\#}.$$

则 $\alpha(t)$ 可取作 M^n 在点 $\phi_t(x)$ 处的切空间的坐标系。对 M^n 上在 x 处的任一切向量 u，我们希望考虑 M^n 的切向量 $\Phi_t(u)=d\phi_t(x)$ 在坐标系 $\alpha(t)$ 下的表达方式。但因 $\alpha=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 是 M^n 在 x 处的切空间中一坐标系且 Φ_t 把这切空间线性地映射至 M^n 在 $\phi_t(x)$ 处的切空间上，故对于所述目的来说，我们可特别考虑 $\Phi_t(\alpha)=(\Phi_t(u_1),\Phi_t(u_2),\cdots,\Phi_t(u_n))$ 中的 n 个向量 $\Phi_t(u_i)$。

为此，我们简记

$$Y_\alpha(t)=\Gamma(\Phi_t(\alpha))\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\zeta_{\alpha 1}(t)}, & & 0\\ & \dfrac{1}{\zeta_{\alpha 2}(t)}, \ddots, & \\ 0 & & \dfrac{1}{\zeta_{\alpha_n}(t)}\end{pmatrix},$$

其中右端前一方阵是如同 §1 中所给的三角式(n 阶)方阵，后一个是对角形式的方阵。于是，据 $\mathscr{F}_*^{\#}$ 上的变换 $\chi_t^{\#}$ 的定义(§§1，3)，易见

$$\alpha(t)=\Phi_t(\alpha)Y_\alpha(t); \tag{8.1}$$

从而有

$$\Phi_t(\alpha)=\alpha(t)X_\alpha(t),$$

其中 $X_\alpha(t)=Y_\alpha^{-1}(t)$ (即 $X_\alpha(t)$ 是 $\Phi_t(\alpha)$ 对 $\alpha(t)$ 来说的坐标方阵)。这 $X_\alpha(t)$ 是一个三角式的方阵，其对角线元素顺次是 $\zeta_{\alpha 1}(t),\zeta_{\alpha 2}(t),\cdots,\zeta_{\alpha_n}(t)$。我们将用下面的记号：设

$$\alpha'=(u_1',u_2',\cdots,u_n')\text{ 及 }\alpha''=(u_1'',u_2'',\cdots,u_n'')$$

均为 M^n上一点 x' 处的标架。记 $\alpha'^{T}\cdot\alpha''=$ 方阵 $(u_i'\cdot u_j'')$ (其中 $u_i'\cdot u_j''$ 表 u_i' 及 u_j'' 的内积)。我们说 $X_\alpha(t)$ 适合 n 维欧氏空间 E^n 上的常微系统

$$\frac{dX_\alpha(t)}{dt}=R_\alpha(t)X_\alpha(t), \tag{8.2}$$

其中

$$R_\alpha(t)=\alpha(t)^{tr}\cdot[\nabla\Phi_t(\alpha)Y_\alpha(t)-\nabla\alpha(t)],$$
$$\nabla\Phi_t(\alpha)=(\nabla\Phi_t(u_1),\nabla\Phi_t(u_2),\cdots,\nabla\Phi_t(u_n)),$$
$$\nabla\alpha(t)=(\nabla u_1(t),\nabla u_2(t),\cdots,\nabla u_n(t)),$$
$\nabla\Phi_t(u_i)$ 及 $\nabla u_i(t)$ 表 $\Phi_t(u_i)$ 及 $u_i(t)$ 沿系统 S 过 x 处的积分线的共变微商（§2）。事实上，据 $Y_\alpha(t)$ 的定义以及 (2.3)—(2.5) 等，易见 $Y_\alpha(t)$ 对 t 是连续可微的。于是，据 (2.3) 直接计算 (8.1) 中两端对 $\alpha(t)=(u_1(t),u_2(t),\cdots,u_n(t))$ 等的共变微商，即有

$$\nabla\alpha(t)=(\nabla\Phi_t(\alpha))Y_\alpha(t)+\Phi_t(\alpha)\frac{dY_\alpha(t)}{dt}$$
$$=(\nabla\Phi_t(\alpha))Y_\alpha(t)+\alpha(t)X_\alpha(t)\frac{dY_\alpha(t)}{dt}.$$

又
$$0=\frac{d}{dt}(X_\alpha(t)Y_\alpha(t))=X_\alpha(t)\frac{dY_\alpha(t)}{dt}+\left(\frac{dX_\alpha(t)}{dt}\right)Y_\alpha(t).$$
这给出 (8.2)。

据 §2 中所述以及 $Y_\alpha(t)$ 的定义等，易见 $R_\alpha(t)$ 对 $\alpha\in\mathscr{F}_n^{\#}$ 及 $-\infty<t<\infty$ 来说是连续的，换言之，即：若命 $R(\alpha,t)=R_\alpha(t)$，则 R 是从 $\mathscr{F}_n^{\#}\times(-\infty,\infty)$ 到（n 阶）方阵空间中一（连续）映射，这方阵空间是可度量的，其一度量 $\tilde\sigma$ 可如是取使

$$\tilde\sigma(C,C')=\mathrm{Max}_{i,j}|c_{ij}-c'_{ij}|,$$

其中

$$C=(c_{ij}),\ \ C'=(c'_{ij}).$$

当 C' 是 0 方阵时，我们简写 $\tilde\sigma(C)=\tilde\sigma(C,0)$。

定理8.1 $R_\alpha(t)$ 对 $\alpha\in\mathscr{F}^{\#}$ 及 $-\infty<t<\infty$ 来说是有界的，即：存在一数 $\tilde r$ 使得对一切 $(\alpha,t)\in\mathscr{F}_n^{\#}\times(-\infty,\infty)$，恒有 $\tilde\sigma(R_\alpha(t))\leqslant\tilde r$。

这定理证明稍后就给出。首先，我们提述一下：因 $\alpha(t)^{tr}\cdot\alpha(t)$ 是单位方阵，据 (2.5) 我们有

$$0=\frac{d}{dt}(\alpha(t)^{tr}\cdot\alpha(t))=\alpha(t)^{tr}\cdot\nabla\alpha(t)+(\nabla\alpha(t))^{tr}\cdot\alpha(t),$$

故 $R_\alpha(t)$ 与它的转置方阵 $R_\alpha(t)''$ 的和是

$$R_\alpha(t)+R_\alpha(t)''=\alpha(t)''\cdot(\nabla\Phi_t(\alpha))Y_\alpha(t)$$
$$+[(\nabla\Phi_t(\alpha))Y_\alpha(t)]''\cdot\alpha(t). \tag{8.3}$$

实际上，式子(8.2)所表达的事实与常微分方程式论中一个关于 E^n 上一线性常微方程组的经典的 Perron 约化定理[1]相类.(此处，因 $X_\alpha(t)$ 是三角式的方阵，所以 $R_\alpha(t)$ 也是三角式的.)下面，我们将看出在这方面更多的联系。设 V 为 M^n 中一开子集，具有下述性质 (I°) 及 (II°)，即

(I°) V 非空且其闭包 V^{Cl} 是紧致的。

(II°) E^n 中有一开子集 U，其上有一 C^∞ 型可微的在中拓扑变换 $h_V:U\to M^n$ (亦即 U 中的点 $z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)$ 作成 M^n 的一局部坐标系)使得 $h_V(U)$ 包含 V^{Cl}.

设 Riemann 流形 M^n 在 U 上的基本二次型是

$$ds^2=\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(z)dz_idz_j,$$

又局部地，设系统 S 在 U 上表成常微方程组

$$\frac{dz_i}{dt}=S_i(z),\quad i=1,2,\cdots,n.$$

命

$$G(z)=\text{方阵 }(g_{ij}(z)),\quad P(z)=\text{方阵 }(p_{ij}(z)),$$

其中 $z\in U$ 使 $h_V(z)\in V^{Cl}$,

$$p_{ij}(z)=\left.\frac{\partial S_i}{\partial z_j}\right|_z+\sum_{k=1}^n\left.\begin{Bmatrix} i\\ jk\end{Bmatrix}S_k\right|_z$$

($\begin{Bmatrix} i\\ jk\end{Bmatrix}$ 是Christoffel记号). 对于 V^{Cl} 中一点处的正规标架 $\beta=(V_1,V_2,\cdots,V_n)$ 我们将考虑方阵

$$A(\beta)=(V_{ij}(\beta)),$$

其中 $(V_{1i}(\beta),V_{2i}(\beta),\cdots,V_{ni}(\beta))$ 是 β 在 U 上表成的向量. 据

1) 这定理的叙述及其意义可见 S. Lefschetz, Differential Equations: Geometric Theory (1957, New York) 一书的 131—133 页.

V^{Cl} 的紧致性等，易验证 $G(z)$，$P(z)$ 及 $A(\beta)$ 对于 z 及 β 来说有界，即：存在一数 $r_V > 0$ 使得

$$\tilde{\sigma}(G(z)) \leqslant r_V, \tilde{\sigma}(P(z)) \leqslant r_V \text{对任一 } z \in U \text{ 使 } h_V(z) \in V^{\mathrm{Cl}},$$
$$\tilde{\sigma}(A(\beta)) \leqslant r_V \text{ 对 } V^{\mathrm{Cl}} \text{ 中任一点处的任一正规标架 } \beta. \quad (8.4)$$

现在，命正规标架 $\alpha = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 及 $\alpha(t) = (u_1(t), u_2(t), \cdots, u_n(t))$ 仍给出如前。设对于某一 $-\infty < t' < \infty$，

$$q_n^{\#}(\alpha(t')) \in V^{\mathrm{Cl}},$$

其中 $q_n^{\#}$ 是丛投射：$\mathscr{F}_n^{\#} \to M^*$. 设 $\Phi_l(u_l)$ 及其共变微商 $\nabla\Phi_l(u)$ 在 U 上表成向量

$$(w_{1l}(\alpha(t')), w_{2l}(\alpha(t')), \cdots, w_{nl}(\alpha(t')))$$

及

$$(\bar{w}_{1l}(\alpha(t')), \bar{w}_{2l}(\alpha(t')), \cdots \bar{w}_{nl}(\alpha(t'))),$$

并考虑方阵

$$B(\alpha(t')) = (w_{ij}(\alpha(t'))), \ \bar{B}(\alpha(t')) = (\bar{w}_{ij}(\alpha(t'))).$$

于是，据 (8.1)

$$A(\alpha(t')) = B(\alpha(t'))Y_\alpha(t');$$

又据 (2.2) 及 (2.7)

$$\bar{B}(\alpha(t')) = P(z')B(\alpha(t')),$$

其中 $z' \in U$ 使 $h_V(z') = q_n^{\#}(\alpha(t'))$. 再从 (8.3) 直接计算，即有

$$R_\alpha(t') + R_\alpha(t')^{tr} = A(\alpha(t'))^{tr}[G(z')P(z') + P(z')^{tr}G(z')]A(\alpha(t')). \quad (8.5)$$

于是，据 (8.4) 我们易看出

$$\tilde{\sigma}(R_\alpha(t') + R_\alpha(t')^{tr}) \leqslant 2n^2(r_V)^3,$$

从而

$$\tilde{\sigma}(R_\alpha(t')) \leqslant 2n^2(r_V)^3 \quad (8.6)$$

(因 $R_\alpha(t')$ 是三角式的方阵)。

定理 8.1 的证明 因 M^* 是紧致的，故存在有限个数适合前述条件 (I°)及(II°) 的 M^* 中的开子集 V，它们作成 M^* 的一覆盖 $\mathscr{M}$。对于每个这样的 V，命 r_V 为一数适合条件 (8.4)。又命 r_0 为这些 r_V 中的最大数。于是，对于 M^* 在其上任一正规标架 α 及任一 $-\infty < t' < \infty$，据 (8.6) 我们恒有

$$\tilde{\sigma}(R_\alpha(t')) \leqslant 2n^2(r_0)^3,$$

这是因为 $\mathscr{M}$ 中至少有一开子集 V，它包含 $q_*^\#(\chi_t^\#(\alpha))$。定理证完。

任给 M^n 在其上一点处一正规标架 α。则三角式方阵 $R_\alpha(t)$ 的对角线元素顺次是

$$\omega_1(\chi_t^\#(\alpha)),\ \omega_2(\chi_t^\#(\alpha)),\ \cdots,\ \omega_n(\chi_t^\#(\alpha)). \tag{8.7}$$

(这里 $\omega_k(\gamma)$ 是 $\mathscr{F}_n$ 上的函数,定义在 §2 中.)事实上,因 $X_\alpha(t)$ 是三角式的方阵，且其对角线元素顺次是 $\zeta_{\alpha 1}(t)$，$\zeta_{\alpha 2}(t)$，$\cdots$，$\zeta_{\alpha_n}(t)$。据命题 2.1 易见 $R_\alpha(t)$ 的对角线元素顺次是

$$\frac{1}{\zeta_{\alpha k}(t)}\frac{d\zeta_{\alpha k}(t)}{dt} = \omega_k(\chi_t^\#(\alpha)),\ k = 1, 2, \cdots, n.$$

任给 $x \in M^n$. 对 M^n 在 x 处任一正规标架 α，我们将记

$$\omega(x) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k(\alpha).$$

命题 8.2 对任给的 $x \in M^n$，$\omega(x)$ 的定义与 M^n 在 x 处的正规标架 α 的选取无干. 事实上,我们有

$$\omega(x) = \mathrm{div} S|_x.$$

证 任取 M^n 在 x 处的一正规标架α。据 (8.7)，$R_\alpha(0)$ 的对角线元素顺次是 $\omega_1(\alpha)$，$\omega_2(\alpha),\cdots,\omega_n(\alpha)$. 故 $R_\alpha(0)$ 的迹数是

$$\mathrm{trace} R_\alpha(0) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k(\alpha). \tag{8.8}$$

取 M^n 的一开子集 V 使得它包含 x，且满足前述要求(I°)，(II°)，并且满足进一步的要求,即 M^n 的局部坐标系

$$z = (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in U$$

在 $h_V^{-1}(x)$ 处是正规的[1]. 由是 $G(h_V^{-1}(x)) =$ 单位方阵，从而据 (8.5) 有

$$\begin{aligned} R_\alpha(0) + R_\alpha(0)^{tr} = A(\alpha(0))^{tr}[P(h_V^{-1}(x)) \\ + P(h_V^{-1}(x))^{tr}] A(\alpha(0)), \end{aligned}$$

---

1) 这局部坐标系具有性质：在 $h_V^{-1}(x)$ 处基本二次型仅含有微分的平方.

并且 $A(\alpha(0))$ 是一正交方阵。故

$$\operatorname{trace} R_\alpha(0)=\operatorname{trace} P(h_V^{-1}(x))=\operatorname{div}S|_x.$$

这结合 (8.8) 证明命题 8.2。

据命题 8.2，则 $\omega(x)$ 是 M^n 上的连续函数。现在，命 M 为 M^n 上对系统 S 来说的一切常点作成的集合。对任给的一 $x\in M$，任取 M^n 在 x 处一正规标架 $\alpha=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 使得

$$u_1=S(x)/\|S(x)\|,$$

并置

$$\omega^*(x)=\sum_{k=2}^{n}\omega_k(\alpha)=\omega(x)-\omega_1\left(\frac{S(x)}{\|S(x)\|}\right),$$

这里后一 $\omega_1(\gamma)$ 是 §2 中定义的 $\mathscr{F}_1$ 上的连续函数。因 $S(x)/\|S(x)\|$ 对一切 $x\in M$ 来说是连续的，故 $\omega^*(x)$ 是 M 上的连续函数。我们可如下计算 $\omega_1(S(x)/\|S(x)\|)$：照 §2 中所述，则

$$S(\phi_t(x)),\quad -\infty<t<\infty$$

是沿系统 S 过 x 处的积分线 $\tilde{c}_x$ 的切于 M^n 的向量场，它有共变微商 $\nabla S(\phi_t(x))$。(因 S 是 C^1 型的，故 $\nabla S(\phi_t(x))$ 仍是 M^n 的沿 $\tilde{c}_x$ 的一切向量场，它是连续的，但不一定再是 C^1 型的。) $\nabla S(\phi_t(x))$ 在 $t=0$ 处的切向量将简记作 $\nabla S(x)$。于是，据 (2.4) 及命题 2.1 我们有

$$\omega_1\left(\frac{S(x)}{\|S(x)\|}\right)=\frac{S(x)\cdot\nabla S(x)}{\|S(x)\|^2}.$$

命题 8.3 设 F 是 M^n 中一个不包含(对系统 S 来说的)奇点且在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变的非空的闭子集。又设 μ' 是 F 上一个在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变且可通的正规测度。则

$$\int_F\omega^*(x)d\mu'=\int_F\operatorname{div}S\,d\mu'.$$

证 对任一 $x\in F$，简记 $f(x)=S(x)/\|S(x)\|\in\mathscr{F}_1^\#$。$f$ 是一(连续的)映射：$F\to\mathscr{F}_1^\#$。据(8.7)及 $\omega^*(x)$ 的定义，我们只须证

$$\int_F\omega_1(f(x))d\mu'=0. \tag{8.9}$$

因 F 是紧致的，$f(F)$ 是 $\mathscr{F}_1^{\#}$ 中的闭子集。又易见 $q_1^{\#}f$ 是 F 上的恒同映射（$q_1^{\#}$ 是从投射：$\mathscr{F}_1^{\#}\to M^n$），且对任一 $-\infty<t<\infty$ 恒有 $f\phi_t=\chi_t^{\#}f$。故若对 $\mathscr{F}_1^{\#}$ 中任一子集 C，置 $\mu(C)=\mu'(f^{-1}(C))$，则 μ 是 $\mathscr{F}_1^{\#}$ 上一个在 $\chi_t^{\#}(-\infty<t<\infty)$ 下不变且可通的正规测度。由是

$$\int_{\mathscr{F}_1^{\#}}\omega_1(\beta)d\mu=\int_F\omega_1(f(x))d\mu'.$$

这结合 (7.2) 证明 (8.9)。命题证完。

作为本文的结束，我们摘要提出下面的 (A) 及 (B) 来说说。

(A) 本文前面所有的讨论中都假定紧致的 C^∞ 型微分流形 M^n 上有一给定的 C^∞ 型 Riemann 度量。今设 M^n 上另有一 C^∞ 型 Riemann 度量，并记 $\mathscr{F}_l'$ 为对这度量而言的 M^n 的正规 l-标架从 $(1\leqslant l\leqslant n)$。则对任一 l-标架 $\alpha\in\mathscr{F}_l'$，有唯一的三角式方阵 $\Gamma'(\alpha)$，其对角线元素都 >0，对角线下面的元素都 $=0$，使得 $\alpha\cdot\Gamma'(\alpha)\in\mathscr{F}_l^{\#}$（这 $\mathscr{F}_l^{\#}$ 意义同前，它是 M^n 上对原来的 Riemann 度量而言的正规标架从）。这 Γ' 是从 $\mathscr{F}_l'$ 到 (l 阶)方阵空间中的(连续)映射。对 M^n 的任一切向量 u 及 M^n 在其上一点处 l 个(有顺序的)切向量组 $\beta=(v_1,v_2,\cdots,v_l)$，就这另一个 Riemann 度量来说，记 $\|u\|'$ 及 $\nu'(\beta)$ 分别为 u 的长度及 $v_1,v_2,\cdots,v_l$ 所张的平行多面体的体积。据 $\mathscr{F}_l'$ 的紧致性及 Γ' 的连续性等，则存在数 $r_0>r_1>0$ 使得

(i) 对 M^n 的任一切向量 u，恒有 $r_0\|u\|\leqslant\|u\|'\leqslant r_1\|u\|$。

(ii) 对任一 $1\leqslant l\leqslant n$ 及 M^n 在其上任一点处任意 l 个切向量组 β，恒有 $r_0\nu(\beta)\leqslant\nu'(\beta)\leqslant r_1\nu(\beta)$。

据这里 (i),(ii) 及以前 (5.2)，命题 4.5 及 $\mathscr{L}_l$ 上变换 ψ_t 的定义等等，易验证 M^n 对所给系统 S 来说一常点的正向与负向格数与 M^n 的 (C^∞ 型) Riemann 度量的选取无干。用类似的办法，我们还可检验出本文前面的讨论中与 M^n 的 (C^∞ 型) Riemann 度量的选取无干的许多结论。但此处，这方面的细节讨论将从略。

(B) 本文前面讨论中，普遍假设 M^n 是紧致的。但在非紧致

的流形一情况下，也仍有些相当的结果。举一例来说，设在一非紧致的（且可度量的）C^∞ 型 Riemann 流形 $\widetilde{M}^n$ 上有一 C^1 型单参数变换群 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$。如所知，这变换群必由 $\widetilde{M}^n$ 上一 C^1 型常微系统 S 所产生。今设 $\widetilde{M}^n$ 中有一非空的紧致子集 F，不包含 S 的奇点且在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变，则如前，对于这样的 F，我们可定义它的格数，并且这时，定理 4.2 仍成立。这方面的细节讨论，此处也将从略。

参 考 文 献

[1] B. B. 涅梅茨基及 B. B. 斯捷巴诺夫著，微分方程定性论，下册，科学出版社，1959.

[2] Peixoto, M., Structural stability on two-dimensional manifolds, *Topology*, 1(1962), 101—120.

[3] Steenrod, N., The Topology of Fibre Bundles, Princeton, 1951.

第二章 典范方程组

设 M^n 是一 n 维紧致的 C^∞ 型 Riemann 流形，$n \geqslant 2$，其上有一 C^1 型常微系统 S. 所谓 S 的典范方程组是以一定的构造式办法联系 S 的某类常微分方程组. 我们在文献 [2] 中已开始引入和讨论这种方程组，其目的是要把流形上常微系统的相空间的探讨循适当途径化成欧氏空间中的常微分方程组的讨论. 这方法有效，例如 [3].

可是，在 [2] 中我们采用的办法有若干不便的地方，特别是，不便于处理系统 S 的扰动. 此外，为得出某种一致逼近定理，我们在 [2] 中不得不假定 S 是 C^2 型系统. 这章的主要目的是要循另一种方式给出典范方程组，并由此进一步讨论扰动及逼近等问题，从而这理论初步比较完备. 这些内容见本章 §2. 典范方程组之所以有用，一方面是由于取它沿 0 解的线性逼近后所得的线性方程组的系数函数可适当反映系统 S 在 M^n 的切空间丛上所导出的单参数变换群的某些有用性质(包括一些诸态备经性质，比如[1]中表明的那样)；另一方面是由于可采用典型的常微分方程式论方法，它对 S 的相空间的探讨，便于作定量估计和计算.

在典范方程组的一般性质比较清楚后，我们在 § 3 中涉及到线性方程组及扰动后的方程组二者相空间拓扑结构的关系的一部分讨论，办法是构造式的. 类似想法曾经在 [4] 中应用过，通过这初步应用，我们可察看到这方式对于处理某些扰动问题将是很适宜的，但现在我们讨论的对象比较复杂. 事实上，我们将遇到常微分方程组构成的族的讨论.

在目前关于微分动力体系结构稳定这类拓扑性质的探讨中，已经流行的方法主要有两种：一、或许可称之为稳定与非稳定流形办法，这是比较几何式的，例如可参看 Smale 的综合性报导[6]；

二、泛函分析方式，例如可参看 Robbin 的综合性报导[5]．自然，二者可综合运用，并已取得重要成果． 这些办法目前已有的发展主要似是在微拓变换作为离散动力体系来讨论这方面．但是，如所周知，这种离散动力体系本身（通过所谓扭扩这途径）将是流形上常微系统的（但重要的）特款，而常微系统有理由仍须受到注意．

我们希望可应用典范方程组到关于微分动力体系的一些进一步的问题中．但关于应用，我们在本章中没有多涉及．作为应用的一个范例，我们只在 § 4 中用它们来证明 M^n 上一 Anosov 系统的半结构稳定性． 在 Anosov 微拓变换这特款下有一相当的结果，原给在 Walters[7] 中（证明用泛函分析方式）[1]．

一般名词和记号 M^n 普遍表示一 n 维紧致的微分流形，$n \geq 2$． 微分流形将假定是 C^∞ 型的，并在 M^n 上取定一 C^∞ 型 Riemann 度量．对 M^n 上同一点处的切向量 u_1 及 u_2，记 $\langle u_1, u_2\rangle$ 为对于所取的 Riemann 度量来说的内积；于是 u_1 的长度

$$\|u_1\| = \langle u_1, u_1\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

记 $\mathscr{C}$ 为 M^n 的切空间丛，以 $\sigma: \mathscr{C} \to M^n$ 为丛投射．$\mathscr{C}$ 也自然地构成一 C^∞ 型微分流形． M^n 在其上一点 x 处的切空间 $\sigma^{-1}(x)$ 将记作 $\mathscr{C}_x$．

记 $\mathscr{X}$ 为 M^n 上所有的 C^1 型常微系统（即 C^1 型切向量场）作成的集合．$\mathscr{X}$ 自然地构成一线性空间．对 $X \in \mathscr{X}$，记

$$\|X\|_0 = \sup_{x \in M^n} \|X(x)\|,$$

称为 X 的 C^0 模（M^n 紧致而 X 连续，故 $\|X\|_0 < \infty$）．又记

$$\|X\|_1 = \|X\|_0 + \sup_{Y \in \mathscr{X}, \|Y\|_0 = 1} \|\nabla_Y X\|_0$$

1）附记（1973年12月1日补充）．在本文投稿以后，作者获知 K. Kato-A. Morimoto 发表了关于一紧致微分流形 M^n 上的 Anosov 系统的半结构稳定性的一个结果（Topology, Vol. 12, No. 3, August 1973），涉及的连续流比本文的略广．但另一方面，采用本文的办法，我们易看出这半结构稳定性对于 M^n 中具有双曲型构造的不变闭子集也成立（见定理 4.6）．

($\nabla_Y X$ 表示 X 对 Y 取共变微商)，称为 X 的 C^1 模.于是 $\mathscr{X}$ 分别就 C^0 模及 C^1 模作成两个模线性空间.

一常微系统 $S\in\mathscr{X}$ 的一个在 $\mathscr{X}$ 中的 C^0 邻域是指在 $\mathscr{X}$ 上取 C^0 模所得的模线性空间中一开子集包含 S. 它的一 C^1 邻域是指取 C^1 模所得的 Banach 空间中一开子集包含 S. 易看出 S 的一 C^0 邻域也是它的一 C^1 邻域.

我们将考虑一给定的系统 $S\in\mathscr{X}$. S 在 M^n 上导出一 C^1 型单参数变换群

$$\phi_t: M^n\to M^n,\ -\infty<t<\infty,$$

从而在 $\mathscr{C}$ 上也导出一单参数变换群

$$\Phi_t=d\phi_t:\mathscr{C}\to\mathscr{C},\ -\infty<t<\infty.$$

交换式 $\phi_t\sigma(u)=\sigma\Phi_t(u)$ 对所有 $(t,u)\in(-\infty,\infty)\times\mathscr{C}$ 成立.

§1. 典范方程组的回顾

我们工作的一部分基础包括在较早的[1,2]中. 为便于进一步讨论，我们须先简要回顾[1,2]中一部分内容.

考虑一给定的常微系统 $S\in\mathscr{X}$ 及它分别在 M^n 上及 $\mathscr{C}$ 上导出的单参数变换群

$$\phi_t(-\infty<t<\infty)\ 及\ \Phi_t(-\infty<t<\infty).$$

命 $\mathscr{U}_l$ 为 M^n 的 l-标架丛, $1\leqslant l\leqslant n$. 对任意的 $\gamma=(u_1, u_2,\cdots,u_l)\in\mathscr{U}_l$ 及 $t\in(-\infty,\infty)$, 置

$$\Phi_t(\gamma)=(\Phi_t(u_1),\Phi_t(u_2),\cdots,\Phi_t(u_l)),$$

这给出一单参数变换群

$$\Phi_t:\mathscr{U}_l\to\mathscr{U}_l(-\infty<t<\infty).$$

命 $\mathscr{F}_l$ 及 $\mathscr{F}_l^{\#}$ 分别为 M^n 的正交及正规 l-标架丛, $q_l:\mathscr{F}_l\to M^n$ 及 $q_l^{\#}:\mathscr{F}_l^{\#}\to M^n$ 为丛投射. 由通常的 Gram-Schmidt 正交化手续，我们得映射

$$\pi:\mathscr{U}_l\to\mathscr{F}_l.$$

这是说，对任一 $\gamma\in\mathscr{U}_l$, 存在唯一的(实系数) l-阶三角式方阵 $\Gamma(\gamma)$ 使

(i) $\Gamma(\gamma)$ 的对角线系数都是 1，对角线下面的系数都是 0，

(ii) $\gamma\cdot\Gamma(\gamma)$ 是正交 l- 标架。

于是取 $\pi(\gamma)=\gamma\cdot\Gamma(\gamma)$。对任一 $(t,\gamma)\in(-\infty,\infty)\times\mathscr{F}_l$，置 $\chi_t(\gamma)=\pi\Phi_t(\gamma)$，这给出一单参数变换群

$$\chi_t:\mathscr{F}_l\to\mathscr{F}_l,\ -\infty<t<\infty.$$

命 $\pi^{\#}:\mathscr{F}_l\to\mathscr{F}_l^{\#}$ 为由

$$\pi^{\#}(w_1,w_2,\cdots,w_l)=\left(\frac{w_1}{\|w_1\|},\ \frac{w_2}{\|w_2\|},\cdots,\ \frac{w_l}{\|w_l\|}\right)$$

给出的映射。对任一 $(t,\gamma)\in(-\infty,\infty)\times\mathscr{F}_l^{\#}$，置 $\chi_t^{\#}(\gamma')=\pi^{\#}\chi_t(\gamma)$，这给出一单参数变换群

$$\chi_t^{\#}:\mathscr{F}_l^{\#}\to\mathscr{F}_l^{\#},\ -\infty<t<\infty.$$

(见 [1，§§1,3].) 交换式

$$\phi_t q_l=q_l\chi_t,\phi_t q_l^{\#}=q_l^{\#}\chi_t^{\#}$$

及

$$\chi_t^{\#}\pi^{\#}\pi=\pi^{\#}\pi\Phi_t$$

都成立。我们注意 $\mathscr{F}_l^{\#}$(作为拓扑空间来说)是一紧致可度量空间，我们将取定$\mathscr{F}_l^{\#}$ 上一度量。

命

$$\mathrm{proj}_k:\mathscr{U}_l\to\mathscr{C}\quad 1\leqslant k\leqslant l,$$

为映射，由 $\mathrm{proj}_k(u_1,u_2,\cdots,u_l)=u_k$ 给出。

命题 1.1 对任意的

$$\gamma=(u_1,u_2,\cdots,u_l)$$

及

$$\gamma'=(\gamma_1u_1,\gamma_2u_2,\cdots,\gamma_lu_l)\in\mathscr{F}_l,\ \gamma_i\in(-\infty,\infty),$$

$$\gamma''=(u_1,u_2,\cdots,u_{l-1},w_1,\cdots,w_{l'-l},u_l)\in\mathscr{F}_{l'}\ l\leqslant l',$$

我们有

$$\mathrm{proj}_l\chi_t(\gamma')=\gamma_l\mathrm{proj}_l\chi_t(\gamma),\|\mathrm{proj}_l\chi_t(\gamma)\|\geqslant\|\mathrm{proj}_{l'}\chi_t(\gamma'')\|.$$

因 S 在 M^n 上是 C^1 型的，对任给的一 $\gamma\in\mathscr{F}_l$，$\|\mathrm{proj}_k\chi_t(\gamma)\|$ 对 $t\in(-\infty,\infty)$ 连续地可微；因而可定义 M^n 的正交 l-标架丛 $\mathscr{F}_l$ 上的函数

$$\omega_k(\gamma)=\left.\frac{d\|\mathrm{proj}_k\chi_t(\gamma)\|}{dt}\right|_0,\quad k=1,2,\cdots,l$$

(见[1,§2]),它们将称为 S 的示性函数。

命题 1.2 $\omega_k(\gamma)(k=1,2,\cdots,l)$,都是 $\mathscr{F}_l$ 上的连续函数。

因 $\mathscr{F}_l^{\#}$ 是 $\mathscr{F}_l$ 的子丛,故 $\omega_k(\gamma)$ 也在 $\mathscr{F}_l^{\#}$ 上有定义。

命题 1.3 对任一 $(t,\gamma)\in(-\infty,\infty)\times\mathscr{F}_l^{\#}$,

$$\log\|\mathrm{proj}_k\chi_t(\gamma)\|=\int_0^t\omega_k(\chi_s^{\#}(\gamma))ds,\quad k=1,2,\cdots,l.$$

若 γ_1 及 γ_2 是 M^n 上同一点处同一 l 维线性子切空间内的正规 l-标架,则

$$\sum_{k=1}^{l}\omega_k(\gamma_1)=\sum_{k=1}^{l}\omega_k(\gamma_2).$$

这里前一论断见[1,§3]. 后一论断当 $l=n$ 时见[1,§8]. 若命 $\theta_l:\mathscr{F}_n\to\mathscr{F}_l$ 为由

$$\bar\theta_l(u_1,u_2,\cdots,u_n)=(u_1,u_2,\cdots,u_l)$$

给出的映射,易看出

$$\bar\theta_l\chi_t(\gamma)=\chi_t(\bar\theta_l(\gamma))$$

从而

$$\omega_k(\bar\theta_l(\gamma))=\omega_k(\gamma)$$

对

$$\gamma\in\mathscr{F}_n,\quad 1\leqslant k\leqslant l.$$

又若 γ_1 及 γ_2 满足这命题叙述中要求,则可取 γ_1' 及 $\gamma_2'\in\mathscr{F}_n^{\#}$ 使

$$\bar\theta_l(\gamma_i')=\gamma_i,\quad i=1,2,$$

且

$$\mathrm{proj}_k(\gamma_1')=\mathrm{proj}_k(\gamma_2'),$$

从而

$$\mathrm{proj}_k\chi_t(\gamma_1')=\mathrm{proj}_k\chi_t(\gamma_2')$$

对 $l<k\leqslant n$. 从这些,易看出这后一论断对一般 l 也成立。

任给 $\beta\in\mathscr{F}_n^{\#}$. 因 $\chi_t(\beta)=\Phi_t(\beta)\cdot\Gamma(\Phi_t(\beta))$,故可写

$$\Phi_t(\beta)=\chi_t^{\#}(\beta)C_\beta(t),$$

其中 $C_\beta(t)$ 是三角式方阵,其对角线系数顺次是 $\|\mathrm{proj}_k\chi_t(\beta)\|$

$(k=1,2,\cdots,n)$，对角线下面的系数都是 0. $C_\beta(t)$ 对 $t\in(-\infty,\infty)$ 连续地可微，且满足一方阵方程

$$\frac{dC_\beta(t)}{dt}=R_\beta(t)C_\beta(t),\ -\infty<t<\infty$$

(见 [1, §8]).

我们普遍以 E^p 表 p 维欧氏空间. 为以后应用方便，线性常微分方程组

$$\frac{dy}{dt}=yR_\beta(t)^{tr},\ -\infty<t<\infty,\ y\in E^n, \qquad (R_\beta)$$

将称作 S 以 β 为基的线性化方程组. 它的几何解释：若 u 是 M^n 在 $b=q_n^\#(\beta)$ 处的任一个切向量，则 $\Phi_t(u)$ 对于 M^n 在 $\phi_t(b)$ 处的正规n-标架 $\chi_t^\#(\beta)$ 来说的坐标

$$(\langle\Phi_t(u),\mathrm{proj}_1\chi_t^\#(\beta)\rangle,\langle\Phi_t(u),\mathrm{proj}_2\chi_t^\#(\beta)\rangle,\cdots,\langle\Phi_t(u),\ \mathrm{proj}_n\chi_t^\#(\beta)\rangle),$$

$t\in(-\infty,\infty)$，是这方程组的一解. 特别地，$S(\phi_t(b))$ 对 $\chi_t^\#(\beta)$ 的坐标

$$(\langle S(\phi_t(b)),\mathrm{proj}_1\chi_t^\#(\beta)\rangle,\langle S(\phi_t(b)),\mathrm{proj}_2\chi_t^\#(\beta)\rangle,\cdots,\langle S(\phi_t(b)),\ \mathrm{proj}_n\chi_t^\#(\beta)\rangle),$$

$t\in(-\infty,\infty)$，是 (R_β) 的一解(因 $\Phi_t(S(b))=S(\phi_t(b))$)；这将叫作 (R_β) 的主解.

对任一 p 阶方阵 $C=(C_{ij})$，记

$$\mathcal{N}(C)=\sup_{y\in E^p,\|y\|=1}\|yC\|,\ \mathrm{diag}_kC=c_{kk},\ k=1,2,\cdots,p.$$

在 $\mathscr{F}_n^\#$ 上，考虑方阵函数 $\omega^\circ(\beta)=R_\beta(0)^{tr}$.

命题 1.4 $\mathscr{F}_n^\#$ 上的方阵函数 $\omega^\circ(\beta)$ 具有性质：

(i) $\omega^\circ(\beta)$ 在 $\mathscr{F}_n^\#$ 上连续，且有界

$$\sup_{\beta\in\mathscr{F}_n^\#}\mathcal{N}(\omega^\circ(\beta))<\infty;$$

(ii) $\omega^\circ(\beta)$ 是 n 阶三角式方阵，其对角线系数顺次是

$$\mathrm{diag}_k\omega^\circ(\beta)=\omega_k(\beta),\ k=1,2,\cdots,n,$$

其对角线上面的系数都是 0;

(iii) $\omega^\circ(\chi_t^\#(\beta)) = R_\beta(t)^{tr}$ 对所有 $t\in(-\infty,\infty)$.

看[1, §8]. 这里(iii)易从上面提到的线性化方程组的几何解释得出. 从(i)及(iii), $R_\beta(t)^{tr}$ 对 $(t,\beta)\in(-\infty,\infty)\times\mathscr{F}_n^\#$ 连续,且在 $(-\infty,\infty)\times\mathscr{F}_n^\#$ 上有界.

任给 $u\in\mathscr{C}$. $\Phi_t(u)\in\mathscr{C}$ $(-\infty<t<\infty)$, 是沿 S 过 $\sigma(u)$ 的积分线切于 M^n 的向量场,它对 t 连续地可微,因而可考虑沿这积分线的共变微商 $\nabla_t\Phi_t(u)$. 同样地, $\mathrm{proj}_k\chi_t^\#(\beta)\in\mathscr{C}$ 对任给的 $\beta\in\mathscr{F}_n^\#(-\infty<t<\infty)$, 也对 t 连续地可微,并可取沿 S 过 $q_n^\#(\beta)$ 的积分线的共变微商 $\nabla_t\mathrm{proj}_k\chi_t^\#(\beta)$ $(k=1,2,\cdots,l)$ (见[1,§2]). 另一方面, S 对 $w\in\mathscr{C}_x$, $x\in M^n$, 取共变微商 $\nabla_w S$ 给出 $\mathscr{C}_x$ 中一线性变换

$$\mathrm{End}_S:\mathscr{C}_x\to\mathscr{C}_x.$$

对 M^n 上同一点处的 l-标架

$$\gamma=(w_1,w_2,\cdots,w_l) \text{ 及 } \gamma'=(w_1',w_2',\cdots,w_l'),$$

记 $\langle\gamma,\gamma'\rangle$ 为 l 阶方阵 $(\langle w_i,w_j'\rangle)$, 称为 γ 与 γ' 的相关矩阵; 并记 $\nabla_S\Phi_t(\gamma)=(\nabla_S\Phi_t(w_1),\nabla_S\Phi_t(w_2),\cdots,\nabla_S\Phi_t(w_l))$. 若 $\gamma\in\mathscr{F}_l^\#$, 记

$$\nabla_S\chi_t^\#(\gamma)=(\nabla_S\mathrm{proj}_1\chi_t^\#(\gamma),\ \nabla_S\mathrm{proj}_2\chi_t^\#(\gamma),\cdots,\ \nabla_S\mathrm{proj}_l\chi_t^\#(\gamma)).$$

命题 1.5 对任给的一 $\beta\in\mathscr{F}_l^\#$, 我们有

$$R_\beta(0)=\langle\beta,(\nabla_S\Phi_t(\beta)-\nabla_S\chi_t^\#(\beta))_{t=0}\rangle,$$

$$R_\beta(0)+R_\beta(0)^{tr}=\langle\beta,(\nabla_S\Phi_t(\beta))_{t=0}\rangle+\langle(\nabla_S\Phi_t(\beta))_{t=0},\beta\rangle.$$

这见[1, §8]. 我们补充

命题 1.6 对任给的一 $u\in\mathscr{C}$, 我们有

$$\nabla_u S=(\nabla_S\Phi_t(u))_{t=0}.$$

证 取 M^n 中绕 $\sigma(u)$ 的一 C^∞ 型局部坐标系 $g:G\to M^n$, $g(y_0)=\sigma(u)$. 则 S 表成 G 上一 C^1 型常微分方程组

$$\frac{dy^i}{dt}=P^i(y),\quad y=(y^1,y^2,\cdots,y^n)\in G,\quad i=1,2,\cdots,n,$$

而 $\Phi_t(u)$ 部分地表成 $\lambda(t)=(\lambda^1(t),\lambda^2(t),\cdots,\lambda^n(t))\in E^n$ 对 $t\in$ 某一区间 (t',t'')（它包含0），$dg(\lambda(0))=u$。于是 $(\nabla_S\Phi_t(u))_{t=0}$ 就这坐标系来说的 n 个分支顺次是

$$\left.\frac{d\lambda^i(t)}{dt}\right|_{t=0}+\sum_{j,k}^{n}\Gamma^i_{j,k}\lambda^j(0)P^k(y_0)$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial P^i}{\partial y^j}\right|_{y=y_0}+\sum_{k=1}^{n}\Gamma^i_{jk}P^k(y_0)\right)\lambda^j(0),$$
$$i=1,2,\cdots,n,$$

其中 Γ^i_{jk} 表 Christoffel 记号。但这式右端也恰是 S 就这坐标系来说，在 y_0 处沿向量 $\lambda(0)$ 取共变微商后的 n 个分支。这证明命题。

注 实际上，$\mathscr{F}^\#_l$ 上的函数 $\omega_k(\gamma)$ 完全由 $\mathrm{End}_S:\mathscr{C}\to\mathscr{C}$ 确定，且对 γ 中 n 个向量的顺序的任一个置换来说不变。因为，若在 M^n 的单位切球丛 $\tilde{\mathscr{C}}$ 上定义函数

$$\tilde{\omega}(u)=\langle u,\mathrm{End}_S(u)\rangle,\ u\in\tilde{\mathscr{C}},$$

则据命题 1.4—1.6，

$$\omega_k(\gamma)=\tilde{\omega}(\mathrm{proj}_k\gamma),\ k=1,2,\cdots,n.$$

任给 M^n 上同一点处的正规 n-标架 β 及 β'。易验证相关矩阵 $\langle\beta,\beta'\rangle$ 是正交方阵，且

$$\langle\beta,\beta'\rangle^{tr}=\langle\beta',\beta\rangle,\ \beta=\beta'\langle\beta,\beta'\rangle^{tr}.$$

简记

$$V_{\beta\beta'}(t)=\langle\chi^\#_t(\beta),\ \chi^\#_t(\beta')\rangle^{tr},\ t\in(-\infty,\infty),\tag{1.1}$$

这些也都是正交方阵。$V_{\beta\beta'}(t)$ 对 t 连续地可微。事实上，

$$\frac{dV_{\beta\beta'}(t)}{dt}=\langle\chi^\#_t(\beta),\nabla_S\chi^\#_t(\beta')\rangle^{tr}+\langle\nabla_S\chi^\#_t(\beta),\chi^\#_t(\beta')\rangle^{tr}$$

（见[1，§2]）。从前面所述关于线性化方程组的解的几何解释，我们易看出：$(R_{\beta'})$ 是由 (R_β) 经过变数变换 $y'=yV_{\beta\beta'}(t)^{tr}$ 后所得的方程组，即

$$R_{\beta'}(t)^{tr}=V_{\beta\beta'}(t)R_\beta(t)^{tr}V_{\beta\beta'}(t)^{tr}+V_{\beta\beta'}(t)\frac{dV_{\beta\beta'}(t)^{tr}}{dt}.\tag{1.2}$$

现在，命M为S的所有常点作成的集合；显然，M在$\phi_t(-\infty<t<\infty)$下不变．命$\mathscr{D}$为S的共轭丛，这是$\mathscr{C}$的一子丛，以M为底空间，其在任一点$x\in M$处的纤维由M^*上所有与$S(x)$正交的切向量组成．记$\rho:\mathscr{D}\to M$为丛投射，$\mathscr{D}$在一点$x\in M$处的纤维$\rho^{-1}(x)$将记作$\mathscr{D}_x$．对任一$(t,u)\in(-\infty,\infty)\times\mathscr{D}$，取$\psi_t(u)$为$\Phi_t(u)\in\mathscr{C}_{\phi_t\rho(u)}$在$\mathscr{D}_{\phi_t\rho(u)}$上的垂直投影．这给出一单参数变换群

$$\psi_t:\mathscr{D}\to\mathscr{D},\quad -\infty<t<\infty.$$

命$\mathscr{E}$为$\mathscr{F}^{\#}_{n-1}$的子丛，它以M为底空间，它在任一点$x\in M$处的纤维由一切使$w_k\in\mathscr{D}_x$的正规$(n-1)$-标架

$$\gamma=(w_1,w_2,\cdots,w_{n-1})$$

组成．记

$$\tau:\mathscr{E}\to M$$

为丛投射．对任意的$t\in(-\infty,\infty)$及

$$\gamma=(w_1,w_2,\cdots,w_{n-1}),$$

记

$$\psi_t(\gamma)=(\psi_t(w_1),\psi_t(w_2),\cdots,\psi_t(w_{n-1}))\in\mathscr{U}_{n-1},$$

于是置$\Theta_t(\gamma)=\pi^{\#}\pi\psi_t(\gamma)\in\mathscr{F}^{\#}_{n-1}$（即按 Gram-Schmidt 手续将$\psi_t(\gamma)$正规化）．这给出一单参数变换群

$$\Theta_t:\mathscr{E}\to\mathscr{E},\ -\infty<t<\infty.$$

记

$\iota^*:\mathscr{E}\to\mathscr{F}^{\#}_n$为由

$$\iota^*(\gamma)=(S(\tau(\gamma))/\|S(\tau(\gamma))\|,\gamma),\quad \gamma\in\mathscr{E},$$

给出的映射．明显地，交换式

$$\phi_t\tau=\tau\Theta_t:\mathscr{E}\to M^*\ \text{及}\ \chi^{\#}_t\iota^*=\iota^*\Theta_t:\mathscr{F}^{\#}_n\to\mathscr{F}^{\#}_n$$

都成立．对$\gamma\in\mathscr{E}$，命

$$\omega^*_k(\gamma)=\omega_{k+1}(\iota^*(\gamma))-\omega_1(\iota^*(\gamma)),\quad k=1,2,\cdots,n-1.$$

这些都是$\mathscr{E}$上连续且有界的函数(见 [2，§2])．

任给$\alpha\in\mathscr{E}$，我们可取$\Theta_t(\alpha)$作为线性空间$\mathscr{D}_{\phi_t(a)}$的坐标系，其中$a=\tau(\alpha)$．于是，与前面方程组(R_β)的情况相类，对任给的一$u\in\mathscr{D}_a$，$\psi_t(u)\in\mathscr{D}_{\phi_t(a)}$对于坐标系$\Theta_t(\alpha)$来说的坐标

$$(\langle\psi_t(u),\mathrm{proj}_1\Theta_t(\alpha)\rangle,\langle\psi_t(u),\mathrm{proj}_2\Theta_t(\alpha)\rangle,\cdots,$$

$$\langle \phi_t(u), \mathrm{proj}_{n-1}\Theta_t(\alpha)\rangle), t \in (-\infty, \infty),$$

都是一方程组

$$\frac{dy}{dt} = y\tilde{R}_\alpha(t)^{tr}, \quad -\infty < t < \infty, \quad y \in E^{n-1} \qquad (\tilde{R}_\alpha)$$

的一解. 这里 $\tilde{R}_\alpha(t)$ 是 $n-1$ 阶三角式方阵(由 S 及 α 确定), 它对 $t \in (-\infty, \infty)$ 连续且在 $(-\infty, \infty)$ 上有界. 实际上, 我们有

$$R_{\iota^*(\alpha)}(t) = \begin{pmatrix} \omega_1(\chi_t^\#(\iota^*(\alpha))) & \cdot \\ 0 & \tilde{R}_\alpha(t) \end{pmatrix}$$

(见 [2, 第 8 页]).

对于方程组 $(\tilde{R}_\alpha)$, 我们作变数变换

$$z = y/\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|,$$

这里 $\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\| \neq 0$, 因 $\tau(\alpha) \in M$. 经过这变换后, 方程组 $(\tilde{R}_\alpha)$ 变换成

$$\frac{dz}{dt} = zR_\alpha^*(t)^{tr}, \quad -\infty < t < \infty, \quad z \in E^{n-1}, \qquad (R_\alpha^*)$$

其中

$$R_\alpha^*(t) = \tilde{R}_\alpha(t) - \omega_1(\iota^*\Theta_t(\alpha))I_{n-1}$$

(I_p 表 p 阶单位方阵). (R_α^*) 将叫作 S 以 α 为基的(＊)一线性化方程组. 这样的方程仅对 S 的常点处那些正规 $(n-1)$-标架 $\alpha \in \mathscr{E}$ 有定义.

考虑 $\mathscr{E}$ 上的方阵函数 $\omega\circledast(\alpha) = R_\alpha^*(0)^{tr}$.

命题 1.7 $\mathscr{E}$ 上的方阵函数 $\omega\circledast(\alpha) = R_\alpha^*(0)^{tr}$ 具有性质:

(i) $\omega\circledast(\alpha)$ 在 $\mathscr{E}$ 上连续且有界.

(ii) $\omega\circledast(\alpha)$是三角式方阵, 其对角线系数是

$$\mathrm{diag}_k\,\omega\circledast(\alpha) = \omega_k^*(\alpha), \quad k = 1, 2, \cdots, n-1,$$

其对角线上面的系数都是 0.

(iii) $\omega\circledast(\Theta_t(\alpha)) = R_\alpha^*(t)^{tr}$ 对所有 $t \in (-\infty, \infty)$.

这见 [2, 第 9 页]. 这也易从命题 1.4 推出.

若 $\alpha = (w_1, w_2, \cdots, w_{n-1})$ 及 $\alpha' = (w'_1, w'_2, \cdots, w'_{n-1}) \in \mathscr{E}$ 使$\tau(\alpha) = \tau(\alpha')$, 我们记 $V_{\alpha\alpha'}(t) =$ 相关矩阵 $\langle\Theta_t(\alpha), \Theta_t(\alpha')\rangle^{tr}, t \in$

$(-\infty,\infty)$. 这些都是正交方阵，且对 t 连续地可微（参看前面(1.1)等）. 作变数变换 $z'=zV_{\alpha\alpha'}(t)''$，则方程组 (R_α^*) 变换成 $(R_{\alpha'}^*)$，即

$$R_{\alpha'}^*(t)''=V_{\alpha\alpha'}(t)R_\alpha^*(t)''V_{\alpha\alpha'}(t)''+V_{\alpha\alpha'}(t)\frac{dV_{\alpha\alpha'}(t)''}{dt}. \quad (1.3)$$

特别地，当 $\{\phi_t(\tau(\alpha))\in M\,|\,t\in(-\infty,\infty)\}$ 是 S 的一周期轨道以 T 为周期时，考虑方阵方程

$$\frac{dZ}{dt}=ZR_\alpha^*(t)'',\ -\infty<t<\infty$$

的解 $Z(t)$, $Z(0)=I_{n-1}$，则方阵 $Z(T)\langle\Theta_T(\alpha),\alpha\rangle$ 的特征根即是关于周期轨道的通常所指的特征指数（见[2，命题(4.16)]）.

由于 M^n 是紧致的 C^∞ 型 Riemann 流形，据微分几何学中的论述，我们可取（通常叫作）指数映射

$$\exp:\mathscr{C}\to M^n.$$

它具有下述性质：exp 是 C^∞ 型的．存在一数

$$\zeta_0>0, \quad (1.4)$$

使得对每一给定的 $x\in M^n$，exp 将 $\{u\in\mathscr{C}_x\,|\,\|u\|<\zeta_0\}$ 微拓变换至 x 在 M^n 中的一邻域上．又对每一 $u\in\mathscr{C}_x$，exp 把集合

$$\{w\in\mathscr{C}_x\,|\,w=su,\ 0\leqslant s\leqslant 1\}$$

映至 M^n 的一条以 x 为起点且取初始切向 u 的测地线弧上，这弧以 $\exp(u)$ 为终点，其弧长 $=\|u\|$.

本节下面设 S 是 M^n 上一 C^q 型系统，$q\geqslant 1$.

任给 $\alpha\in\mathscr{E}$．考虑映射

$$\mathscr{P}_\alpha:E^n\to\mathscr{D}$$

由 $\mathscr{P}_\alpha(y)=\sum_{k=1}^{n-1}z^k\mathrm{proj}_k\Theta_t(\alpha)\,(y=(t,z^1,z^2,\cdots,z^{n-1})\in E^n)$ 给出．由于 S 是 M^n 上的 C^q 型系统，$\mathscr{D}$ 是 $\mathscr{C}$ 的 $2n-1$ 维 C^q 型子微分流形，而 $\mathscr{P}_\alpha$ 是一 C^q 型映射．命 $\mathring{R}_\alpha$ 为集合

$$\{y\in(t,z)\in E^n\,|\,\|z\|<\zeta_0\}$$

中所有使 $\exp\mathscr{P}_\alpha:E^n\to M^n$ 在 y' 处正则的点 y' 作成的集合，这是

E^n 中一开子集，包含 t-轴．于是 $\hat{K}_\alpha$ 上存在唯一的 C^{q-1} 型常微分方程组

$$\frac{dy}{dt}=\hat{S}_\alpha(y),\quad y\in\hat{K}_\alpha, \tag{$\hat{S}_\alpha$}$$

使得 $d(\exp\mathscr{P}_\alpha)(\hat{S}_\alpha(y))=S(\exp\mathscr{P}_\alpha(y))$（见 [2，第 25 页]）．易见 $\hat{S}_\alpha(t,0)=(1,0)$ 且 $\exp\mathscr{P}_\alpha(t,0)=\phi_t(\tau(\alpha))$．写

$$\hat{S}_\alpha(y)=(\hat{S}_\alpha^1(y),\hat{S}_\alpha^2(y),\cdots,\hat{S}_\alpha^n(y)),\ y=(y^1,\ y^2,\cdots,\ y^n).$$

对于方程组 $(\hat{S}_\alpha)$ 作变数变换 $dt'=\hat{S}_\alpha^1(y)dt$，如果 $\hat{S}_\alpha^1(y)\neq 0$，于是 $(\hat{S}_\alpha)$ 变换成方程组

$$\frac{dy'}{dt'}=1,\quad \frac{dy^{k+1}}{dt'}=\frac{\hat{S}_\alpha^{k+1}(y)}{\hat{S}_\alpha^1(y)},y=(y^1,\ y^2,\cdots,\ y^n)\in\widetilde{K}_\alpha,$$

$$k=1,\ 2,\cdots,\ n-1,$$

其中 $\hat{K}_\alpha=\{y\in\widetilde{K}_\alpha|\hat{S}_\alpha^1(y)\neq 0\}$．我们可将这方程组写成

$$\frac{dy'}{dt}=\widetilde{S}_\alpha(t,\ y'),\ (t,\ y')\in\widetilde{K}_\alpha, \tag{$\widetilde{S}_\alpha$}$$

其中 $\widetilde{S}_\alpha=(\widetilde{S}_\alpha^1,\widetilde{S}_\alpha^2,\cdots,\widetilde{S}_\alpha^{n-1}),\widetilde{S}_\alpha^k=\hat{S}_\alpha^{k+1}/\hat{S}_\alpha^1,\ k=1,2,\cdots,n-1$．易看出，$\widetilde{K}_\alpha$ 是 E^n 中一开子集包含 t-轴，$\widetilde{S}_\alpha(t,0)=0$ 对所有 $t\in(-\infty,\infty)$，且 $\widetilde{S}_\alpha(t,y')$对$(t,y')\in\widetilde{K}_\alpha$ 连续．

因 $\tau(\alpha)\in M,\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|\neq 0$ 对所有 $t\in(-\infty,\infty)$．对方程组$(\widetilde{S}_\alpha)$作变数变换 $z=y'/\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|$，则 $(\widetilde{S}_\alpha)$ 变换成

$$\frac{dz}{dt}=S_\alpha^*(t,\ z),\ (t,z)\in K_\alpha^*, \tag{S_α^*}$$

其中

$$S_\alpha^*(t,z)=\frac{\widetilde{S}_\alpha(t,\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|z)}{\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|}-\omega_1(t^*\Theta_t(\alpha))z, \tag{1.5}$$

$$K_\alpha^*=\{(t,z)\in E^n|(t,\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|z)\in\widetilde{K}_\alpha\}.$$

易看出，K_α^* 是 E^n 中一开子集包含 t-轴，$S_\alpha^*(t,\ 0)=0$ 对所有 $t\in(-\infty,\infty)$，$S_\alpha^*(t,z)$ 对 $(t,z)\in K_\alpha^*$ 连续．(S_α^*) 将叫作 S 以 α 为基的(＊)-典范方程组．

对于 $\alpha\in\mathscr{E}$，命

$$\mathscr{P}_\alpha^*: K_\alpha^* \to M^n$$

为由 $\mathscr{P}_\alpha^*(t,z) = \exp\mathscr{P}_\alpha(t, \|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|z) \in M^n$, $(t,z) \in K_\alpha^*$, 给出的映射。这将称为 S 以 α 为基的(*)-典范映射。这映射在 K_α^* 上都局部地是到 M^n 中的 C^q 型微拓变换，但在整个 K_α^* 上不一定是单映射。因 $\Theta_{s+t}(\alpha) = \Theta_t(\Theta_s(\alpha))$,

$$\begin{aligned} &K_{\Theta_s(\alpha)}^* = \{(t,z) \in E^n \mid (s+t,z) \in K_\alpha^*\}, \\ &\mathscr{P}_{\Theta_s(\alpha)}^*(t,z) = \mathscr{P}_\alpha^*(s+t,z), (t,z) \in K_{\Theta_s(\alpha)}^*. \end{aligned} \tag{1.6}$$

从方程组 $(\hat{S}_\alpha)$ 等的定义，易看出：$(\hat{S}_\alpha)$ 有解过任一给定点 $y \in \hat{R}_\alpha$ (即令在 $q = 1$ 这情况下也是如此)，从而对任给的 $(s,z) \in K_\alpha^*$，典范方程组 (S_α^*) 有解 $z_\alpha(t;s,z) \in K_\alpha^*$ 对 $t \in$ 某一区间 (r'_s, r''_s) (它包含 s) 使得 $z_\alpha(s;s,z) = z$，并且 $\mathscr{P}_\alpha^*$ 将这解映至 S (在 M^n 内)的一积分线中；确切地说，我们有

$$\mathscr{P}_\alpha^*(t, z_\alpha(t;s,z)) = \phi_{\bar{t}}(\mathscr{P}_\alpha^*(s,z)),$$

其中

$$\bar{t} = \int_s^t \frac{dt'}{\hat{S}_\alpha^1(t', \|S(\phi_{t'}(\tau(\alpha)))\| z_\alpha(t';s,z))}.$$

(见 [2，第 29 页及 32 页]；彼处对 $q \geq 2$ 叙述了这样的结论，但在 $q = 1$ 情况下这同样结论成立)。同样理由可看出 $(\tilde{S}_\alpha)$ 过每一点 $(s,z) \in \tilde{K}_\alpha$ 都有解(即令在 $q = 1$ 这情况下)，并且 $\exp\mathscr{P}_\alpha$ 将这解映至 S 的一积分线中。

命题 1.8 设 S 是 M^n 上一 C^1 型常微系统，则 $S_\alpha^*(t,z)$ 对 $(t,z) \in K_\alpha^*$ 连续地可微，且 Jacobi 方阵

$$\left.\frac{\partial S_\alpha^*(t,z)}{\partial z}\right|_{z=0} = R_\alpha^*(t), \quad t \in (-\infty, \infty).$$

看 [2，第 32 页]，当 S 是 C^2 型系统时，$\omega_1(t^*\Theta_t(\alpha))$ 对 t 连续地可微。

定理 1.9 设 S 是 M^n 上一 C^2 型常微系统。又设 S 的奇点都是单式的[1]。则对某一 $\zeta^* > 0$，S 的典范方程组 (S_α^*) 对每一 $\alpha \in \mathscr{E}$

---

1) M^n 上一 C^1 型系统 S 的一奇点 a 叫作单式的，如果 S 在 a 处的 Jacobi 方阵的特征根都≠0。

都在 E^n 的开子集 $K^* = \{(t,z) \in E^n \mid \|z\| < \zeta^*\}$ 上有定义(即,对每一 $\alpha \in \mathscr{E}$, K^* 都包含在 K_α^* 内)。并且,当 z 趋近于 0 时,Jacobi 方阵

$$\frac{\partial S_\alpha^*(t, z)}{\partial z}$$

对所有 $(t,\alpha) \in (-\infty, \infty) \times \mathscr{E}$ 均匀地趋近于 $R_\alpha^*(t)$。

这见[2, 第 33 页]。

对于 M^n 上一 C^2 型常微系统 S,因 $\mathscr{D}_\alpha^*$(对 $\alpha \in \mathscr{E}$)绕每一点 $y = (t,z) \in K_\alpha^*$ 处都局部地是到 M^n 中一 C^2 型微拓变换,我们可考虑 M^n 上原给的 Riemann 度量就 $\mathscr{D}_\alpha^*$ 来说所表成的 K_α^* 上的基本二次型

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}^*(y, \alpha) dy^i dy^j$$

及相应的 Christoffel 记号 $\Gamma_{jk}^{*i}(y, \alpha)$。记

$$\Gamma^*(y,\alpha) = 方阵\,(g_{ij}^*(y,\alpha)).$$

(在这里我们注意,$\Gamma^*(y,\alpha)$ 一般只对 y 连续地可微,而 $\Gamma_{jk}^{*i}(y,\alpha)$ 一般只对 y 连续.)

命题 1.10 设 S 是 M^n 上一 C^2 型常微系统。又设 F 是 M^n 中一闭子集,不包含 S 的奇点。则下述 (i)—(iii) 成立:

(i) 存在一 $\zeta_F^* > 0$ 使得对任一 $\alpha \in \mathscr{E}$,集合

$$J_\alpha^*(F, \zeta_F^*) = \{(t,z) \in E^n \mid \phi_t(\tau(\alpha)) \in F,\ \|z\| \leqslant \zeta_F^*\}$$

包含在 K_α^* 内。

(ii) 对任给的一 $\varepsilon > 0$,存在一 $\delta > 0$ 使得对任意的 $\alpha \in \mathscr{E}$,只要 $(t,z) \in J_\alpha^*(F, \zeta_F^*)$ 且 $\|z\| < \delta$,即有

$$\mathscr{N}\left(\frac{\partial S_\alpha^*(t, z)}{\partial z} - R_\alpha^*(t)\right) < \varepsilon.$$

(iii) $\sup\limits_{(t,z) \in J_\alpha^*(F,\zeta_F),\alpha \in \mathscr{E}} \{\mathscr{N}(\Gamma^*(t, z, \alpha)) + \mathrm{Max}_{i,j,k} \Gamma_{jk}^{*i}(t, z, \alpha)\} < \infty$.

证 这里 (i) 及 (ii) 已给在[2, 第 32 页]中。命 $\zeta_0^* > 0$ 为

一数满足 (i) 及 (ii) 中要求。

根据 [2，引理 (4.5)] 中所述，对任给的一点 $a\in F$ 我们可取一个以 a 作为内点的 M^n 中的闭子集 $F_a\subset M$ 及数 $\xi_a>0$，$t_a>0$ 使得 C^2 型映射 $\mathscr{P}_\alpha: E^n\to\mathscr{D}$ 局限在 E^n 的子集

$$W_a=\langle -t_a, t_a\rangle\times\{z\in E^{n-1}\,|\,\|z\|\leqslant\xi_a\}$$

上时，就映射空间的 C^2 型拓扑来说，对 $\alpha\in\tau^{-1}(F_a)$ 连续。又据 [2，定理 (4.17)]（应用到 M^n 的闭子集 $\{\phi_t(x)\,|\,x\in F_a, t\in\langle -t_a, t_a\rangle\}$ 上），我们不妨设 $W_a\subset\widetilde{K}_\alpha$ 对所有 $\alpha\in\tau^{-1}(F_a)$。因 $\|S(x)\|$ 在 M 上有界，我们可取一 $\zeta_a^*>0$ 使得

$$W_a^*=\langle -t_a, t_a\rangle\times\{z\in E^{n-1}\,|\,\|z\|\leqslant\xi_a^*\}\subset K_\alpha^*$$

对所有 $\alpha\in\tau^{-1}(F_a)$ 从而 C^2 型映射 $\mathscr{P}_\alpha^*: K_\alpha^*\to M^n$ 局限在 W_a^* 上时，就映射空间的 C^2 型拓扑来说，也对所有 $a\in\tau^{-1}(F)$ 连续。又 $W_a^*\times\tau^{-1}(F)$ 紧致。从这些易导出结论：$\Gamma^*(t,z,\alpha)$ 及 $\Gamma_{lk}^{*j}(t,z,\alpha)$ 都在 $W_a^*\times\tau^{-1}(F_a)$ 上有界。于是，因 F 是 M^n 的紧致子集且 F_a 包含 $a\in F$ 作为其内点，我们可取有限个数 F_{a_1}，F_{a_2}，$\cdots$，F_{a_l} 作成 F 的一覆盖。取

$$\zeta_F^*=\mathrm{Min}\{\zeta_{a_1}^*, \zeta_{a_2}^*, \zeta_{a_3}^*, \cdots, \zeta_{a_l}^*\},$$

它显然满足 (i)及(ii)。结合 (1.6) 我们看出对这 ζ_F^*，(iii) 也成立。命题证完。

§2. 另一类典范方程组

本节中，我们将给出不同于上节中提到的典范方程组 (S_α^*) 的另一类典范方程组，并由此讨论 S 的扰动等类问题。这也将给我们一些方便，比如我们可由此把重要的一致逼近定理 1.9 中所假设的 S 是 C^2 型系统弱化成 S 是 C^1 型系统，并且把其中所假定的 S 不含有非单式奇点这条件取消(见定理 2.21)。

本节中，所考虑的系统 S 普遍假定是 C^1 型的。

任给一 $\beta\in\mathscr{F}_n^\#$，考虑映射

$$\mathscr{P}_\beta: E^{n+1}\to M^n$$

由

$$\mathscr{P}_\beta(t,y)=\exp\left(\sum_{k=1}^{n} y^k \operatorname{proj}_k \chi_t^\#(\beta)\right),$$

$$t\in(-\infty,\infty),\ y=(y^1,y^2\cdots,y^n)\in E^n$$

给出。因$\operatorname{proj}_k \chi_t^\#(\beta)\in\mathscr{C}$, $k=1,2,\cdots,n$, 对 t 连续地可微，易看出这是一 C^1 型映射。这映射 $\mathscr{P}_\beta$ 将叫作 S 以 β 为基的典范映射。

由于指数映射 $\exp:\mathscr{C}\to M^n$ 是 C^∞ 型的，所以当 t 给定时，

$$\mathscr{P}_{\beta,t}(y)=\mathscr{P}_\beta(t,y)$$

对 y 也是 C^∞ 型映射。记

$$B_0=\{y\in E^n\,|\,\|y\|<\zeta_0\},\quad \mathscr{L}_0=(-\infty,\infty)\times B_0,$$

其中 ζ_0 同(1.4)中。$\mathscr{L}_0$ 是 E^{n+1} 中一开子集。

因对每一 $x\in M^n$, exp 将

$$\bar{\mathscr{C}}_x=\{u\in\mathscr{C}_x\,|\,\|u\|<\zeta_0\}$$

微拓变换至 M^n 中，所以当 t 给定时，B_0 上存在唯一的切向量场 $S_\beta(t,y)(\in E^n)$，使

$$d\mathscr{P}_{\beta,t}(S_\beta(t,y))=d\mathscr{P}_\beta(0,S_\beta(t,y))$$
$$=S(\mathscr{P}_\beta(t,y))-d\mathscr{P}_\beta\left(\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{(t,y)}\right).\tag{2.1}$$

这样，我们得出一常微分方程组

$$\frac{dy}{dt}=S_\beta(t,y),\quad (t,y)\in\mathscr{L}_0{}^{1)},\tag{S_β}$$

叫作 S 以 β 为基的典范方程组。

对每一 $t\in(-\infty,\infty)$，我们也可以看出 B_0 上有切向量场 $\bar{S}_\beta(t,y)$ 及 $\bar{\bar{S}}_\beta(t,y)$，使

$$d\mathscr{P}_{\beta,t}(\bar{S}_\beta(t,y))=S(\mathscr{P}_\beta(t,y)),$$
$$d\mathscr{P}_{\beta,t}(\bar{\bar{S}}_\beta(t,y))=d\mathscr{P}_\beta\left(\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{(t,y)}\right),\tag{2.2}$$

---

1) 这记号(S_β)以前在［2, §4］中也曾经当作标准记号使用过；但彼处意义与这里所指的不同。

由是

$$S_\beta(t,y)=\bar{S}_\beta(t,y)-\bar{\bar{S}}_\beta(t,y),\ (t,y)\in\mathscr{L}_0.$$

因 $\chi^{\#}_{s+t}(\beta)=\chi^{\#}_t\chi^{\#}_s(\beta)$，故 $\mathscr{P}_\beta(s+t,y)=\mathscr{P}_{\chi^{\#}_s(\beta)}(t,y)$ 对 s 及 $t\in(-\infty,\infty)$，$y\in E^n$。于是

$$d\mathscr{P}_{\chi^{\#}_s(\beta),t}(S_\beta(s+t,y))=d\mathscr{P}_{\beta,s+t}(S_\beta(s+t,y))$$

$$=S(\mathscr{P}_\beta(s+t,y))-d\mathscr{P}_\beta\left(\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{(s+t,y)}\right),$$

$$S(\mathscr{P}_\beta(s+t,y))=S(\mathscr{P}_{\chi^{\#}_s(\beta)}(t,y)),$$

$$d\mathscr{P}_\beta\left(\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{(s+t,y)}\right)=d\mathscr{P}_{\chi^{\#}_s(\beta)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{(t,y)}\right).$$

所以

$$\begin{aligned}&\bar{S}_\beta(s+t,y)=\bar{S}_{\chi^{\#}_s(\beta)}(t,y),\\&\bar{\bar{S}}_\beta(s+t,y)=\bar{\bar{S}}_{\chi^{\#}_s(\beta)}(t,y),\\&S_\beta(s+t,y)=S_{\chi^{\#}_s}(\beta)(t,y),\\&s\text{ 及 }t\in(-\infty,\infty),\ y\in B_0.\end{aligned}\tag{2.3}$$

因 S 及 $\mathscr{P}_\beta$ 都是 C^1 型的，$\bar{S}_\beta(t,y)$ 及 $\bar{\bar{S}}_\beta(t,y)$ 因而 $S_\beta(t,y)$ 都对 (t,y) 连续。为了考察典范方程组的可微性质及其他性质，我们取 M^n 中绕 $b=q^{\#}_n(\beta)$ 处一 C^∞ 型局部坐标系 $g:G\to M^n$ 使 $g(G)\supset\exp(\mathscr{C}_b)$（事实上，对任给的一 $\beta'\in\mathscr{F}^{\#}_n$ 使 $q^{\#}_n(\beta')=b$，$\mathscr{P}_{\beta',0}:B_0\to M^n$ 都是这样一个局部坐标系）。设就 g 来说，S 表成一 C^1 型常微分方程组

$$\frac{d\bar{y}}{dt}=\bar{P}(\bar{y}),\ \bar{y}\in G.$$

于是，若 $\gamma\in\mathscr{F}^{\#}_n$ 且 $q^{\#}_n(\gamma)\in g(G)$，则 $\phi_t(q^{\#}_n(\gamma))$ 就 g 来说部分地表成这方程组的一解 $c(t,\gamma)\in G$ 对于 $t\in$ 某一区间 (t'_γ,t''_γ)（它包含 0），$g(c(0,\gamma))=q^{\#}_n(\gamma)$，而 M^n 在 $\phi_t(q^{\#}_n(\gamma))$ 处的切向量 $\mathrm{proj}_k\chi^{\#}_t(\gamma)$ 将表成 G 在 $c(t,\gamma)$ 处的一个切向量 $\lambda_k(t,\gamma)\in E^n$ 对 $t\in(t'_\gamma,t''_\gamma)$，$k=1,2,\cdots,n$；这里 $c(t,\gamma)$ 及 $\lambda_k(t,\gamma)$ 都对 t 连续地可微，$c(0,\gamma)$ 及 $\lambda_k(0,\gamma)$ 对 γ 连续。因 $g(G)\supset\exp(\mathscr{C}_b)$，我们可取 $G\times E^n$ 中一开子集

$$H \supset c(0,\beta) \times \left\{ y' = \sum_{k=1}^{n} y^k \lambda_k(0,\beta) \in E^n \mid (y^1, y^2, \cdots, y^n) \in B_0 \right\}$$

使得(就 g 来说) exp 表成一个从 H 到 G 中的 C^∞ 型映射

$$\eta: H \to G.$$

(H 中每一点可写成形式 $(\bar{y}, y')$, 其中 $\bar{y} \in G$, $y' \in E^n$.) 对于 $\gamma \in \mathscr{F}_n^\#$ 使 $q_n^\#(\gamma) \in g(G)$, 记

$$\xi(t, y; \gamma) = \left(c(t, \gamma), \sum_{k=1}^{n} y^k \lambda_k(t, \gamma) \right),$$

$$t \in (t'_\gamma, t''_\gamma), \quad y = (y^1, y^2, \cdots, y^n) \in E^n.$$

又记

$$N = \{(t, y, \gamma) \in \mathscr{L}_0 \times \mathscr{F}_n^\# \mid q_n^\#(\gamma) \in g(G), \ \xi(t, y; \gamma) \in H\},$$

$$N_\beta = \{(t, y, \gamma) \in N \mid \gamma = \beta\}, \quad N_0 = \{(t, y, \gamma) \in N \mid t = 0\},$$

易验证 N_β 是 $\mathscr{L}_0 \times (\beta)$ 中一开子集 $\supset (0) \times B_0 \times (\beta)$, 而 N_0 在 $(0) \times B_0 \times \mathscr{F}_n^\#$ 中的内集 $\supset (0) \times B_0 \times (\beta)$. 于是当 $(t, y, \gamma) \in N$ 时,从 $\bar{S}_\gamma(t, y)$ 及 $\bar{\bar{S}}_\gamma(t, y)$ 的定义 (2.2) 我们有关系式

$$\bar{S}_\gamma(t, y) \left(\frac{\partial}{\partial y} \eta(\xi(t, y, \gamma)) \right)^{tr} = \bar{P}(\eta(\xi(t, y; \gamma))), \tag{2.4}$$

$$\bar{\bar{S}}_\gamma(t, y) \left(\frac{\partial}{\partial y} \eta(\xi(t, y; \gamma)) \right)^{tr} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \eta(\xi(t, y; \gamma)) \right)^{tr}. \tag{2.5}$$

但这里

$$\frac{\partial}{\partial y} \eta(\xi(t, y; \gamma)) = \left(\frac{\partial \eta}{\partial y'} \right)_{(\bar{y}, y') = \xi(t, y; \gamma)} \begin{pmatrix} \lambda_1(t, \gamma) \\ \lambda_2(t, \gamma) \\ \vdots \\ \lambda_n(t, \gamma) \end{pmatrix}^{tr}, \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta(\xi(t, y; \gamma)) = \left(\frac{\partial \eta}{\partial(\bar{y}, y')} \right)_{(\bar{y}, y') = \xi(t, y; \gamma)} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial c(t, \gamma)}{\partial t} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} y^k \frac{\partial \lambda_k(t, \gamma)}{\partial t} \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

且当 t 及 γ 给定时，$\dfrac{\partial}{\partial y}\eta(\xi(t,y;\gamma))$ 是 n 阶正则方阵（因 $\mathscr{P}_{\gamma,t}$ 在 B_0 上是微拓变换）；又

$$\left.\frac{\partial c(t,\gamma)}{\partial t}\right|_{t=0} \text{ 及 } \left.\frac{\partial \lambda_k(t,\gamma)}{\partial t}\right|_{t=0}$$

也都对 γ 连续(见[1, §2])。 从这些并直接计算，我们就得出结论：(i_0) 对于 $(t,y,\beta)\in N_\beta$，

$$\frac{\partial \bar{S}_\beta(t,y)}{\partial y},\quad \frac{\partial \bar{\bar{S}}_\beta(t,y)}{\partial y} \text{ 因而 } \frac{\partial S_\beta(t,y)}{\partial y}$$

都存在且对 (t,y) 连续；(ii_0) 对于 $(0,y,\gamma)\in N_0$，

$$\frac{\partial \bar{S}_\gamma(0,y)}{\partial y},\quad \frac{\partial \bar{\bar{S}}_\gamma(0,y)}{\partial y} \text{ 因而 } \frac{\partial S_\gamma(0,y)}{\partial y}$$

也都存在，且在每一点 $(0,y,\beta)$ 处都连续。

定理 2.1 对 $\beta\in\mathscr{T}^{\#}_{n}$，典范方程组 (S_β) 具有性质：

(i) $S_\beta(t,0)=\bar{S}_\beta(t,0)-\bar{\bar{S}}_\beta(t,0)=0$；$S_\beta(t,y)$ 在 $\mathscr{L}_0$ 上连续，对 y 可微，且

$$\frac{\partial S_\beta(t,y)}{\partial y}$$

也在 $\mathscr{L}_0$ 上连续；

(ii) 当 y 趋近于 0 时，$\dfrac{\partial S_\beta(t,y)}{\partial y}$ 对所有 $(t,\beta)\in(-\infty,\infty)\times\mathscr{T}^{\#}_{n}$ 均匀地趋近于 $R_\beta(t)$。

证 $\mathscr{P}_\beta(t,0)=\phi_t(q^{\#}_{*}(\beta))$，由是据 (2.1)，$S_\beta(t,0)=0$。上面已得的结论 ($i_0$) 等配合 (2.3) 就给出这里 (i) 中其余部分。

现证 (ii)。我们先证

$$\left.\frac{\partial S_\beta(0,y)}{\partial y}\right|_{y=0}=R_\beta(0). \tag{2.8}$$

据 (2.6) 及 (2.7) 直接计算，我们看出

$$\frac{\partial^2}{\partial t\partial y^k}\eta(\xi(t,y;\beta))$$

及

$$\frac{\partial^2}{\partial y^k \partial t}\eta(\xi(t,y;\beta)),\ k=1,2,\cdots,n$$

在 $(t,y)=(0,0)$ 的一邻域内都存在且二者相等（虽然 S 只是 M^n 上一 C^1 型常微系统）。又因 $\mathscr{P}_{\beta,0}$ 是从 B_0 到 M^n 中一 C^∞ 型微拓变换，$\mathscr{P}_{\beta,0}(B_0)$ 上有一 C^1 型切向量场 S_β^0 使

$$d\mathscr{P}_{\beta,0}(\bar{S}_\beta(0,y))=S_\beta^0(\mathscr{P}_\beta(0,y))=d\mathscr{P}_\beta\left(\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{(0,y)}\right),$$

它就 M^n 的局部坐标系 g 来说表成(2.5)的右端（取 $\gamma=\beta$）；且 $\mathscr{P}_\beta(t,0)=\phi_t(q_n^\#(\beta))$。所以，就坐标系 g 计算 S_β^0 在 $q_n^\#(\beta)$ 处沿方向 $u_k=\mathrm{proj}_k\chi_0(\beta)=\mathrm{proj}_k(\beta)$ 的共变微商，并用指数映射 exp 的性质，我们就得出

$$\nabla_{u_k}S_\beta^0=(\nabla_t(\mathrm{proj}_k\chi_t^\#(\beta)))_{t=0},\ k=1,2,\cdots,n.$$

于是，据命题 1.5 及 1.6，

$$R_\beta(0)=\text{方阵}\,(\langle u_i,\nabla_{u_j}(S-S_\beta^0)\rangle).$$

但 β 是 M^n 的正规 n-标架。故进一步据 exp 的性质及(2.1)，(2.8)成立。

据前面已有的结论 (ii$_0$)，$B_0\times\mathscr{F}_n^\#$ 上的方阵函数

$$J(y,\gamma)=\partial S_\gamma(0,y)/\partial y$$

在 $B_0\times(\beta)$ 中每一 (y,β) 处都连续（对任给的 $\beta\in\mathscr{F}_n^\#$）。这蕴涵 $J(y,\beta)$ 在 $B_0\times\mathscr{F}_n^\#$ 中所有 (y,β) 处都连续。取一正数 $\zeta_1<\zeta_0$，命

$$\bar{B}=\{y\in B_0\,|\,\|y\|\leqslant\zeta_1\}.$$

则 $\bar{B}\times\mathscr{F}_n^\#$ 紧致。于是，$\mathscr{F}_n^\#$ 上的方阵函数族

$$J_\beta(y)=J(y,\beta)$$

对 $y\in\bar{B}$ 均等一致连续。这结合(2.8)就给出：当 y 趋近于 0 时，$J(y,\beta)$ 对所有 $\beta\in\mathscr{F}_n^\#$ 均匀地趋近于 $R_\beta(0)$。由是据(2.3)及命题 1.4，这里 (ii) 成立。定理证完。

因 $S_\beta(t,0)=0$ 对所有 $t\in(-\infty,\infty)$，$y=0$ 是 (S_β) 的一解。一般地，我们说：若 $y_\beta(t;s,y)$ 对于 $t\in$ 某一区间 (t_y',t_y'')

（它包含 s）是（S_β）的一解使 $y_\beta(s;s,y)=y$，则

$$\mathscr{P}_{\beta,t}(y\beta(t;s,y))=\phi_{t-s}(\mathscr{P}_{\beta,s}(y)).\quad t\in(t'_y,t''_y).\qquad(2.9)$$

事实上，命

$$\vartheta_\beta:\mathscr{L}_0\to(-\infty,\infty)\times M^n\qquad(2.10)$$

为由 $\vartheta_\beta(t,y)=(t,\mathscr{P}_\beta(t,y))$ 给出的映射。易看出这是到 $(-\infty,\infty)\times M^n$ 中的一 C^1 型微拓变换。于是

$$d\vartheta_\beta\left(\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{(t,y)}+(0,S_\beta(t,y))\right)=e(\vartheta_\beta(t,y))$$

$$+\left(0,d\mathscr{P}_\beta\left(\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{(t,y)}+(0,S_\beta(t,y))\right)\right),$$

其中 $e(t,x)$ 表 $(-\infty,\infty)\times M^n$ 在 (t,x) 处沿 t 轴正向的单位切向量，而

$$d\mathscr{P}_\beta\left(\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{(t,y)}+(0,S_\beta(t,y))\right)$$

$$=d\mathscr{P}_\beta\left(\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{(t,y)}\right)+d\mathscr{P}_{\beta,t}(S_\beta(t,y))$$

$$=S(\mathscr{P}_\beta(t,y)).$$

故 $\vartheta_\beta(t,y_\beta(t;s,y))=(t,\phi_{t-s}(\mathscr{P}_\beta(s,y)))$。这给出断语。

下面，我们取定 B_0 中一子集

$$\bar{B}=\{y\in E^n\,|\,\|y\|\leqslant\xi\},$$

其中 ξ 是一正数 $<\zeta_0$。

命题 2.2 $\bar{S}_\beta(t,y)$ 及 $\bar{\bar{S}}_\beta(t,y)$ 在 $\mathscr{L}_0$ 上连续，对 y 可微，且

$$\bar{J}_\beta(t,y)=\frac{\partial\bar{S}_\beta(t,y)}{\partial y}\text{ 及 }\bar{\bar{J}}_\beta(t,y)=\frac{\partial\bar{\bar{S}}_\beta(t,y)}{\partial y}$$

也在 $\mathscr{L}_0$ 上连续。对任给的 $t\in(-\infty,\infty)$，$\bar{S}_\beta(t,y)$ 及 $\bar{\bar{S}}_\beta(t,y)$，以及 $\bar{J}_\beta(t,y)$，$\bar{\bar{J}}_\beta(t,y)$ 都对 $(y,\beta)\in\bar{B}\times\mathscr{F}^{\#}_{n}$ 一致连续；这一致连续性对 $t\in$ 一任给的闭区间 $\langle t',t''\rangle$ 来说是均等的。另外下面的有界性成立，即

$$\sup_{(t,y,\beta)\in(-\infty,\infty)\times\bar{B}\times\mathscr{F}^{\#}_{n}}\mathrm{Max}\{\|\bar{S}_\beta(t,y)\|,\|\bar{\bar{S}}_\beta(t,y)\|,$$

$\mathscr{N}(\bar{J}_\beta(t,y)),\ \mathscr{N}(\bar{\bar{J}}_\beta(t,y))\} < \infty.$

证 这里第一部分所述对 (t, y) 的连续性等见前面已有的结论中。当 $t=0$ 时，据前面已有的结论 (ii_0)，这里的向量函数及方阵函数对 $(y,\beta)\in B_0\times\mathscr{F}^\#_\pi$ 连续，因而在紧致集 $\bar{B}\times\mathscr{F}^\#_\pi$ 上一致连续。于是用 (2.3) 及单参数变换群 $\chi^\#_t(-\infty<t<\infty)$ 的连续性即得这里所述的均等一致连续性。从 (2.3)，$\bar{B}\times\mathscr{F}^\#_\pi$ 的紧致性及已证的这些连续性可得这里的有界性。

用与上面相类似的方式可以处理 M^n 上其他的常微系统 $\in\mathscr{X}$。设 $X\in\mathscr{X}$。如同 (2.1)，我们也有：对任给的一 $t\in(-\infty,\infty)$，B_0 上有唯一的切向量场 $X_{(s,\beta)}(t,y)$ 使

$$
\begin{aligned}
d\mathscr{P}_{\beta,t}(X_{(s,\beta)}(t,y)) &= d\mathscr{P}_\beta(0,X_{(s;\beta)}(t,y))\\
&= X(\mathscr{P}_\beta(t,y)) - d\mathscr{P}_\beta\left(\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{(t,y)}\right)\\
&= X(\mathscr{P}_\beta(t,y)) - d\mathscr{P}_{\beta,t}(\bar{\bar{S}}_\beta(t,y)),
\end{aligned}
$$

从而得出一常微分方程组

$$
\frac{dy}{dt} = X_{(s,\beta)}(t,y),(t,y)\in\mathscr{L}_0. \qquad (X_{(s,\beta)})
$$

(因 $\mathscr{P}_\beta$ 由 S 及 β 确定，$X_{(s,\beta)}$ 与 S 及 β 有关.)易看出 $X_{(s,\beta)}(t,y)$ 对 (t,y) 连续，对 y 可微，且 $\partial X_{(s,\beta)}/\partial y$ 也对 y 连续。

如同 (2.3) 情况一样，于此我们也有

$$
X_{(s,\beta)}(s+t,y) = X_{(s,\chi^\#_s(\beta))}(t,y), \qquad (2.11)
$$

$$
s \text{ 及 } t\in(-\infty,\infty),\ y\in B_0.
$$

对任意的 X 及 $X'\in\mathscr{X}$，记

$$
\{X,X'\}_s = \sup_{(t,y,\beta)\in(-\infty,\infty)\times\bar{B}\times\mathscr{F}^\#_\pi}\Big\{\|X_{(s,\beta)}(t,y)-X'_{(s,\beta)}(t,y)\|
$$

$$
+\mathscr{N}\left(\frac{\partial}{\partial y}(X_{(s,\beta)}(t,y)-X'_{(s,\beta)}(t,y))\right)\Big\}.
$$

据 (2.11)，

$$
\{X,X'\}_s \text{ 也} = \sup_{(y,\beta)\in\bar{B}\times\mathscr{F}^\#_\pi}\Big\{\|X_{(s,\beta)}(0,y)-X'_{(s,\beta)}(0,y)\|
$$

$$+\mathscr{N}\left(\frac{\partial}{\partial y}(X_{(s,\beta)}(0,y)-X'_{(s,\beta)}(0,y))\right)\Big\}.$$

这式子右端还可以化简。事实上，若 β 及 β_0 是 M^n 上同一点处的正规 n-标架，则相关矩阵 $\langle\beta,\beta_0\rangle$ 是正交方阵且 $\beta=\beta_0\langle\beta,\beta_0\rangle^{tr}$；于是据 $\mathscr{P}_{\beta,0}$ 及 $X_{(s,\beta)}(0,y)$ 等的定义，易看出

$$\mathscr{P}_{\beta,0}(y)=\mathscr{P}_{\beta_0,0}(y\langle\beta_0,\beta\rangle^{tr}),$$

$$d\mathscr{P}_{\beta,0}(X_{(s,\beta)}(0,y)-X'_{(s,\beta)}(0,y))=(X-X')(\mathscr{P}_{\beta}(0,y)),\tag{2.12}$$

$$(X-X')(\mathscr{P}_{\beta}(0,y))=(X-X')(\mathscr{P}_{\beta_0}(0,y\langle\beta_0,\beta\rangle^{tr}),$$

$$=d\mathscr{P}_{\beta_0,0}(X_{(s,\beta_0)}(0,y\langle\beta_0,\beta\rangle^{tr})-X'_{(s,\beta_0)}(0,y\langle\beta_0,\beta\rangle^{tr})),$$

从而

$$X_{(s,\beta)}(0,y)-X'_{(s,\beta)}(0,y)=(X_{(s,\beta_0)}(0,y\langle\beta_0,\beta\rangle^{tr})$$
$$-X'_{(s,\beta_0)}(0,y\langle\beta_0,\beta\rangle^{tr}))\langle\beta_0,\beta\rangle.\tag{2.13}$$

命题 2.3 $\{X,X'\}_1$ 对于 $X,X'\in\mathscr{X}$ 给出 $\mathscr{X}$ 中一度量，它与 $\mathscr{X}$ 中原来的 C^1 度量 $\|X-X'\|_1$ 等价。特别地，$\{X,X'\}_1$ 恒 $<\infty$。

证 对任一 $\beta\in\mathscr{F}^{\#}_n$，$\mathscr{P}_{\beta,0}:B_0\to M^n$ 是 M^n中绕 $q^{\#}_n(\beta)$ 处的一 C^∞ 型局部坐标系。在这坐标系上，设 M^n 上原给的 C^∞ 型 Riemann 度量取基本二次型 $ds^2=\sum_{i,j}g_{ij}(y,\beta)dy^idy^j$，其中

$$g_{ij}(y,\beta)=\left\langle d\mathscr{P}_{\beta,0}\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right),\ d\mathscr{P}_{\beta,0}\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)\right\rangle,$$

并记 $\Gamma^i_{jk}(y,\beta)$ 为相应的 Christoffel 记号。记 $G_0(y,\beta)=$ 方阵 $(g_{ij}(y,\beta))$，并考虑它的逆方阵 $G_0(y,\beta)^{-1}$。因 M^n 及 $\bar{B}$ 紧致，$\mathscr{F}^{\#}_n$ 是 M^n 的正规 n-标架丛，且 $g_{ij}(y,\beta)$ 及 $\Gamma^i_{jk}(y,\beta)$ 都是 (y,β) 的连续函数(例如，取从 $\mathscr{F}^{\#}_n$ 的 C^∞ 型局部截面，并对 M^n 上同一点处的正规 n-标架 β 及 β_0 用关系式

$$\mathscr{P}_{\beta,0}(y)=\mathscr{P}_{\beta_0,0}(y\langle\beta_0,\beta\rangle^{tr}),$$

循这方式易看出这些函数的连续性)，我们有

$$\sup_{(y,\beta)\in\bar{B}\times\mathscr{F}^{\#}_n}\operatorname{Max}\{\mathscr{N}(G_0(y,\beta)),\mathscr{N}(G_0(y,\beta)^{-1})\}<\infty,$$

$$\sup_{(y,\beta)\in\bar{B}\times\mathscr{F}_n^{\#}} \mathrm{Max}_{i,j,k}|\Gamma^i_{jk}(y,\beta)| < \infty;$$

并且，下面的一些事实明显地成立，即 $\{X, X'\}_s = 0$ 当且仅当 $X = X'$，$\{X,X'\}_s = \{X', X\}_s$，且 $\{X, X''\}_s \leqslant \{X, X'\}_s + \{X', X''\}_s$. 据这些及 (2.12)，命题 2.3 成立.

但 $\{X,X'\}_s$ 的确定，实际上与预给的 $S\in\mathscr{X}$ 的选取无关，由是可写

$$\{X,X'\} = \{X,X'\}_s.$$

这是因为虽然 $\mathscr{P}_\beta$ 与 S 有关，但

$$\mathscr{P}_{\beta,0}(y) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} y^k \mathrm{proj}_k\beta\right)$$

则与 S 无关. 于是，因 $\mathscr{P}_{\beta,0}$ 是从 B_0 到 M^n 中的微拓变换，(2.12) 唯一确定 $X_{(s,\beta)}(0, y) - X'_{(s,\beta)}(0, y)$，即如果 S' 也属于 $\mathscr{X}$，则

$$X_{(s,\beta)}(0,y) - X'_{(s,\beta)}(0,y) = X_{(s',\beta)}(0,y) - X'_{(s',\beta)}(0,y).$$

类似地，对于 X 及 $X'\in\mathscr{X}$ 置

$$\{X,X'\}_s^0 = \sup_{(t,y,\beta)\in(-\infty,\infty)\times\bar{B}\times\mathscr{F}_n^{\#}} \{\|X_{(s,\beta)}(t,y) - X'_{(s,\beta)}(t,y)\|\}$$

命题 2.4 $\{X,X'\}_s^0$ 对于 $X,X'\in\mathscr{X}$ 给出 $\mathscr{X}$ 中一度量，它与 $\mathscr{X}$ 中原来的 C^0 度量等价.

这命题证明法与命题 2.3 中相同. 我们也可看出 $\{X,X'\}_s^0$ 的确定与预给的 $S\in\mathscr{X}$ 的选取无关，由是可写

$$\{X, X'\}^0 = \{X, X'\}_s^0.$$

以下对任给的 $X\in\mathscr{X}$ 及 $\beta\in\mathscr{F}_n^{\#}$，我们将简写 $X_{(s,\beta)}$ 为 X_β（记住后者与 S 有关）. 我们将把方程组 (X_β) 写成尾式形式

$$\frac{dy}{dt} = yR_\beta(t)^{tr} + X_{\mathrm{Rem}(\beta)}(t, y),\ (t, y)\in\mathscr{L}_0, \qquad (X_\beta)$$

其中

$$X_{\mathrm{Rem}(\beta)}(t,y) = X_\beta(t,y) - yR_\beta(t)^{tr}$$
$$= (X_\beta(t,y) - S_\beta(t,y)) + (S_\beta(t,y) - yR_\beta(t)^{tr}).$$

当 $X=S$ 时，

$$\frac{\partial}{\partial y}S_{\mathrm{Rem}(\beta)}(t,y)|_{(t,0)}=0$$

对所有 $t\in(-\infty,\infty)$（据定理 2.1）。

命题 2.5 对任一 $X\in\mathscr{X}$，$X_{\mathrm{Rem}(\beta)}(t,y)$ 对 $(t,y)\in\mathscr{L}_0$ 连续，且在每一点 $(s,u)\in\mathscr{L}_0$ 处都局部地满足一 Lipschitz 条件，即 (s,u) 有一个在 $\mathscr{L}_0$ 中的邻域 $U_{(s,u)}$ 且对应于 (s,u) 有一常数 $\kappa_{(s,u)}$，使得

$$\|X_{\mathrm{Rem}(\beta)}(t,y)-X_{\mathrm{Rem}(\beta)}(t,y')\|\leqslant\kappa_{(s,u)}|y-y'\| \quad (2.14)$$

对所有 (t,y) 及 $(t,y')\in U_{(s,u)}$。

证 因 $X_\beta(t,y)$ 对 (t,y) 连续且 $R_\beta(t)$ 对 t 连续，故 $X_{\mathrm{Rem}(\beta)}(t,y)$ 对 (t,y) 连续。要证命题余下部分，不失一般性可设 $\|u\|<\xi$，由是可取 u 在 E^n 中一邻域 $U'_u\subset\bar{B}$。置

$$U_{(s,u)}=(s-1,s+1)\times U'_u.$$

则

$$U_{(s,u)}\subset(-\infty,\infty)\times\bar{B}\subset\mathscr{L}_0.$$

命

$$\kappa_{(s,u)}=\sup_{(t,y)\in V_{(s,u)}}\mathscr{N}\left(\frac{\partial}{\partial y}(X_\beta(t,y)-S_\beta(t,y))\right)$$

$$+\sup_{(t,y)\in V_{(s,u)}}\mathscr{N}\left(\frac{\partial}{\partial y}(S_\beta(t,y)-yR_\beta(t)t^r)\right).$$

因 $\partial S_\beta/\partial y$ 对 (t,y) 连续(定理 (2.1))，而 $R_\beta(t)$ 对 t 连续，故这等式右端第二项$<\infty$；又据命题2.3，第一项也$<\infty$。故 $\kappa_{(s,u)}<\infty$。再用中值定理即给出 (2.14)。证完。

任给一常微系统 $X\in\mathscr{X}$ 都将在 M^n 上导出一单参数变换群，记作

$$\phi_{X,t}:M^n\to M^n,\quad -\infty<t<\infty.$$

我们说：若 $y_{(X,\beta)}(t;s,y)$ 对于 $t\in$ 某一区间 (s'_y,s''_y)（它包含 s）是 (X_β) 的一解，使 $y_{(X,\beta)}(s;s,y)=y$，则

$$\mathscr{P}_{\beta,t}(y_{(X,\beta)}(t;s,y))=\phi_{X,t-s}(\mathscr{P}_{\beta,t}(y)),\quad t\in(s'_y,s''_y).$$

这断语证明法与 (2.9) 式相同，即仍考虑 (2.10) 中同样的映射

ϑ_β，则

$$d\vartheta_\beta\left(\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{(t,y)} + (0, X_\beta(t,y))\right)$$

$$= e(\vartheta_\beta(t,y)) + (0, X(\mathscr{P}_\beta(t,y))). \tag{2.15}$$

对任给的一 $t\in(-\infty, \infty)$，B_0 上有一 C^1 型切向量场 $\overline{X}_\beta(t,y)$ 使

$$d\mathscr{P}_{\beta,t}(\overline{X}_\beta(t, y)) = X(\mathscr{P}_\beta(t,y)) \tag{2.16}$$

（因 $\mathscr{P}_{\beta,t}$ 是从 B_0 到 M^n 中一 C^∞ 型微拓变换）。由是有

$$X_\beta(t,y) = \overline{X}_\beta(t,y) - \bar{\bar{S}}_\beta(t,y)$$

$$\overline{X}_\beta(t,y) - \bar{S}_\beta(t,y) = X_\beta(t,y) - S_\beta(t,y), \tag{2.17}$$

$$\overline{X}_\beta(s+t,y) = \overline{X}_{\chi_s^\#(\beta)}(t,y),$$

$$s \text{ 及 } t\in(-\infty,\infty),\ y\in B_0.$$

$$\sup_{(t,y)\in(-\infty,\infty)\times\bar{B}}\{\|\overline{X}_\beta(t,y) - \bar{S}_\beta(t,y)\|\} \leqslant \{X,S\}^0. \tag{2.18}$$

命题 2.6 向量函数 $\overline{X}_\beta(t,y)$ 在 $\mathscr{L}_0$ 上连续，对 y 可微，且 $\partial\overline{X}_\beta/\partial y$ 也对 y 连续。当 t 给定时，$\overline{X}_\beta(t, y)$ 对 $(y,\beta)\in\bar{B}\times\mathscr{T}_n^\#$ 一致连续；这一致连续性对所有 $t\in$ 一任给的闭区间 $\langle t',t''\rangle$ 来说是均等的。

证 这一致连续性证法同命题 2.2 中（于此，我们如以前取 M^n 的局部坐标系 g 并用一个与 (2.4) 相类似的等式）。均等一致连续性的证法也与命题 2.2 中相同。命题其余部分明显。

我们将写

$$\bar{S}_\beta(t,y) = (\bar{S}_\beta^1(t,y),\ \bar{S}_\beta^2(t,y),\cdots,\bar{S}_\beta^n(t,y)),$$

$$\bar{\bar{S}}_\beta(t,y) = (\bar{\bar{S}}_\beta^1(t,y),\bar{\bar{S}}_\beta^2(t,y),\cdots,\bar{\bar{S}}_\beta^n(t,y))\in E^n,$$

$$(t,y)\in\mathscr{L}_0,\ \beta\in\mathscr{T}_n^\#.$$

又对任一 $X\in\mathscr{X}$，写

$$\overline{X}_\beta(t,y) = (\overline{X}_\beta^1(t,y),\overline{X}_\beta^2(t,y),\cdots,$$

$$\overline{X}_\beta^n(t,y))\in E^n,(t,y)\in\mathscr{L}_0,\beta\in\mathscr{T}_n^\#.$$

在下面的讨论中，我们将取定一常数

$$c > 0.$$

记

$$\mathscr{F}_n^* = \{\beta \in \mathscr{F}_n^\# \mid \|S(q_n^\#(\beta))\| \mathrm{proj}_1(\beta) = S(q_n^\#(\beta))\}$$

(由是，若 $q_n^\#(\beta)$ 是 S 的一常点且 $\beta \in \mathscr{F}_n^*$，则 β 中第一个向量与 M^n 上过 $q_n^\#(\beta)$ 处的积分线相切；M^n 上任一奇点处的所有正规 n-标架都 $\in \mathscr{F}_n^*$)。易看出 $\mathscr{F}_n^*$ 是 $\mathscr{F}_n^\#$ 的闭子集且在单参数变换群 $\chi_t^\#(-\infty < t < \infty)$ 下不变。

因 $d\mathscr{P}_{\beta,t}(\bar{S}_\beta(t,y)) = S(\mathscr{P}_\beta(t,y))$，所以据指数映射 exp 的性质有

$$\begin{aligned}
&\bar{S}_\beta(t,0) = (\langle S(\phi_t(q_n^\#(\beta))),\ \mathrm{proj}_1\chi_t^\#(\beta)\rangle,\\
&\langle S(\phi_t(q_n^\#(\beta))),\ \mathrm{proj}_2\chi_t^\#(\beta)\rangle, \cdots,\\
&\langle S(\phi_t(q_n^\#(\beta))),\\
&\mathrm{proj}_n\chi_t^\#(\beta)\rangle) = (\|S(\phi_t(q_n^\#(\beta)))\|, 0, \cdots, 0) \qquad (2.19)\\
&\text{对 } \beta \in \mathscr{F}_n^*.
\end{aligned}$$

对任一 $\beta \in \mathscr{F}_n^*$，记

$$T_{(c,\beta)} = \{t \in (-\infty, \infty) \mid \|S(\phi_t(q_n^\#(\beta)))\| \geqslant c\}.$$

引理 2.7 给定常数 $c > 0$. 则存在一常数 $\xi_c > 0$, $\xi_c < \xi$ 使

$$\frac{c}{3} \leqslant \inf_{(t,y,\beta) \in \Omega_c} \bar{S}_\beta^1(t,y) \leqslant \sup_{(t,y,\beta) \in \Omega_c} \bar{S}_\beta^1(t,y) < \infty, \qquad (2.20)$$

且 S 在 $\mathscr{X}$ 中有一 C^0 邻域 $\mathscr{V}_c$ 使

$$\frac{c}{3} \leqslant \inf_{(t,y,\beta) \in \Omega_c, X \in \mathscr{V}_c} \bar{X}_\beta^1(t,y) \leqslant \sup_{(t,y,\beta) \in \Omega_c, X \in \mathscr{V}_c} \bar{X}_\beta^1(t,y) < \infty,$$

其中 Ω_c 表集合 $\{(t,y,\beta) \mid \beta \in \mathscr{F}_n^*, t \in T_{(c,\beta)}, \|y\| \leqslant \xi_c\}$.

证 我们说，存在一正常数 $\xi_c < \xi$ 使得

$$\frac{c}{2} \leqslant \inf_{(t,y,\beta) \in \Omega_c} \bar{S}_\beta^1(t,y) \leqslant \sup_{(t,y,\beta) \in \Omega_c} \bar{S}_\beta^1(t,y) < \infty,$$

$$\frac{c}{2} \leqslant \inf_{(t,y,\beta) \in \Omega_c} \bar{\bar{S}}_\beta^1(t,y) \leqslant \sup_{(t,y,\beta) \in \Omega_c} \bar{\bar{S}}_\beta^1(t,y) < \infty.$$

事实上，$S_\beta(t,0) = \bar{S}_\beta(t,0) - \bar{\bar{S}}_\beta(t,0) = 0$. 故用命题 2.2 中所述 $\bar{S}_\beta(0, y)$ 及 $\bar{\bar{S}}_\beta(0, y)$ 对 (y, β) 的一致连续性以及 (2.3), (2.19) 即看出满足断语中要求的 ξ_c 的存在. 从这断语，(2.18) 及命题 2.4，我们可进一步看出：存在一 $\delta_c > 0$ 使得只要 $X \in \mathscr{X}$

且 C^0 度量 $\|X-S\|_0<\delta_c$，即有

$$\frac{c}{3}\leqslant\inf_{(t,y,\beta)\in\Omega_c}\bar{X}^1_\beta(t,y)\leqslant\sup_{(t,y,\beta)\in\Omega_c}\bar{X}^1_\beta(t,y)<\infty.$$

取 $\mathscr{V}_c=\{X\in\mathscr{X}\mid\|X-S\|_0<\delta_c\}$ 即完成引理的证明.

对于常数 c，我们将取定一 $\mathscr{V}_c$ 及一 ζ_c 满足这引理中要求.记

$$A_c=\{y\in E^n\mid\|y\|<\zeta_c\},\quad L_c=(-\infty,\infty)\times A_c,$$

$$\mathscr{X}_c=\{X\in\mathscr{X}\mid\inf_{(t,y,\beta)\in\Omega_c}\bar{X}^1_\beta(t,y)>0\}.$$

取定 M^n 上一连续函数 $f(x)$，它恒取值在 0 与 1 之间，但在 M^n 的子集 $\{x\in M^n\mid\|S(x)\|\leqslant c\}$ 上恒取值 0.

对任意的 $X\in\mathscr{X}_c$ 及 $\beta\in\mathscr{F}^*_*$，考虑 L_c 上的向量函数

$$X_{[f,\beta]}(t,y)=f_{[X,\beta]}(t,y)\bar{X}_\beta(t,y)-\bar{S}_\beta(t,y)\in E^n,(t,y)\in L_c,$$

其中

$$f_{[X,\beta]}(t,y)=\begin{cases}1-f(\phi_t(q^{\#}_*(\beta)))+f(\phi_t(q^{\#}_*(\beta)))\left(\dfrac{\bar{S}^1_\beta(t,y)}{\bar{X}^1_\beta(t,y)}\right)\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{对}\ t\in T_{(c,\beta)},\\ 1\qquad\text{对}\ t\in(-\infty,\infty)-T_{(c,\beta)}.\end{cases}$$

在这里，我们注意：若 $t\in T_{(c,\beta)}$，则 $\bar{X}^1_\beta(t,y)>0$，从而 $f_{[X,\beta]}(t,y)$ 可定义；若 t 不 $\in T_{(c,\beta)}$，则 $f_{[X,\beta]}(t,y)=1$，而 $X_{[f,\beta]}(t,y)=X_\beta(t,y)$. 易看出

$$f_{[X,\chi^{\#}_s(\beta)]}(t,y)=f_{[X,\beta]}(s+t,y).$$

引理 2.8 给定 M^n 上的连续函数 $f(x)$ 如上. 任给 $X\in\mathscr{X}_c$. 则对于 $\beta\in\mathscr{F}^*_*$，$f_{[X,\beta]}(t,y)$ 对 $(t,y)\in L_c$ 连续，对 $y\in A_c$ 可微，$\partial f_{[X,\beta]}/\partial y$ 也对 $y\in A_c$ 连续；且有

$$0<\inf_{(t,y,\beta)\in L_c\times\mathscr{F}^*_*}f_{[X,\beta]}(t,y)\leqslant\sup_{(t,y,\beta)\in L_c\times\mathscr{F}^*_*}f_{[X,\beta]}(t,y)<\infty.$$

证 这里叙述的连续及可微性易从命题 2.2 及 2.6 看出. 从 (2.20), (2.18) 及 $\mathscr{X}_c$ 的定义即看出这里不等式成立.

我们将考虑对于循上述方式得出的向量函数 $X_{[f,\beta]}(t,y)$ 来说的常微分方程组

$$\frac{dy}{dt} = X_{[f,\beta]}(t,y), \quad (t,y) \in L_c, \qquad (X_{[f,\beta]})$$

其中 $X \in \mathscr{X}_c, \beta \in \mathscr{F}_n^*$.

定理 2.9 对于 $X \in \mathscr{X}_c$, $\beta \in \mathscr{F}_n^*$ 及给定如上的 M^n 上的连续函数 $f(x)$，常微分方程组 $(X_{[f,\beta]})$ 具有性质:

(i) $X_{[f,\beta]}(t,y)$ 对 $(t,y) \in L_c$ 连续，对 y 可微，且

$$\sup_{(t,y,\beta)\in L_c\times\mathscr{F}_n^*} \|X_{[f,\beta]}(t,y)\| < \infty.$$

当 t 给定时，$X_{[f,\beta]}(t,y)$ 对 $(y,\beta) \in A_c \times \mathscr{F}_n^*$ 一致连续，这一致连续性对 $t \in$ 一任给的闭区间 $\langle t',t''\rangle$ 来说是均等的；并且存在一 Lipschitz 常数 κ_X 使得

$$\|X_{[f,\beta]}(t,y) - X_{[f,\beta]}(t,y')\| \leqslant \kappa_X\|y-y'\|,$$
$$(t,y) \text{ 及 } (t,y') \in L_c,$$

对所有 $\beta \in \mathscr{F}_n^*$.

(ii) 若 $y(t;s,y_0)$ 对于 $t \in$ 某一区间 (s',s'')（它包含 s）是 $(X_{[f,\beta]})$ 的一解使 $y(s;s,y_0) = y_0$，则 X 在 M^n 上过 $\mathscr{P}_{\beta,s}(y_0)$ 的积分线包含 $\{\mathscr{P}_{\beta,t}(y(t;s,y_0)) | t \in (s',s'')\}$；确切地说，

$$\mathscr{P}_{\beta,t}(y(t;s,y_0)) = \phi_{X\bar{t}}(\mathscr{P}_{\beta,s}(y_0)),$$

其中

$$\bar{t} = \int_s^t f_{[X,\beta]}(t', y(t'; s, y_0))dt'$$

是对 $t \in (s', s'')$ 连续的严格递增函数，它当 $t = s$ 时取值 0. 并且，若 $(s', s'') = (-\infty, \infty)$，则 $\mathscr{P}_\beta$ 将 $\{(t,y(t;s,y_0)) \in L_c | t \in (-\infty,\infty)\}$ 映满 X 过 $\mathscr{P}_{\beta,s}(y_0)$ 的积分线.

证 用命题 2.2—2.4, 2.6 及引理 2.7, 2.8 等我们易看出这里 (i) 中叙述的连续性，一致连续及可微性以及其中的不等式都成立；也可看出

$$\sup_{(t,y,\beta)\in L_c\times\mathscr{F}_n^*} \mathscr{N}\left(\frac{\partial X_{[f,\beta]}(t,y)}{\partial y}\right) < \infty.$$

于是用中值定理即看出满足 (i) 中要求的 Lipschitz 常数 κ_X 的存在.

现证 (ii). 考虑 (2.10) 中的 C^1 型映射 $\vartheta_\beta: \mathscr{L}_0 \to (-\infty, \infty) \times M^n$, 并把 ϑ_β 限制在 $\mathscr{L}_0$ 的子集 L_c 上，于是与彼处相类似，我们有

$$d\vartheta_\beta\left(\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{(t,y)} + (0, X_{[f,\beta]}(t,y))\right)$$
$$= e(\vartheta_\beta(t,y)) + \left(0, d\mathscr{P}_\beta\left(\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{(t,y)} + 0, x_{[f,\beta]}(t,y)\right)\right),$$

而

$$d\mathscr{P}_\beta\left(\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{(t,y)} + (0, X_{[f,\beta]}(t,y))\right)$$
$$= d\mathscr{P}_\beta\left(\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{(t,y)}\right) + d\mathscr{P}_{\beta,t}(X_{[f,\beta]}(t,y))$$
$$= d\mathscr{P}_{\beta,t}(\bar{S}_\beta(t,y)) + d\mathscr{P}_{\beta,t}(X[_{f,\beta]}(t,y))$$
$$= f_{[X,\beta]}(t,y)X(\mathscr{P}_{\beta,t}(y)).$$

所以，若命 $w:(s',s'') \to M^n$ 为由 $w(t) = \mathscr{P}_{\beta,t}(y(t;s,y_0))$ 给出的映射，并置

$$\bar{f}(t) = f_{[X,\beta]}(t, y(t;s,y_0)), t \in (s', s''),$$

则 $w(t)$ 对 t 连续地可微，且

$$(dw)(t) = \bar{f}(t)X(w(t)),\ t \in (s', t''), \tag{2.21}$$

其中 $\bar{f}(t)$ 恒 > 0 (据引理 2.8), $w(s) = \mathscr{P}_{\beta,t}(y_0)$. 从表达式 (2.21) 及引理 2.8 易推出 (ii) 中各个结论。定理证完.

显然 $S \in \mathscr{K}_c$; 我们看这个特款. 任给 $\beta \in \mathscr{F}^*_n$. 我们有 $\bar{S}_\beta(t,0) = \bar{\bar{S}}_\beta(t,0)$ 对 $t \in (-\infty, \infty)$. $S_{[f,\beta]}(t,y)$ 对 y 可微；记

$$R_{[f,\beta]}(t) = \frac{\partial S_{[f,\beta]}(t,y)}{\partial y}\bigg|_{y=0},\ t \in (-\infty, \infty).$$

考虑方阵

$$\frac{\partial S_\beta(t,y)}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \frac{\partial(\bar{S}_\beta(t,y) - \bar{\bar{S}}_\beta(t,y))}{\partial y}\bigg|_{y=0}$$
$$= R_\beta(t) = (r^{ij}_\beta(t)),$$

其中 $r^{ij}_\beta(t) = 0$ 对 $i > j$ (见定理 2.1 及命题 1.4). 直接计算就

给出

$$R_{[f,\beta]}(t) = R_{\beta}(t) - f(\phi_t(q_n^{\#}(\beta)))\begin{pmatrix} r_\beta^{11}(t) & r_\beta^{12}(t)\cdots r_\beta^{1n}(t) \\ & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.22}$$

于是据定理 2.1，命题 2.2，引理 2.7 及命题 1.4，下述命题成立。

命题 2.10 $S_{[f,\beta]}(t,0)=0$ 对所有 $(t,\beta)\in(-\infty,\infty)\times\mathscr{F}_n^*$. 当 $y\in A_c$ 趋近于 0 时，

$$\frac{\partial S_{[f,\beta]}(t,y)}{\partial y}$$

对所有 $(t,\beta)\in(-\infty,\infty)\times\mathscr{F}_n^*$ 均匀地趋近于 $R_{[f,\beta]}(t)$. 对每一 $\beta\in\mathscr{F}_n^*$, $R_{[f,\beta]}(t)$ 是 n 阶三角式方阵，其对角线下面的系数都是 0，其对角线系数顺次是

$$(1-f(\phi_t(q_n^{\#}(\beta))))\omega_1(\chi_t^{\#}(\beta)),$$
$$\omega_2(\chi_t^{\#}(\beta)),\cdots,\omega_n(\chi_t^{\#}(\beta)).$$

$R_{[f,\beta]}(t)$对$(t,\beta)\in(-\infty,\infty)\times\mathscr{F}_n^*$ 连续，且在$(-\infty,\infty)\times\mathscr{F}_n^*$上有界，并且，若对于一$t_0$有 $f(\phi_{t_0}(q_n^{\#}(\beta)))=1$, 则 $R_{[f,\beta]}(t_0)$ 的第一个行向量为 0.

对 M^n 上同一点 b 处的正规 n-标架 β 及 $\beta'\in\mathscr{F}_n^*$，命 $V_{\beta\beta'}(t)$ 给出同 (1.1) 中，这是一正交方阵. 若 b 是 S 的一常点，则因

$$\mathrm{proj}_1\chi_t^{\#}(\beta)=\mathrm{proj}_1\chi_t^{\#}(\beta')=S(\phi_t(b))/\|S(\phi_t(b))\|,$$

$V_{\beta\beta'}(t)$ 中第一个行向量是 $(1,0,\cdots,0)$ 对所有 $t\in(-\infty,\infty)$.

对于 $X\in\mathscr{X}_c$ 及 $\beta\in\mathscr{F}_n^*$，我们也将把方程组$(X_{[f,\beta]})$写成尾式形式

$$\frac{dy}{dt}=yR_{[f,\beta]}(t)^{tr}+X_{\mathrm{Rem}[f,\beta]}(t,y),\quad (t,y)\in L_c, \tag{$X_{[f,\beta]}$}$$

其中

$$X_{\mathrm{Rem}[f,\beta]}(t,y)=X_{[f,\beta]}(t,y)-yR_{[f,\beta]}(t)^{tr}.$$

定理 2.11 对于 $X\in\mathscr{X}_c$, $\beta\in\mathscr{F}_n^*$ 及给定如上的 M^n 上的连续函数 $f(x)$，方程组 $(X_{[f,\beta]})$ 具有性质:

(i) 若对于一 t_0 有 $f(\phi_{t_0}(q_n^{\#}(\beta)))=1$，则向量 $X_{[f,\beta]}(t_0,y)\in E^n$ 的第一个分支$=0$ 对所有 $y\in A_c$.

(ii) $R_{[f,X_s^\#(\beta)]}(t) = R_{[f,\beta]}(s+t)$, $X_{\mathrm{Rem}[f,X_s^\#(\beta)]}(t, y) = X_{\mathrm{Rem}[f,\beta]}(s+t,y)$ 对 $s,t\in(-\infty,\infty)$ 及 $y\in A_c$.

(iii) 若 β 及 $\beta'\in\mathscr{F}_n^*$ 是 M^* 上同一点处的正规 n-标架,则 $(X_{[f,\beta']})$ 是由 $(X_{[f,\beta]})$ 经过变数变换 $y'=yV_{\beta\beta'}(t)^{tr}$ 而得的方程组;事实上,

$$R_{[f,\beta']}(t)^{tr}=V_{\beta\beta'}(t)R_{[f,\beta]}(t)^{tr}V_{\beta\beta'}(t)^{tr}+V_{\beta\beta'}(t)\frac{dV_{\beta\beta'}(t)^{tr}}{dt},$$

$$t\in(-\infty,\infty), \tag{2.23}$$

$$X_{\mathrm{Rem}[f,\beta']}(t,y)=X_{\mathrm{Rem}[f,\beta]}(t,yV_{\beta\beta'}(t))V_{\beta\beta'}(t)^{tr},\ (t,y)\in L_c. \tag{2.24}$$

证 (i)明显。(ii)中前一等式从命题1.4及 $R_{[f,\beta]}(t)$ 的定义得出。由于(2.3)及(2.17)等,易看出

$$X_{[f,X_s^\#(\beta)]}(t,y)=X_{[f,\beta]}(s+t,y),$$

由是(ii)中第二个等式也成立。

现证(iii). 设 $b=q_n^\#(\beta)=q_n^\#(\beta')$, β 及 $\beta'\in\mathscr{F}_n^*$. 若 b 是 S 的一奇点,则 $f(\phi_t(b))=0$, 从而

$$R_{[f,\beta]}(t)=R_\beta(t),\ R_{[f,\beta']}(t)=R_{\beta'}(t).$$

这情况下的(2.23)已给在(1.2)中。 若 b 是一常点, 则 $V_{\beta\beta'}(t)$ 是正交方阵, 其第一个行向量是 $(1,0,\cdots,0)$, 从而据(1.2)及(2.22)直接计算也给出(2.23). 既然(2.23)总成立,所以要证(2.24)我们只须证

$$X_{[f,\beta']}(t,yV_{\beta\beta'}(t)^{tr})=X_{[f,\beta]}(t,y)V_{\beta\beta'}(t)^{tr}+y\frac{dV_{\beta\beta'}(t)^{tr}}{dt},$$

$$(t,y)\in L_c \tag{2.25}$$

(即 $(X_{[f,\beta']})$ 是由 $(X_{[f,\beta]})$ 经过变数变换 $y'=yV_{\beta\beta'}(t)^{tr}$ 而得).

要证(2.25), 考虑微拓变换 ϑ_β, $\vartheta_{\beta'}$ 给出同(2.10)中.对于 $h_{\beta\beta'}(t,y)=yV_{\beta\beta'}(t)^{tr}$, 我们有

$$\mathscr{D}_{\beta'}(t,h_{\beta\beta'}(t,y))=\mathscr{D}_\beta(t,y),\ (t,y)\in\mathscr{L}_0. \tag{2.26}$$

这是说 $\vartheta_\beta=\vartheta_{\beta'}H_{\beta\beta'}$

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{L}_0 & \xrightarrow{\vartheta_\beta} & (-\infty, \infty) \times M^* \\ & {\scriptstyle H_{\beta\beta'}} \searrow \quad \nearrow {\scriptstyle \vartheta_{\beta'}} & \\ & \mathscr{L}_0 & \end{array}$$

其中 $H_{\beta\beta'}(t,y) = (t, h_{\beta\beta'}(t,y))$。于是因

$$d\vartheta_\beta \left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{(t,y)} + (0, X_\beta(t,y)) \right)$$

$$= e(\vartheta_\beta(t,y)) + (0, X(\mathscr{P}_\beta(t,y))),$$

$$d\vartheta_{\beta'} \left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{(t,y)} + (0, X_{\beta'}(t, y)) \right)$$

$$= e(\vartheta_{\beta'}(t,y)) + (0, X(\mathscr{P}_{\beta'}(t,y)))$$

(见 (2.15))，我们必有

$$dH_{\beta\beta'} \left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{(t,y)} + (0, X_\beta(t, y)) \right)$$

$$= \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{H_{\beta\beta'}(t,y)} + (0, X_{\beta'}(H_{\beta\beta'}(t,y))),$$

因此，

$$X_{\beta'}(H_{\beta\beta'}(t, y)) = dh_{\beta\beta'} \left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{(t,y)} + (0, X_\beta(t, y)) \right)$$

$$= dh_{\beta\beta'} \left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{(t,y)} \right) + dh_{\beta\beta'}(0, X_\beta(t,y)),$$

即

$$X_{\beta'}(t, yV_{\beta\beta'}(t)^{tr}) = y \frac{dV_{\beta\beta'}(t)^{tr}}{dt} + X_\beta(t,y)V_{\beta\beta'}(t)^{tr},$$

$$(t,y) \in \mathscr{L}_0. \tag{2.27}$$

另一方面，从 (2.16) 及 (2.26) 我们有

$$\overline{X}_{\beta'}(t, yV_{\beta\beta'}(t)^{tr}) = \overline{X}_\beta(t,y)V_{\beta\beta'}(t)^{tr}, \quad (t,y) \in \mathscr{L}_0. \tag{2.28}$$

因而据 (2.17)，

$$\bar{\bar{S}}_{\beta'}(t, yV_{\beta\beta'}(t)^{tr}) = \bar{\bar{S}}_\beta(t,y) \ V_{\beta\beta'}(t)^{tr} - y\frac{dV_{\beta\beta'}(t)^{tr}}{dt}, (t,y) \in \mathscr{L}_0. \tag{2.29}$$

现在，若 b 是 S 的一奇点，则因 $f(\phi_t(b))=0$（对所有 t），

$$X_{[f,\beta]}(t,y)=X_\beta(t,y),\quad X_{[f,\beta']}(t,y)=X_{\beta'}(t,y),$$

而(2.27)即(2.25)。若 b 是 S 的一常点，则因正交方阵 $V_{\beta\beta'}(t)$ 的第一个行向量是 $(1,0,\cdots,0)$（对所有 t），据(2.29)我们有

$$\bar{S}^1_{\beta'}(t,yV_{\beta\beta'}(t)^{tr})=\bar{S}^1_\beta(t,y),\quad (t,y)\in\mathscr{L}_0. \tag{2.30}$$

同样理由及(2.28)给出

$$\bar{X}^1_{\beta'}(t,yV_{\beta\beta'}(t)^{tr})=\bar{X}^1_\beta(t,y),(t,y)\in\mathscr{L}_0. \tag{2.31}$$

从这些及 $X_{[f,\beta]}(t,y)$ 等的定义，我们看出(2.25)仍成立。定理证完。

定理 2.12 对任给的 $\mu>0$ 及 $\zeta>0$，S 在 $\mathscr{X}$ 中有一 C^0 邻域 $\mathscr{W}\subset\mathscr{X}_c$ 及一数 $\xi>0$，$\xi<\mathrm{Min}\{\zeta_c,\zeta\}$，使得只要 $X\in\mathscr{W}$，即有

$$\sup_{(t,y,\beta)\in L_c\times\mathscr{F}^*_n,\|y\|\leqslant\xi}\|X_{\mathrm{Rem}[f,\beta]}(t,y)\|<\mu\xi.$$

证 对 $X\in\mathscr{X}_c$ 及 $\beta\in\mathscr{F}^*_n$，可写

$$X_{\mathrm{Rem}[f,\beta]}(t,y)=(X_{[f,\beta]}(t,y)-S_{[f,\beta]}(t,y))$$
$$+(S_{[f,\beta]}(t,y)-yR_{[f,\beta]}(t,y)),(t,y)\in\mathscr{L}_0.$$

因当 y 趋近于 0 时，

$$\frac{\partial S_{[f,\beta]}(t,y)}{\partial y}$$

对所有 $(t,\beta)\in(-\infty,\infty)\times\mathscr{F}^*_n$ 均匀地趋近于 $R_{[f,\beta]}(t)$，所以应用中值定理可得一数 $\xi>0$，$\xi<\mathrm{Min}\{\zeta_c,\zeta\}$，使

$$\sup_{(t,y,\beta)\in L_c\times\mathscr{F}^*_n,\|y\|\leqslant\xi}\|S_{[f,\beta]}(t,y)-yR_{[f,\beta]}(t,y)\|<\frac{\mu}{2}\xi.$$

又据引理 2.7 及命题 2.4 也可看出，$\{X,S\}^0$ 充分小蕴涵

$$\sup_{(t,y,\beta)\in L_c\times\mathscr{F}^*_n}\|X_{[f,\beta]}(t,y)-S_{[f,\beta]}(t,y)\|<\frac{\mu}{2}\xi.$$

这证明定理。

定理 2.13 对任给的 $\mu>0$ 及 $\kappa>0$，S 在 $\mathscr{X}$ 中有一 C^1 邻域 $\mathscr{W}'\subset\mathscr{X}_c$ 及一数 $\xi'>0$，$\xi'<\zeta_c$，使得只要 $X\subset\mathscr{W}'$，即有

$$\|X_{\mathrm{Rem}[f,\beta]}(t,y)\| < \mu\xi'$$

及

$$\|X_{\mathrm{Rem}[f,\beta]}(t,y) - X_{\mathrm{Rem}[f,\beta]}(t,y')\| < \kappa\|y - y'\|$$

对所有 (t,y) 及 $(t,y')\in L_c$, $\|y\|\leqslant\xi'$, $\|y'\|\leqslant\xi'$, 及 $\beta\in\mathscr{F}_n^*$.

证 与上证相类似地证;据命题 2.3 及引理 2.7 可看出, $\{X, S\}$ 充分小蕴涵

$$\sup_{(t,y,\beta)\in L_c\times\mathscr{F}_n^*}\{\|X_{[f,\beta]}(t,y) - S_{[f,\beta]}(t,y)\|$$

$$+\mathscr{N}\left(\frac{\partial}{\partial y}(X_{[f,\beta]}(t,y) - S_{[f,\beta]}(t,y))\right)\}$$

充分小。

显然 $\iota^*(\mathscr{E})\subset\mathscr{F}_n^*$. 本节下面，设 Λ 为 M^n 中一子集，在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变,记

$$\mathscr{X}(S,\Lambda) = \{X\in\mathscr{X}\,|\,\overline{X}^1_{\iota^*(\alpha)}(0,0)>0\ \text{对所有}\ \alpha\in\tau^{-1}(\Lambda)\}.$$

显然 $\tau^{-1}(\Lambda)$ 在 $\Theta_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变,且 $\subset\mathscr{E}$.

我们指出下述几点:

(i_0) 若 $X\in\mathscr{X}$ 满足 $\overline{X}^1_{\iota^*(\alpha_0)}(0,0)>0$ 对某一 $\alpha_0\in\mathscr{E}$,则因

$$\overline{X}^1_{\iota^*(\alpha_0)}(t,yV_{\iota^*(\alpha)\iota^*(\alpha_0)}(t)^{tr}) = \overline{X}^1_{\iota^*(\alpha)}(t,y)$$

对 $\tau(\alpha)=\tau(\alpha_0)$ 及 $(t,y)=(0,0)$ (见 (2.31)), 所以 $\overline{X}^1_{\iota^*(\alpha)}(0,0)$ 也 >0 对所有使 $\tau(\alpha)=\tau(\alpha_0)$ 的 $\alpha\in\mathscr{E}$;

(ii_0) 如果 $X\in\mathscr{X}(S,\Lambda)$, 则 X 的任一奇点 $x_0\in\Lambda$ 也必须是 S 的一奇点。这是因为若 x_0 不是 S 的奇点,则有 $\alpha\in\tau^{-1}(\Lambda)$ 使 $\tau(\alpha)=x_0$。但据 (2.16), 在 x_0 是 X 的奇点这情况下

$$\overline{X}_{\iota^*(\alpha)}(0,0)=0.$$

由是 $\overline{X}^1_{\iota^*(\alpha)}(0,0)=0$, 与 $X\in\mathscr{X}(S,\Lambda)$ 相矛盾;

(iii_0) 如果 $X\in\mathscr{X}(S,\Lambda)$, 则因对任意的 $(t,\alpha)\in(-\infty,\infty)\times\tau^{-1}(\Lambda)$, $\iota^*\Theta_t(\alpha)=\chi_t^{\#}\iota^*(\alpha)$, 故据 (2.17),

$$\overline{X}_{\iota^*(\alpha)}(t,y) = \overline{X}_{\iota^*\Theta_t(\alpha)}(0,y)$$

由是 $\overline{X}^1_{\iota^*(\alpha)}(t,0)>0$ 对所有 $t\in(-\infty,\infty)$.

记

$$\tilde{L} = \{(t,z)\in E^n \mid \|z\| < \zeta_0\}$$

(ζ_0 同 (1.4) 中). 设 $X\in\mathscr{X}(S,\Lambda)$, $\alpha\in\tau^{-1}(\Lambda)$. 记

$$\tilde{L}_{X,\alpha} = \{(t,z)\in(-\infty,\infty)\times E^{n-1} \mid (t,z)\in\tilde{L},$$

$$\bar{X}^1_{t^*(\alpha)}(t,0,z) > 0 \text{ 且 } \bar{\bar{S}}^1_{t^*(\alpha)}(t,0,z) > 0\}.$$

从 $\bar{X}_{t^*(\alpha)}(t,y)$ 及 $\bar{\bar{S}}_{t^*(\alpha)}(t,y)$ 对 (t,y) 的连续性及 $\mathscr{X}(S,\Lambda)$ 的定义, $\tilde{L}_{X,\alpha}$ 是 E^n 中一开子集包含 t-轴. 我们于是考虑常微分方程组

$$\frac{dz}{dt} = \tilde{X}_\alpha(t,z),\ (t,z)\in\tilde{L}_{X,\alpha}, \qquad (\tilde{X}_\alpha)$$

其中 $\tilde{X}_\alpha(t,z)\in E^{n-1}$, 而

$$(0,\tilde{X}_\alpha(t,z)) = \frac{\bar{\bar{S}}^1_{t^*(\alpha)}(t,0,z)}{\bar{X}^1_{t^*(\alpha)}(t,0,z)}\bar{X}_{t^*(\alpha)}(t,0,z)$$

$$-\bar{\bar{S}}_{t^*(\alpha)}(t,0,z)\in E^n.$$

我们说明一下: S 显然 $\in\mathscr{X}(S,M^n)$, 因而可定义 $(\tilde{S}_\alpha)$ 对任一 $\alpha\in\mathscr{E}$. 但 §1 中提到的方程组 $(\tilde{S}_\alpha)$ 的定义方式(它定义在 E^n 的开子集 $\tilde{K}_\alpha$ 上)与这里的不同. 在下面命题 2.16 中, 我们将指出, $\tilde{L}_{S,\alpha}\subset\tilde{K}_\alpha$ 且两种不同的定义方式在 $\tilde{L}_{S,\alpha}$ 上实际上一致.

引理 2.14 设 Λ 是 M^n 中一子集, 在 ϕ_t $(-\infty<t<\infty)$ 下不变. 若前面给的常数 c 及给在 M^n 上的函数 $f(x)$ 满足要求: $f(x)=1$ 对所有使 $\|S(x)\|\geqslant 2c$ 的 $x\in\Lambda$, 则对任给的

$$X\in\mathscr{X}_\epsilon\cap\mathscr{X}(S,\Lambda) \text{ 及 } \alpha\in\tau^{-1}(\Lambda),$$

我们有

$$(0,\tilde{X}_\alpha(t,z)) = X_{[f,t^*(\alpha)]}(t,0,z),$$

如果 $(t,0,z)\in L_\epsilon$ 且 $\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\| > 2c$.

证 显然.

对 $X\in\mathscr{X}(S,\Lambda)$ 及 $\alpha\in\tau^{-1}(\Lambda)$, 我们也将写 $(\tilde{X}_\alpha)$ 成尾式形式

$$\frac{dz}{dt} = z\tilde{R}_\alpha(t)^{tr} + \tilde{X}_{\mathrm{Rem}(\alpha)}(t,z),\ (t,z)\in\tilde{L}_{x,\alpha}, \qquad (\tilde{X}_\alpha)$$

其中

$$\widetilde{X}_{\mathrm{Rem}(\alpha)}(t,z)=\widetilde{X}_\alpha(t,z)-z\widetilde{R}_\alpha(t)^{\mathrm{tr}}$$

($\widetilde{R}_\alpha(t)$ 是三角式方阵，见 §1)．定义 ($\widetilde{X}_\alpha$) 如上，从命题 2.6 易看出 $\widetilde{X}_\alpha(t,\ z)$对$(t,\ z)\in\widetilde{L}_{X,\alpha}$ 连续，对 z 可微，且 $\dfrac{\partial\widetilde{X}_\alpha}{\partial z}$ 也对 z 连续．仿照 (2.22) 式易计算出

$$\widetilde{R}_\alpha(t)=\left.\frac{\partial\widetilde{S}_\alpha}{\partial z}\right|_{z=0}.$$

对 M^n 上同一常点处的正规 $(n-1)$-标架 α 及 $\alpha'\in\mathscr{E}$，记 $V_{\alpha\alpha'}(t)=$ 相关矩阵 $\langle\Theta_t(\alpha),\ \Theta_t(\alpha')\rangle^{\mathrm{tr}}$ 同 §1 中．易看出

$$V_{\iota^*(\alpha)\iota^*(\alpha')}(t)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & V_{\alpha\alpha'}(t)\end{pmatrix}.$$

命题 2.15 设 Λ 是 M^n 中一子集，在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变．对于 $X\in\mathscr{X}(S,\Lambda)$ 及 $\alpha\in\tau^{-1}(\Lambda)$，方程组 ($\widetilde{X}_\alpha$) 具有性质：

(i) $\widetilde{R}_{\Theta_s(\alpha)}(t)=\widetilde{R}_\alpha(s+t)$ 对 s 及 $t\in(-\infty,\infty)$，

$$\widetilde{X}_{\mathrm{Rem}\Theta_s(\alpha)}(t,z)=\widetilde{X}_{\mathrm{Rem}(\alpha)}(s+t,z)$$

对 $s\in(-\infty,\infty)$ 及 $(t,z)\in\widetilde{L}_{X,\Theta_s(\alpha)}$ 且

$$\widetilde{L}_{X,\Theta_s(\alpha)}=\{(t,z)\in E^n\,|\,(s+t,z)\in\widetilde{L}_{X,\alpha}\};$$

(ii) 若 α 及 α' 是 M^n 上 S 的同一常点处的正规 $(n-1)$-标架 $\in\tau^{-1}(\Lambda)$，则 ($\widetilde{X}_{\alpha'}$) 是由 ($\widetilde{X}_\alpha$) 经过变数变换 $z'=zV_{\alpha\alpha'}(t)^{\mathrm{tr}}$ 而得的方程组；事实上，

$$\widetilde{R}_{\alpha'}(t)^{\mathrm{tr}}=V_{\alpha\alpha'}(t)\widetilde{R}_\alpha(t)^{\mathrm{tr}}V_{\alpha\alpha'}(t)^{\mathrm{tr}}+V_{\alpha\alpha'}(t)\frac{dV_{\alpha\alpha'}(t)^{\mathrm{tr}}}{dt},$$

$$t\in(-\infty,\infty),$$

$$\widetilde{X}_{\mathrm{Rem}(\alpha')}(t,z)=\widetilde{X}_{\mathrm{Rem}(\alpha)}(t,zV_{\alpha\alpha'}(t))V_{\alpha\alpha'}(t)^{\mathrm{tr}},(t,z)\in\widetilde{L}_{\alpha'},$$

且 $(t,z)\in\widetilde{L}_{X,\alpha'}\Longleftrightarrow(t,zV_{\alpha\alpha'}(t))\in\widetilde{L}_{X,\alpha}$.

证 (i) 可从命题 1.4 及式子 (2.17) 得到．(ii) 中的关系式

$$(t,z)\in\widetilde{L}_{X,\alpha'}\Longleftrightarrow(t,zV_{\alpha\alpha'}(t))\in\widetilde{L}_{X,\alpha}$$

易用如同 (2.30) 及 (2.31) 的式子验证．(ii) 中其余两个等式可从定理 2.11-(iii) 及引理 2.14 推出；事实上，据 S 及 X 的连续

性，对任给定的 $(t,\alpha)\in(-\infty,\infty)\times\tau^{-1}(\Lambda)$ 我们可取常数 c_0 及函数 $f_0(x)$ 满足这引理要求且使得

$$X\in\mathscr{X}_{c_0},\ \|s(\phi_t(\tau(\alpha)))\|>2c_0.$$

对任一 $\alpha\in\mathscr{E}$，记

$$\widetilde{\mathscr{P}}_\alpha:\quad(-\infty,\infty)\times E^{n-1}\to M^n$$

为由$\widetilde{\mathscr{P}}_\alpha(t,z)=\mathscr{P}_{t^*(\alpha)}(t,0,z)=\exp\mathscr{P}_\alpha(t,z)$(§1)给出的映射．这是一 C^1 型映射．

对任意的 $X\in\mathscr{X}(S,\Lambda)$ 及 $\alpha\in\tau^{-1}(\Lambda)$，简记

$$\tilde{f}_{X,\alpha}(t,z)=\frac{\bar{S}^1_{t^*(\alpha)}(t,0,z)}{\bar{X}^1_{t^*(\alpha)}(t,0,z)},\ (t,z)\in\widetilde{L}_{X,\alpha}.\qquad(2.32)$$

则 $\tilde{f}_{X,\alpha}(t,z)$ 对 $(t,z)\in\widetilde{L}_{X,\alpha}$ 连续，对 z 可微，且 $\partial\tilde{f}_{X,\alpha}/\partial z$ 也对 z 连续．又 $\tilde{f}_{X,\alpha}(t,z)$ 在 $\widetilde{L}_{X,\alpha}$ 上恒 >0，且

$$\tilde{f}_{X,\theta_s(\alpha)}(t,z)=\tilde{f}_{X,\alpha}(s+t,z).$$

命题 2.16 设 Λ 是 M^n 中一子集在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变．对于 $X\in\mathscr{X}(S,\Lambda)$ 及 $\alpha\in\tau^{-1}(\Lambda)$，方程组 $(\widetilde{X}_\alpha)$ 具有性质：

(i) $\widetilde{X}_{\mathrm{Rem}(\alpha)}(t,z)$ 对 $(t,z)\in\widetilde{L}_{X,\alpha}$ 连续，对 z 可微，且在每一点 $(s,u)\in\widetilde{L}_{X,\alpha}$ 处都局部地满足一 Lipschitz 条件，即，(s,u) 有一个在 $\widetilde{L}_{X,\alpha}$ 中的邻域 $\widetilde{U}_{(s,u)}$ 且对应于 (s,u) 有一常数 $\tilde{k}_{(s,u)}$ 使得

$$\|\widetilde{X}_{\mathrm{Rem}(\alpha)}(t,z)-\widetilde{X}_{\mathrm{Rem}(\alpha)}(t,z')\|\leqslant\tilde{k}_{(s,u)}\|z-z'\|$$

对 (t,z) 及 $(t,z')\in\widetilde{U}(s,u)$；

(ii) 若 $z(t;s,u)$ 对于 $t\in$某一区间 (s',s'')（它包含 s）是 $(\widetilde{X}_\alpha)$ 的一解使 $z(s;s,u)=u$，则 X 在 M^n 上过 $\widetilde{\mathscr{P}}_\alpha(s,u)$ 的积分线包含 $\{\widetilde{\mathscr{P}}_\alpha(t,z(t;s,u))|t\in(s',s'')\}$；确切地说，

$$\widetilde{\mathscr{P}}_\alpha(t;z(t;s,u))=\phi_{X\tilde{t}}(\widetilde{\mathscr{P}}_\alpha(s,u)),$$

其中

$$\tilde{t}=\int_s^t\tilde{f}_{X,\alpha}(t',z(t';s,u))dt'$$

是对 t 连续的严格递增函数，它当 $t=s$ 时取值 0；$\widetilde{\mathscr{P}}_\alpha$ 在 $(s,u)\in\widetilde{L}_{X,\alpha}$ 处是正则映射．

对于 $S\in\mathscr{X}(S,M^n)$ 及 $\alpha\in\mathscr{E}$，我们有 $\widetilde{L}_{S,\alpha}\subset\widetilde{K}_\alpha$，且关于

$(\hat{S}_a)$ 分别给在上面及前节中的两种定义在 $\tilde{L}_{S,\alpha}$ 上一致。

证 这里 (i) 中所述的连续及可微性可从 $\tilde{X}_\alpha(t,z)$ 及 $\tilde{R}_\alpha(t)$ 相应的连续及可微性得到。(i) 中所述的局部 Lipschitz 条件可用中值定理以及命题 2.2,2.3 中所述关于 $\bar{S}_{t^*(\alpha)}(t,y)$, $\bar{\bar{S}}_{t^*(\alpha)}(t,y)$, $X_{t^*(\alpha)}(t,y)-S_{t^*(\alpha)}(t,y)$ 的有界性及它们对 y 的 Jacobian 方阵的有界性得出(对于 (s,u), 我们不失一般性可设 $\|u\|<\zeta$)。(ii) 的证法同定理 2.9-(ii) 中，因

$$d\mathscr{P}^*_{t^*(\alpha),s}(\bar{X}^*_{t^*(\alpha)}(s,v))=X(\mathscr{P}_{t^*(\alpha),s}(v)),$$

这里 $v=(0,u)\in E^n$, 而 $\bar{X}^1_{t^*(\alpha)}(s,v)>0$, 故

$$X(\mathscr{P}_{t^*(\alpha),s}(v))\neq 0$$

且不与 S 过 $\phi_s(\tau(\alpha))$ 处的超割曲面

$$N=\{x\in M^n|x=\mathscr{P}_{t^*(\alpha),s}(y),$$
$$y=(y^1,y^2,\cdots,y^n)\in E^n,\ \|y\|<\zeta_0,\ y^1=0\}$$

相切 (N 是 M^n 中一 $n-1$ 维子微分流形)。进一步从 (ii) 我们又有

$$d\tilde{\mathscr{P}}_\alpha(1,\tilde{X}_\alpha(s,u))=\bar{\gamma}_{X,\alpha}(s,v)X(\mathscr{P}_{t^*(\alpha)}(v))\neq 0.$$

于是易看出，$\tilde{\mathscr{P}}_\alpha$ 在 (s,u) 处是正则的。

特别地，当 $X=S\in\mathscr{X}(S,M^n)$ 时，这给出 $(s,u)\in\hat{R}_\alpha$ 且 $\hat{S}_\alpha(s,u)\neq 0$ 对任一 $(s,u)\in\tilde{L}_{S,\alpha}$ (看前节)。故 $\tilde{L}_{S,\alpha}\subset\tilde{K}_\alpha$。

为完成命题的证明，暂把前节中定义的 $(\tilde{S}_\alpha)$ 写作 $(\tilde{\bar{S}}_\alpha)$ 以别于本节上面定义的 $(\tilde{S}_\alpha)$。任给 $(s,u)\in\tilde{L}_{S,\alpha}$。因 $\tilde{\mathscr{P}}_\alpha$ 在 (s,u) 处是正则的 C^1 型映射，可取 (s,u) 在 $\tilde{L}_{S,\alpha}$ 中一邻域 W 使得 $\tilde{\mathscr{P}}_\alpha$ 在 W 上是单映射. 于是 $(\tilde{S}_\alpha)$ 及 $(\tilde{\bar{S}}_\alpha)$ 过 (s,u) 都分别有解 $z(t;s,u)$ 及 $z'(t;s,u)$ 对 $t\in$ 某一区间 (t',t'') (它包含 s), $z(s;s,u)=u=z'(s;s,u)$, 使得

$$C=\{z(t;s,u)\ t\in(t',t'')\}\subset W,$$
$$C'=\{z'(t;s,u)|t\in(t',t'')\}\subset W,$$

且 $\tilde{\mathscr{P}}_\alpha$ 将 C 及 C' 都映至 S 过 $\tilde{\mathscr{P}}_\alpha(s,u)$ 的一积分线弧中 (看这里的 (ii) 及前节)。但 $\tilde{\mathscr{P}}_\alpha$ 在 W 上既然是单映射，就必有 $z(t;s,u)=z'(t;s,u)$ 对 $t\in(t',t'')$。这给出

$$\tilde{S}_\alpha(s,u)=\frac{dz(t;s,u)}{dt}\bigg|_{t=s}=\frac{dz'(t;s,u)}{dt}\bigg|_{t=s}=\tilde{\tilde{S}}_\alpha(s,u).$$

现在，命题证完。

命题 2.17 设 Λ 是 M^n 中一闭子集，在 $\phi_t\ (-\infty<t<\infty)$ 下不变，且不含有 S 的奇点。则 S 在 $\mathscr{X}$ 中有一 C^0 邻域 $\tilde{\mathscr{V}}$ 及一常数 $\bar{\xi}>0$ 使得

(i) $\tilde{\mathscr{V}}\subset\mathscr{X}(S,\Lambda)$.

(ii) 对任意的 $X\in\tilde{\mathscr{V}}$ 及 $\alpha\in\tau^{-1}(\Lambda)$, 集合 $\tilde{J}(\Lambda,\bar{\xi})=(-\infty,\infty)\times\tilde{A}$ 包含在 $\tilde{L}_{X,\alpha}$ 内，这里 $\tilde{A}$ 表 $\{z\in E^{n-1}|\|z\|\leqslant\bar{\xi}\}$ (由是 $(\tilde{X}_\alpha)$ 在 $\tilde{J}(\Lambda,\bar{\xi})$ 上恒有定义)。

(iii) 任给 $X\in\tilde{\mathscr{V}}$. 则当 t 给定时，$\tilde{X}_{\mathrm{Rem}(\alpha)}(t,z)$ 对 $(z,\alpha)\in\tilde{A}\times\tau^{-1}(\Lambda)$ 一致连续，这一致连续性对一任给的闭区间 $\langle t',t''\rangle$ 中的 t 来说是均等的；并且存在一 Lipschitz 常数 $\tilde{\kappa}_X$ 使得

$$\|\tilde{X}_{\mathrm{Rem}(\alpha)}(t,z)-\tilde{X}_{\mathrm{Rem}(\alpha)}(t,z')\|\leqslant\tilde{\kappa}_X\|z-z'\|,(t,z)$$
$$\text{及}\ (t,z')\in\tilde{J}(M^n,\bar{\xi}),$$

对所有 $\alpha\in\tau^{-1}(\Lambda)$.

(iv) 对于给在(2.32)中的 $\tilde{f}_{X,\alpha}(t,z)$, 我们有

$$0<b_0=\inf_{\substack{(t,z,\alpha)\in\tilde{J}(\Lambda,\bar{\xi})\times\tau^{-1}(\Lambda)\\ X\in\tilde{\mathscr{V}}}}\tilde{f}_{X,\alpha}(t,z)$$

$$\leqslant\sup_{\substack{(t,z,\alpha)\in\tilde{J}(\Lambda,\bar{\xi})\times\tau^{-1}(\Lambda)\\ X\in\tilde{\mathscr{V}}}}\tilde{f}_{X,\alpha}(t,z)=b_1<\infty.$$

(v) $\displaystyle\sup_{\substack{(t,z,\alpha)\in\tilde{J}(\Lambda,\bar{\xi})\times\tau^{-1}(\Lambda)\\ X\in\tilde{\mathscr{V}}}}\|\tilde{X}_{\mathrm{Rem}(\alpha)}(t,z)\|<\infty.$

证 Λ 是紧致集不含有 S 的奇点，故从 S 的连续性我们可取常数 c_0,

$$c_0=\frac{1}{2}\inf_{x\in\Lambda}\|S(x)\|>0.$$

据引理 2.7, S 在 $\mathscr{X}$ 中有一 C^0 邻域 $\tilde{\mathscr{V}}=\mathscr{V}_{c_0}$ 及一数 $\bar{\xi}=\xi_{c_0}>0$ 满足

$$0<\inf_{\substack{(t,z,\alpha)\in\tilde{J}(\Lambda,\bar{\xi})\times\tau^{-1}(\Lambda)\\ X\in\tilde{\mathscr{V}}}}\tilde{S}^1_{t^*(\alpha)}(t,0,z)$$

$$\leqslant \sup_{(t,x,\alpha)\in \tilde{J}(\Lambda,\bar{\xi})\times\tau^{-1}(\Lambda)} \bar{S}^1_{t*(\alpha)}(t,0,z) < \infty,$$

$$0 < \inf_{\substack{(t,x,\alpha)\in \tilde{J}(\Lambda,\bar{\xi})\times\tau^{-1}(\Lambda)\\ X\in\mathscr{V}}} \bar{X}^1_{t*(\alpha)}(t,0,z)$$

$$\leqslant \sup_{(t,z,\alpha)\in \tilde{J}(\Lambda,\bar{\xi})\times\tau^{-1}(\Lambda)} \bar{X}^1_{t*(\alpha)}(t,0,z) < \infty.$$

于是 $\tilde{\mathscr{V}}\subset\mathscr{X}_{c_0}\cap\mathscr{X}(S,\Lambda)$，且 $\tilde{J}(\Lambda,\bar{\xi})\subset\tilde{L}_{X,\alpha}$ 对所有 $X\in\tilde{\mathscr{V}}$ 及 $\alpha\in\tau^{-1}(\Lambda)$。(iv) 也成立；又据命题 2.2 及 2.4 及 1.4，(v) 也成立。我们还可取 M^* 上的函数 $f_0(x)$，它 $=0$ 对于 $\|S(x)\|\leqslant c_0$ 且它在 Λ 上取常值 $=1$。于是对任意的 $X\in\tilde{\mathscr{V}}$ 及 $\alpha\in\tau^{-1}(\Lambda)$，

$(0,\tilde{X}_\alpha(t,z)) = X_{[f_0,1*(\alpha)]}(t,0,z)$ 对所有 $(t,z)\in\tilde{J}(\Lambda,\bar{\xi})$

(见引理 2.14)。这样，这里命题中的(iii)易从定理 2.9 (i) 直接得到。

命题 2.18 设 Λ 是 M^* 中一闭子集，在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变，且不含有 S 的奇点。则当 $z\in\tilde{A}$ 趋近于 0 时 ($\tilde{A}$ 同命题 2.17 中)，

$$\frac{\partial\tilde{S}_\alpha(t,z)}{\partial z}$$

对所有 $(t,\alpha)\in(-\infty,\infty)\times\tau^{-1}(\Lambda)$ 均匀地趋近于 $\tilde{R}_\alpha(t)$。

证 如同命题 2.17 的证明一样，我们可 (对于适当的 c_0 及 $f_0(x)$) 直接从命题 2.10 中一论断得出这命题。

命题 2.19 设 Λ 是 M^* 中一闭子集，在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变，且不含有 S 的奇点。命 $\tilde{\mathscr{V}},\bar{\xi}$ 及 $\tilde{J}(\Lambda,\bar{\xi})$ 同命题 2.17 中。则对任给的 $\mu>0$ 及 $\zeta>0$，S 在 $\mathscr{X}$ 中有一 C^0 邻域 $\mathscr{W}\subset\tilde{\mathscr{V}}$ 且有一数 $\xi>0$，$\xi<\mathrm{Min}\{\zeta,\bar{\xi}\}$，使得只要 $X\in\mathscr{W}$，即有

$$\sup_{(t,z,\alpha)\in\tilde{J}(\Lambda,\bar{\xi})\times\tau^{-1}(\Lambda),\ \|z\|\leqslant\xi} \|\tilde{X}_{\mathrm{Rem}}(t,z)\| < \mu\xi.$$

命题 2.20 设 Λ 是 M^* 中一闭子集，在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变，且不含有 S 的奇点.命 $\tilde{\mathscr{V}},\bar{\xi}$ 及 $\tilde{J}(\Lambda,\bar{\xi})$ 同命题 2.17 中.则对任给的 $\mu>0$ 及 $\varepsilon>0$，S 在 $\mathscr{X}$ 中有一 C^1 邻域 $\mathscr{W}'\subset\tilde{\mathscr{V}}$ 且有一数 $\xi'>0$，$\xi'<\bar{\xi}$，使得只要 $X\in\mathscr{W}'$，即有

$$\|\tilde{X}_{\mathrm{Rem}(\alpha)}(t,z)\| < \mu\xi',$$

$$\|\tilde{X}_{\mathrm{Rem}(\alpha)}(t,z)-\tilde{X}_{\mathrm{Rem}(\alpha)}(t,z')\|<\kappa\|z-z'\|$$

对所有的 (t,z) 及 $(t,z')\in\tilde{J}(\Lambda,\xi)$，$\|z\|\leqslant\xi'$，$\|z'\|\leqslant\xi'$，及 $\alpha\in\tau^{-1}(\Lambda)$。

这两个命题也可看作定理 2.12 及 2.13 的特款(由于 S 在 $\mathscr{X}$ 中的一 C^0 邻域也都是它的一 C^1 邻域，我们可要求 $\mathscr{W}'\subset\tilde{\mathscr{V}}$ 及 ξ' 任意地小)。

但上面讨论的对于 $X\in\mathscr{X}(S,\Lambda)$的方程组 $(\tilde{X}_\alpha)$ $(\alpha\in\tau^{-1}(\Lambda))$ 用来处理 S 的奇点邻域与整个相空间怎样相关这方面，不大方便．这是因为在 S 有奇点这情况下，不管限制 $\|z\|$ 怎样小，一般都不能指望 $\tilde{X}_\alpha(t,z)$ 在所有 (t,z) 处一致可定义．为此，我们将考虑较方便的方程组 (X_α^*)．这是从 $(\tilde{X}_\alpha)$ 经过变数变换 $z'=z/\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|$ 而得的方程组．确切地说，对任一 $X\in\mathscr{X}(S,M^n)$ 及 $\alpha\in\mathscr{E}$，命

$$L_{X,\alpha}^*=\{(t,z)\in E^n|(t,\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|z)\in\tilde{L}_{X,\alpha}\}.$$

明显地，这是 E^n 中一开子集包含 t-轴．于是考虑方程组

$$\frac{dz}{dt}=X_\alpha^*(t,z),\ (t,z)\in L_{X,\alpha}^*,\tag{X_α^*}$$

其中

$$\begin{aligned}X_\alpha^*(t,z)&=\frac{\tilde{X}_\alpha(t,\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|z)}{\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|}\\&\quad-\frac{1}{\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|}\frac{d\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|}{dt}\\&=\frac{\tilde{X}_\alpha(t,\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|z)}{\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|}-\omega_1(\iota^*\Theta_t(\alpha))z.\end{aligned}$$

易看出 $X_\alpha^*(t,z)$对$(t,z)\in L_{X,\alpha}^*$ 连续，对 z 可微，且 $\partial X_\alpha^*/\partial z$ 也对 z 连续．显然可写

$$\begin{aligned}(0,X_\alpha^*(t,z))&=\frac{\bar{S}_{\iota^*(\alpha)}^1(t,0,\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|z)}{\bar{X}_{\iota^*(\alpha)}^1(t,0,\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|z)}\\&\quad\times\frac{1}{\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|}\cdot\bar{X}_{\iota^*(\alpha)}(t,0,\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|z)\end{aligned}$$

$$- \frac{1}{\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|} \bar{\bar{S}}_{t^*(\alpha)}(t,\ 0,\ \|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|z)$$

$$- \omega_1(t^*\Theta_t(\alpha))(0, z).$$

特别地，当 $X = S$ 时，从命题 2.16 中所述易看出，对于 §1 中定义在 K_α^* 上的方程组 $(S_\alpha^*)(\alpha \in \mathscr{E})$，我们有

$$K_\alpha^* \supset L_{S,\alpha}^*,$$

$$(0, S_\alpha^*(t, z)) = \frac{\bar{\bar{S}}_{t^*(\alpha)}^1(t, 0, \|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|z)}{\bar{S}_{t^*(\alpha)}^1(t, 0, \|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|z)}$$

$$\times \frac{1}{\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|} \cdot \bar{S}_{t^*(\alpha)}(t, 0, \|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|z)$$

$$- \frac{1}{\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))} \|\bar{\bar{S}}_{t^*(\alpha)}(t, 0, \|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|z)$$

$$- \omega_1(t^*\Theta_t(\alpha))(0, z),$$

而关于 (S_α^*) 分别给在上面及前节中的两种定义，在 $L_{S,\alpha}^*$ 上一致。

定理 2.21 存在一 $\zeta^* > 0$ 使得对任一 $\alpha \in \mathscr{E}$，集合

$$J^*(M^n, \zeta^*) = (-\infty, \infty) \times \{z \in E^{n-1} \mid \|z\| \leqslant \zeta^*\}$$

包含在 $L_{S,\alpha}^*$ 内；并且，当 z 趋近于 0 时，

$$\frac{\partial S_\alpha^*(t, z)}{\partial z}$$

对所有 $(t, \alpha) \in (-\infty, \infty) \times \mathscr{E}$ 均匀地趋近于 $R_\alpha^*(t)$.

证 $\bar{\bar{S}}_{t^*(\alpha)}(t, 0) = \bar{S}_{t^*(\alpha)}(t,\ 0) = (\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|, 0, \cdots, 0)$ 对 $\alpha \in \mathscr{E}$. 所以应用中值定理，S 在紧致流形 M^n 上的连续性及命题 2.2 中所述的有界性，可取一常数 ζ^* 满足

$$\zeta^* \sup_{x \in M^n} \|S(x)\| < \bar{\zeta},$$

使得

$$|\bar{S}_{t^*(\alpha)}^k(t, 0, \|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|z) / \|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\| - \delta_{1k}| < \frac{1}{3},$$

(2.33)

$$|\bar{\bar{S}}_{t^*(\alpha)}^k(t, 0, \|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|z) / \|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\| - \delta_{1k}| < \frac{1}{3}$$

对所有 $z\in E^{n-1}$, $\|z\|\leqslant\zeta^*$, 及 $\alpha\in\mathscr{E}$。这给出 $J^*(M^n,\zeta^*)\subset L^*_{X,\alpha}$ 对所有 $\alpha\in\mathscr{E}$. 进一步要证定理叙述中的均匀逼近性,我们只需据

$$(0,S_\alpha^*(0,z))=\frac{\bar{\bar{S}}^1_{t^*(\alpha)}(0,0,\|S(\tau(\alpha))\|z)/\|S(\tau(\alpha))\|}{\bar{S}^1_{t^*(\alpha)}(0,0,\|S(\tau(\alpha))\|z)/\|S(\tau(\alpha))\|}$$

$$\cdot\frac{\bar{S}_{t^*(\alpha)}(0,0,\|S(\tau(\alpha))\|z)}{\|S(\tau(\alpha))\|}-\frac{\bar{\bar{S}}_{t^*(\alpha)}(0,0,\|S(\tau(\alpha))\|z)}{\|S(\tau(\alpha))\|}$$

$$-\omega_1(t^*(\alpha))(0,z),\quad (0,z)\in J^*(M^n,\zeta^*),$$

计算对 z 的 Jacobi 方阵，并用定理 2.1，命题 2.2 及式子（2.3）即得。证完.

这定理把定理 1.9 中所假定的 S 是 C^2 型系统弱化成 C^1 型系统,并且把其中所假定的 S 不含有非单式奇点这条件也取消[1]。

对于 $X\in\mathscr{X}(S,M^n)$ 及 $\alpha\in\mathscr{E}$，我们也将把（X_α^*）写成尾式形式

$$\frac{dz}{dt}=zR_\alpha^*(t)^{tr}+X^*_{\mathrm{Rem}(\alpha)}(t,z),\ (t,z)\in L^*_{X,\alpha},\qquad (X_\alpha^*)$$

其中

$$X^*_{\mathrm{Rem}(\alpha)}(t,z)=X_\alpha^*(t,z)-zR_\alpha^*(t)^{tr}=(X_\alpha^*(t,z)$$
$$-S_\alpha^*(t,z))=(S_\alpha^*(t,z)-zR_\alpha^*(t)^{tr}).$$

显然,也有

$$X^*_{\mathrm{Rem}(\alpha)}(t,z)=\frac{\widetilde{X}_\alpha(t,\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|z)}{\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|}-z\widetilde{R}_\alpha(t)^{tr}$$

$$=\frac{\widetilde{X}_{\mathrm{Rem}(\alpha)}(t,\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|z)}{\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|}.$$

由是直接从命题 2.16-(i) 看出，$X^*_{\mathrm{Rem}(\alpha)}(t,z)$ 对 $(t,z)\in L^*_{X,\alpha}$ 连续，对 z 可微，且在每一点 $(s,u)\in L^*_{X,\alpha}$ 处都局部地满足一 Lipschitz 条件.

---

1) 附带提一下,由于这原因,我们在 [3] 中所得的定理 A 仍然成立,如果把其中所假设的 S 是M^n上一 C^2 型系统没有非单式奇点这样一个条件弱化成 S 是 C^1 型系统的话. 同样原因,[3] 中定理 B 中所假设的 M^2 上 C^2 型系统可弱化成 C^1 型系统.

我们将取定一 $\zeta^* > 0$（由是取 $J^*(M^*,\zeta^*) = (-\infty,\infty)\times\{z\in E^{n-1}|\|z\|\leqslant\zeta^*\}$）满足定理 2.21 的要求，并且使得对任意的 $(t,z)\in J^*(M^*,\zeta^*)$ 及 $\alpha\in\mathscr{E}$，(2.33) 成立。这样，我们有

$$\frac{2}{3}\leqslant \mathrm{Min}\left\{\frac{\bar{S}^1_{t^*(\alpha)}(t,0,\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|z)}{\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|},\frac{\bar{\bar{S}}^1_{t^*(\alpha)}(t,0,\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|z)}{\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|}\right\}$$
$$\leqslant \mathrm{Max}\left\{\frac{\bar{S}^1_{t^*(\alpha)}(t,0,\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|z)}{\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|},\frac{\bar{\bar{S}}^1_{t^*(\alpha)}(t,0,\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|z)}{\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|}\right\}\leqslant\frac{4}{3}.$$

记 $A^* = \{z\in E^{n-1}|\|z\|\leqslant\zeta^*\}$.

定理 2.22 命 ζ^*，A^* 及 $J^*(M^*,\zeta^*)$ 给出如上. 设 Λ 是 M^* 中一闭子集，在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变且不含有 S 的非单式奇点，则 S 在 $\mathscr{X}$ 中有一 C^1 邻域 $\mathscr{V}^*$ 使得

(i) 对任意的 $X\in\mathscr{X}(S, M^*)\cap\mathscr{V}^*$ 及 $\alpha\in\tau^{-1}(\Lambda)$，集合 $J^*(M^*, \zeta^*)$ 包含在 $L^*_{X,\alpha}$ 内；

(ii) 对任给的 $X\in\mathscr{X}(S, M^*)\cap\mathscr{V}^*$ 及一闭区间 $\langle t', t''\rangle$ 以及 $\tau^{-1}(\Lambda)$ 中一个收敛到 $\alpha_0\in\tau^{-1}(\Lambda)$ 的序列 $\{\alpha_i\}$，向量函数序列 $\{X^*_{\mathrm{Rem}(\alpha_i)}(t,z)\}$ 在 $\langle t',t''\rangle\times A^*$ 上一致收敛到 $X^*_{\mathrm{Rem}(\alpha_0)}(t,z)$.

另外，对任给的 $\mu>0$ 及 $\kappa>0$，S 在 $\mathscr{X}$ 中有一 C^1 邻域 $\mathscr{W}\subset\mathscr{V}^*$ 且有一数 $\xi>0$，$\xi<\zeta^*$，使得只要 $X\in\mathscr{X}(S,M^*)\cap\mathscr{W}$，即有

$$\|X^*_{\mathrm{Rem}(\alpha)}(t,z)\|<\mu\xi \tag{2.34}$$

及

$$\|X^*_{\mathrm{Rem}(\alpha)}(t,z)-X^*_{\mathrm{Rem}(\alpha)}(t,z')\|<\kappa\|z-z'\| \tag{2.35}$$

对所有的 (t, z) 及 $(t, z')\in J^*(M^*, \zeta^*)$，$\|z\|\leqslant\xi$，$\|z'\|\leqslant\xi$，及 $\alpha\in\tau^{-1}(\Lambda)$.

证 对 $X\in\mathscr{X}$ 及 $\alpha\in\mathscr{E}$，简写

$$\begin{aligned}\bar{h}^k_{X\alpha}(t, z) &= \frac{\bar{X}^k_{t^*(\alpha)}(t,0,\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|z)}{\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|},\\ \bar{\bar{h}}^k_{\alpha}(t, z) &= \frac{\bar{\bar{S}}^k_{t^*(\alpha)}(t,0,\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|z)}{\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|}\end{aligned} \tag{2.36}$$

对 $(t,z)\in\tilde{L}$, $k=1,2,\cdots,n$.

于是,若 $X\in\mathscr{X}(S,M^n)$, 则

$$X^*_{\operatorname{Rem}(\alpha)}(t,z)=H_{X_\alpha}(t,z)+\{S^*_\alpha(t,z)-zR^*_\alpha(t)^{\mathrm{tr}}\},$$
$$(t,z)\in L^*_{X,\alpha}, \tag{2.37}$$

其中

$$H_{X_\alpha}(t,z)=\frac{\bar{h}^1_\alpha(t,z)}{\bar{h}^1_{X_\alpha}(t,z)}(\bar{h}^2_{X_\alpha}(t,z),\ \bar{h}^3_{X_\alpha}(t,z),\cdots,\ \bar{h}^n_{X_\alpha}(t,z))$$
$$-\frac{\bar{h}^1_\alpha(t,z)}{\bar{h}^1_{S_\alpha}(t,z)}(\bar{h}^2_{S_\alpha}(t,z),\ \bar{h}^3_{S_\alpha}(t,z),\cdots,\ \bar{h}^n_{S_\alpha}(t,z)).$$

我们说,对任给的 $\varepsilon>0$, S 在 $\mathscr{X}$ 中有一 C^1 邻域 $\mathscr{V}(\varepsilon)$ 使得只要 $X\in\mathscr{X}(S,M^n)\cap\mathscr{V}(\varepsilon)$, $\alpha\in\tau^{-1}(\Lambda)$, 即有

$$|\bar{h}^k_{X_\alpha}(t,0)-\delta_{1k}|=|\bar{h}^k_{X_\alpha}(t,0)-\bar{h}^k_{S_\alpha}(t,0)|\leqslant\varepsilon,$$
$$k=1,\ 2,\cdots,n. \tag{2.38}$$

事实上,Λ 不含有 S 的非单式奇点,所以它至多只含有有限个数的孤立奇点 $a_1,a_2,\cdots,a_p$, 且每个奇点 a_i 都是单式的. 我们于是可取 M^n 绕 a_i 的 C^∞ 型局部坐标系

$$g_i:G_k\to M^n,$$

其中 G_i 是 E^n 中一开子集包含原点 O, $g_i(O)=a_i$, 且 $g_i(G_i)$ 不含有 S 的除 a_i 以外的任何奇点,于是 S 及任一 $X\in\mathscr{X}(S,M^n)$ 就 g_i 来说将分别表成 G_i 上的 C^1 型常微分方程组

$$\frac{dy}{dt}=P_i(y)=yQ_i(y)+\eta_i(y),\quad y\in G_i,$$

$$\frac{dy}{dt}=P_{X_i}(y)-P_i(y)+\eta_{X_i}(y),\quad y\in G_i,$$

其中 Q_i 是一 n 阶正则方阵,而

$$\lim_{y\to 0}\frac{\partial\eta_i(y)}{\partial y}=0.$$

从这些我们易看出: (i_0)E^n 中有一实心球

$$H_i=\{y\in E^n\,|\,\|y\|\leqslant\lambda_i\}\subset G_i\ (\lambda_i>0)$$

使得

$$0 < \inf_{y\in H_j, y\neq 0} \frac{\|P_j(y)\|}{\|y\|} \leqslant \sup_{y\in H_j, y\neq 0} \frac{\|P_j(y)\|}{\|y\|} < \infty;$$

(ii_0) 当 $\sup\limits_{y\in H_j}(\|\eta_{Xj}(y)\| + \mathscr{N}(\partial\eta_{Xj}(y)/\partial y))$ 充分小时，H_j 中有一点 y_0 使 $P_{Xj}(y_0)=0$，而 y_0 必$=0$（因 $X\in\mathscr{X}(S,M^n)$ 的奇点都必须是 S 的奇点），从而可使

$$\sup_{y\in H_j, y\neq 0} \frac{\|P_{Xj}(y)-P_j(y)\|}{\|P_j(y)\|} = \sup_{y\in H_j, y\neq 0} \frac{\|\eta_{Xj}(y)\|}{\|P_j(y)\|}$$

也充分小．这给出：对任给的 $\varepsilon>0$，S 在 $\mathscr{X}$ 中有一 C^1 邻域 $\mathscr{V}(\varepsilon,j)$ 使得只要 $X\in\mathscr{X}(S,M^n)\cap\mathscr{V}(\varepsilon,j)$，即有

$$\|X(x)-S(x)\|\leqslant\varepsilon\|S(x)\| \quad 对所有\ x\in g_j(H_j),$$
$$j=1,2,\cdots,p.$$

命 F 为 $\Lambda-\bigcup\limits_{j=1}^{p} g_j(H_j)$ 在 M^n 中的闭包：易看出 F 是紧致集不含有 S 的奇点．于是据 S 的连续性，$\inf\limits_{x\in F}\|S(x)\|>0$．所以对于 ε，我们也可取 S 在 $\mathscr{X}$ 中的一 C^1 邻域 $\mathscr{V}(\varepsilon,0)$ 使得只要 $X\in\mathscr{V}(\varepsilon,0)$，即有

$$\|X(x)-S(x)\|\leqslant\varepsilon\|S(x)\| \quad 对所有\ x\in F.$$

我们置 $\mathscr{V}(\varepsilon)=\bigcap\limits_{j=0}^{p}\mathscr{V}(\varepsilon,j)$．于是，若 $X\in\mathscr{X}(S,M^n)\cap\mathscr{V}(\varepsilon)$，则

$$\|X(x)-S(x)\|\leqslant\varepsilon\|S(x)\| \quad 对所有\ x\in\Lambda,$$

因而

$$\|X(\tau(\alpha))-S(\tau(\alpha))\|\leqslant\varepsilon\|S(\tau(\alpha))\| \quad 对所有\ \alpha\in\tau^{-1}(\Lambda)$$

或

$$\|X(\phi_t(\tau(\alpha)))-S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|\leqslant\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|$$
$$对所有\ (t,\alpha)\in(-\infty,\infty)\times\tau^{-1}(\Lambda)$$

（因 Λ 在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变）．但据 $\bar{S}_{t*(\alpha)}(t,y)$ 及 $\bar{X}_{t*(\alpha)}(t,y)$ 的定义 (2.2) 及 (2.16)，

$$d\mathscr{P}_{t*(\alpha),t}(\bar{X}_{t*(\alpha)}(t,0)-\bar{S}_{t*(\alpha)}(t,0))$$
$$=X(\phi_t(\tau(\alpha)))-S(\phi_t(\tau(\alpha))),$$

从而据 (2.19) 及指数映射的性质，

$$|\bar{X}^k_{t^*(\alpha)}(t,0)-\delta_{1k}\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\||$$
$$\leqslant \|\bar{X}_{t^*(\alpha)}(t,0)-\bar{S}_{t^*(\alpha)}(t,0)\|$$
$$=\|X(\phi_t(\tau(\alpha)))-S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|,$$
$$(t,\alpha)\in(-\infty,\infty)\times\tau^{-1}(\Lambda),\ k=1,2,\cdots,n.$$

这给出 (2.38)。

对于 $X\in\mathscr{X}(S,M^*)$ 及 $\alpha\in\tau^{-1}(\Lambda)$，应用中值定理可表

$$\bar{h}^k_{X\alpha}(t,z)=\bar{h}^k_{S\alpha}(t,z)+(\bar{h}^k_{X\alpha}(t,0)-\bar{h}^k_{S\alpha}(t,0))$$
$$+\left\langle z,\ \frac{\partial(\bar{X}^k_{t^*(\alpha)}(t,0,z)-\bar{S}^k_{t^*(\alpha)}(t,0,z))}{\partial z}\bigg|_{z'_k}\right\rangle, \quad (2.39)$$

其中 z'_k 是 0 至 $\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|z$ 连线上一点。又据 ζ^* 的取法及 (2.38)，对于 $X\in\mathscr{X}(S,M^*)\cap\mathscr{V}\left(\frac{1}{3}\right)$ 我们有

$$\bar{h}^1_{S\alpha}(t,z)+\bar{h}^1_{X\alpha}(t,0)-\bar{h}^1_{S\alpha}(t,0)$$
$$=\bar{h}^1_{S\alpha}(t,z)+\bar{h}^1_{X\alpha}(t,0)-1\geqslant\frac{1}{3}.$$

所以，应用命题 2.3，我们可取 S 在 $\mathscr{X}$ 中一 C^1 邻域 $\mathscr{V}^*$ 使得对 $X\in\mathscr{X}(S,M^*)\cap\mathscr{V}^*$ 及 $\alpha\in\tau^{-1}(\Lambda)$，

$$\left\langle z,\ \frac{\partial(\bar{X}^1_{t^*(\alpha)}-\bar{S}^1_{t^*(\alpha)})}{\partial z}\bigg|_{z'_k}\right\rangle>-\frac{1}{6},$$

由是

$$\bar{h}^1_{X\alpha}(t,z)\geqslant\frac{1}{6}\ \text{对}\ (t,z)\in J^*(M^*,\zeta^*). \quad (2.40)$$

这给出 (i)。进一步可依照 (2.37)，用命题 2.6 及 2.2 推出 (ii)。

要证明定理余下部分，任给 $\mu>0$ 及 $\kappa>0$。不妨设 $\kappa\leqslant\mu$。据定理 2.21 并用中值定理，可取一 $\xi>0$，$\xi<\zeta^*$，使得

$$\|(S^*_\alpha(t,z)-zR^*_\alpha(t)^{tr})-(S^*_\alpha(t,z')$$
$$-z'R^*_\alpha(t)^{tr})\|<\frac{\kappa}{2}\|z-z'\|$$

对所有 (t,z) 及 $(t,z')\in J^*(M^*,\zeta^*)$，$\|z\|\leqslant\xi$，$\|z'\|\leqslant\xi$，及 $\alpha\in\mathscr{S}$；特别地，

$$\|S^*_\alpha(t,z)-zR^*_\alpha(t)^{tr}\|<\frac{\kappa}{2}\xi$$

对所有 $(t,z)\in J^*(M^\#,\zeta^*)$，$\|z\|\leqslant\xi$，及 $\alpha\in\mathscr{E}$（因 $S_z^*(t,0)=0$）。所以要得出(2.34)及(2.35)，据(2.37)并用中值定理我们只须证，S 在 $\mathscr{X}$ 中有 C^1 邻域 $\mathscr{W}\subset\mathscr{V}^*$ 使

$$\sup_{\substack{(t,z)\in J^*(M^\#,\zeta^*);\,\alpha\in\tau^{-1}(\Lambda)\\ X\in\mathscr{X}(S,M^\#)\cap\mathscr{W}}}\left\{\|H_{X\alpha}(t,z)\|+\mathscr{N}\left(\frac{\partial H_{X\alpha}(t,z)}{\partial z}\right)\right\}$$

充分小。易看出这可能性由于(2.38)(对充分小的 ε)，(2.39)，(2.40)以及命题 2.2，2.3。定理证完。

命题 2.23 设 Λ 是 $M^\#$ 中一闭子集，在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变，且不含有 S 的非单式奇点。则 S 在 $\mathscr{X}$ 中有一 C^1 邻域 $\mathscr{W}_\Lambda$ 且 Λ 在 $M^\#$ 中有一邻域 W 具有性质：若 $X\in\mathscr{W}_\Lambda$ 与 S 在 Λ 上具有相同的奇点且在 $M^\#-W$ 上与 S 一致，则 $X\in\mathscr{X}(S,M^\#)$。

证 命 N_Λ 为 S 所有不属于 Λ 的奇点作成的集合。因 Λ 不含有 S 的非单式奇点，易看出 N_Λ 是 $M^\#$ 的闭子集与 Λ 不相交。我们于是可取 Λ 在 $M^\#$ 中的一邻域 W，它在 $M^\#$ 中的闭包 H 也不与 N_Λ 相交。

对 $X\in\mathscr{X}$ 及 $\alpha\in\mathscr{E}$，写 $\bar{h}^1_{X\alpha}(t,z)$ 同(2.36)中。我们说，对任给的 $\varepsilon>0$，S 在 $\mathscr{X}$ 中有一 C^1 邻域 $\mathscr{W}_H(\varepsilon)$ 使得只要 $X\in\mathscr{W}_H(\varepsilon)$ 与 S 在 Λ 上有同的奇点，则

$$|\bar{h}^1_{X\alpha}(t,0)-1|\leqslant\varepsilon \tag{2.41}$$

对 $\Theta_t(\alpha)\in\tau^{-1}(H)$。这断语证明法与(2.37)的相同（彼处用到的 X 的奇点也是 S 的奇点这事实是作为 $X\in\mathscr{X}(S,M^\#)$ 的结论）。易看出，若 X 进一步与 S 在 $M^\#-W$ 上一致，则(2.41)成立对一切 $(t,\alpha)\in(-\infty,\infty)\times\mathscr{E}$。取

$$\mathscr{W}_\Lambda=\mathscr{W}_H\left(\frac{1}{3}\right),$$

则对于 $X\in\mathscr{W}_\Lambda$ 及 $\alpha\in\mathscr{E}$，

$$\bar{h}^1_{X\alpha}(t,0)\geqslant\frac{1}{3},$$

从而 $\bar{X}^1_{t^*(\alpha)}(t,0)>0$。这证明命题。

§3. 常微方程族 $\mathscr{M}_p$

上节中我们讨论了与M^n上常微系统S相联系的典范方程组．本节中我们将涉及线性方程组及扰动后的常微分方程组二者的相空间拓扑结构的关系的一部分讨论．因S沿它的轨线的典范方程组为数非常多，所以我们的讨论涉及到常微分方程组作成的族．

设 $\mathscr{M}_p^1$，$\mathscr{M}_p^2$ 及 $\mathscr{M}_p^3$ 分别为如下给出的集合．

$\mathscr{M}_p^1=(-\infty,\ \infty)$ 上所有满足下述要求的p阶方阵函数$C(t)$ 作成的集合，即： $C(t)$ 是三角式方阵，其对角线以上的系数都是0； $C(t)$对 $t\in(-\infty,\infty)$ 连续，且在$(-\infty,\infty)$上有界

$$\sup_{t\in(-\infty,\infty)}\mathscr{N}(C(t))\leqslant\hat{\eta}_C<\infty.$$

$\mathscr{M}_p^2=(-\infty,\infty)\times E^p$ 上所有满足下述要求的p维向量函数$\zeta(t,z)$ 作成的集合，即： $\zeta(t,z)$ 对 (t,z) 连续，且在$(-\infty,\infty)\times E^p$ 上有界

$$\sup_{(t,z)\in(-\infty,\infty)\times E^p}\|\zeta(t,z)\|\leqslant\hat{\eta}_\zeta<\infty;$$

并且 $\zeta(t,z)$ 具有一 Lipschitz 常数 $\hat{\kappa}_\zeta$

$\|\zeta(t,z)-\zeta(t,z')\|\leqslant\hat{\kappa}_\zeta\|z-z'\|$ 对所有(t,z)及$(t,z')\in(-\infty,\infty)\times E^p$．

$\mathscr{M}_p^3=$ 集合$(-\infty)\cup(-\infty,\infty)\cup(\infty)$的$p$重 Descartes 积．

对于 $C(t)\in\mathscr{M}_p^1$ 及 $\zeta(t,z)\in\mathscr{M}_p^2$，设 $\hat{\eta}_C$，$\hat{\eta}_\zeta$ 及 $\hat{\kappa}_\zeta$ 已取定满足上述要求．

对任给的 $C(t)\in\mathscr{M}_p^1$，我们将写

$$C(t)=C^{(0)}(t)+C^{(1)}(t),\ t\in(-\infty,\infty),$$

其中 $C^{(0)}(t)$ 是对角式方阵，其对角线系数

$$\operatorname*{diag}_k C^{(0)}(t)=\operatorname*{diag}_k C(t)=c_{kk}(t),\ k=1,2,\cdots,p,$$

而 $C^{(1)}(t)=c(t)-C^{(0)}(t)$．简记

$$E(C;s,t)=\exp\int_s^t C^{(0)}(t')dt'$$

$$
=\begin{pmatrix}
\exp\int_s^t C_{11}(t')dt' & & & 0 \\
& \exp\int_s^t C_{22}(t')dt' & & \\
& & \ddots & \\
0 & & & \exp\int_s^t C_{pp}(t')dt'
\end{pmatrix},
$$

$$
E^k(C;s,t)=E(C;s,t)I_{(k)},
$$

其中 $I_{(k)}$ 是对角式方阵，对角线系数是 $\delta_{kj}, j=1,2,\cdots,p$.

我们称一常微分方程组（Z）$\in \mathscr{M}_p$，这意思是说，（Z）是 E^p 上一方程组

$$
\frac{dz}{dt}=zA(t)+f(t,z),\ -\infty<t<\infty\ ,\ z\in E^p, \qquad (Z)
$$

满足下面 $(\mathrm{I}_*)-(\mathrm{IV}_*)$.

(I_*) $A(t)\in\mathscr{M}_p^1$.

(II_*) $f(t,z)\in\mathscr{M}_p^2$.

(III_*) 对（Z）联系了一确定的 $r_Z=r=(r_1,r_2,\cdots,r_p)\in \mathscr{M}_p^3$，称为（Z）的标基.

(IV_*) 若 $r_k=-\infty$，则无穷积分

$$
\int_{-\infty}^t E^k(A;\theta,t)d\theta
$$

存在；若 $r_k=\infty$，则无穷积分

$$
\int_\infty^t E^k(A;\theta,t)d\theta=-\int_t^\infty E^k(A;\theta,t)d\theta
$$

也存在；并且有

$$
\sup_{t\in(-\infty,\infty)}\sum_{k=1}^p \mathscr{N}\left(\int_{r_k}^t E^k(A;\theta,t)d\theta\right)\leqslant\xi_A<\infty.
$$

我们将取定一数 ξ_A 满足这里要求.

从 (IV_*) 易看出：若 $r_k=\pm\infty$，则 $(-\infty,\infty)$ 上的函数

$$
\exp\int_0^t \operatorname{diag}_k A(t')dt'
$$

无界，又显然，$\xi_A>0$.

我们容易举出如上所述的方程组的简单例子（例如，取

$\operatorname{diag}_{k} A(t)=-1$，标基 $r=(-\infty,-\infty,\cdots,-\infty)$)。

现在，设常微分方程组（Z）$\in\mathscr{M}_p$ 给出如上。于其中取 $f(t,z)\equiv 0$，则有线性方程组

$$\frac{dz}{dt}=zA(t),-\infty<t<\infty,\ z\in E^p. \qquad (\bar{Z})$$

显然，它仍 $\in\mathscr{M}_p$（我们常取（$\bar{Z}$）的标基与（Z）的相同）。

记 $z(t;s,u)$ 及 $\bar{z}(t;s,u)$，$-\infty<t<\infty$，分别为（Z）及（$\bar{Z}$）的解使 $z(s;s,u)=u=\bar{z}(s;s,u)$。

我们将讨论（Z）及（$\bar{Z}$）二者的相空间的关系。

为此，命 $\mathscr{L}_p(-\infty,\infty)$ 为 $(-\infty,\infty)$ 上所有连续且有界的 p 维向量函数 $\xi(t)$ 作成的模线性空间，模取作

$$\sup_{t\in(-\infty,\infty)}\|\xi(t)\|.$$

对任给的一点 $(s,u)\in(-\infty,\infty)\times E^p$，考虑积分运算子

$$J_{(s,u)}(\xi(t))=\sum_{k=1}^{p}\int_{r_k}^{t}(\xi(\theta)A^{(1)}(\theta)$$
$$+f(\theta,z(\theta;s,u)))E^k(A;\theta,t)d\theta.$$

由于（IV_*）等，这式子右端含有 $r_k=\pm\infty$ 的项的无穷积分存在，且

$$\|J_{(s,u)}(\xi(t))\|\leqslant(\hat{\eta}_A\sup_{t\in(-\infty,\infty)}\|\xi(t)\|+\hat{\eta}_f)\hat{\xi}_A,\ t\in(-\infty,\infty).$$

$J_{(s,u)}(\xi(t))$ 显然对 t 连续。所以 $J_{(s,u)}(\xi(t))$ 仍 $\in\mathscr{L}_p(-\infty,\infty)$。又记

$$\Lambda_Z=\begin{pmatrix}\lambda_Z^p & & & 0\\ & \lambda_Z^{p-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_Z\end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_Z=1/(1+2\hat{\eta}_A\hat{\xi}_A)$。由是 $0<\lambda_Z\leqslant 1$。易验证

$$\mathscr{N}(\Lambda_Z^{-1}A^{(1)}(t)I_{(k)}\Lambda_Z)\leqslant\lambda_Z\mathscr{N}(A(t)),$$
$$k=1,2,\cdots,p;$$
$$\lambda_Z^p\|z\|\leqslant\|z\Lambda_Z\|\leqslant\lambda_Z\|z\|.$$

定理 3.1 设常微分方程组 $(Z)\in \mathscr{M}_p$ 给出如上。则对每一点 $(s,u)\in(-\infty,\infty)\times E^p$，存在唯一的一个向量函数

$$\xi(t;s,u)\in \mathscr{L}_p(-\infty,\infty)$$

满足方程

$$\xi(t)=J_{(s,u)}(\xi(t)). \tag{3.1}$$

式子 $\Delta_Z(s,u)=(s,u-\xi(s;s,u))$给出一满映射

$$\Delta_Z:\ (-\infty,\infty)\times E^p \to (-\infty,\infty)\times E^p,$$

具有性质:

(i) 它把 (Z) 的相空间映至 $(\bar{Z})$ 的相空间,事实上

$$\begin{aligned}\Delta_Z(t,z(t;s,u))&=(t,\bar{z}(t;s,u-\xi(s;s,u)))\\&=(t,z(t;s,u)-\xi(t;s,u)),(s,u)\in(-\infty,\infty)\times E^p;\end{aligned}$$

(ii) 它是一 δ_Z-映射

$$\|(s,u)-\Delta_Z(s,u)\|\leqslant\delta_Z,(s,u)\in(-\infty,\infty)\times E^p,$$

其中

$$\delta_Z=\hat{\eta}_f\hat{\xi}_A(1+2\hat{\eta}_A\hat{\xi}_A)^p.$$

另外,对任给的一点 $(s,u)\in(-\infty,\infty)\times E^p$,$(\bar{Z})$ 的解 $\bar{z}(t;s,u')$ 等于 $z(t;s,u)-\xi(t;s,u)$ 当且仅当 $z(t;s,u)-\bar{z}(t;s,u')$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上有界且 $(z(r_k;s,u)-\bar{z}(r_k;s,u'))I_{(k)}=0$ 对 $r_k\in(-\infty,\infty)$。

证 对于 $(s,u)\in(-\infty,\infty)\times E^p$，递推定义

$$\begin{aligned}\xi^p(t;s,u)&=\int_{r_p}^{t} f(\theta,z(\theta;s,u))E^p(A;\theta,t)d\theta,\\ \xi^k(t;s,u)&=\int_{r_k}^{t}\Big(\sum_{j=k+1}^{p}\xi^j(\theta;s,u)A^{(1)}(\theta)\\&\quad+f(\theta,z(\theta;s,u))\Big)E^k(A;\theta,t)d\theta,\\ &\qquad k=p-1,\ p-2,\cdots,1.\end{aligned} \tag{3.2}$$

由于 (IV_*)，这些即令在 $r_k=\pm\infty$ 情况下也可定义,并且都是 $(-\infty,\infty)$ 上连续且有界的向量函数。置

$$\xi(t;s,u)=\sum_{k=1}^{p}\xi^k(t;s,u),$$

则 $\xi(t;s,u)\in\mathscr{L}_p(-\infty,\infty)$ 且满足(3.1)。

我们也易看出，对于 (s,u)，(3.1) 的任一解 $\in \mathscr{L}_p(-\infty,\infty)$ 也必可由递推关系式 (3.2) 得出．所以对于 (s,u)，(3.1) 恰只有一解 $\xi(t;s,u)\in \mathscr{L}_p(-\infty,\infty)$．

我们说

$$\|\xi(t;s,u)\| \leqslant \delta_Z. \tag{3.3}$$

事实上，记 $C_u = \sup\limits_{t\in(-\infty,\infty)} \|\xi(t;s,u)\Lambda_Z\|$，它 $<\infty$．于是

$$\|\xi(t;s,u)\Lambda_Z\| - C_u\lambda_Z\bar\eta_A\bar\xi_A \leqslant \|\xi(t;s,u)\Lambda_Z\|$$

$$- \sum_{k=1}^{p}\left\|\int_{r_k}^{t}(\xi(\theta;s,u)\Lambda_Z)(\Lambda_Z^{-1}A^{(1)}(\theta)I_{(k)}\Lambda_Z)E^k(A;\theta,t)d\theta\right\|$$

$$\leqslant \lambda_Z\left\|\xi(t;s,u) - \sum_{k=1}^{p}\int_{r_k}^{t}\xi(\theta;s,u)A^{(1)}(\theta)E^k(A;\theta,t)d\theta\right\|$$

$$\leqslant \lambda_Z\left(\sum_{k=1}^{p}\left\|\int_{r_k}^{t}f(\theta,z(\theta;s,u))E^k(A;\theta,t)d\theta\right\|\right) \leqslant \lambda_Z\bar\eta_f\bar\xi_A,$$

这蕴涵 $C_u(1-\lambda_Z\bar\eta_A\bar\xi_A) = C_u(1+\bar\eta_A\bar\xi_A)/(1+2\bar\eta_A\bar\xi_A) \leqslant \bar\eta_f\bar\xi_A/(1+2\bar\eta_A\bar\xi_A)$，$C_u \leqslant \bar\eta_f\bar\xi_A$，从而

$$\lambda_Z^p\|\xi(t;s,u)\| \leqslant \bar\eta_f\bar\xi_A\|\xi(t;s,u)\| \leqslant \bar\eta\bar\xi_A(1+2\bar\eta_A\bar\xi_A)^p,$$

如所要证．特别地，(ii) 中的不等式

$$\|(s,u)-\Delta_Z(s,u)\| = \|\xi(s;s,u)\| \leqslant \delta_Z$$

成立．

据 (IV_*)，递推式子 (3.2)，$\xi(t;s,u)$ 的有界性 (3.3) 及方程组 (Z) 的解 $z(t;s,u)$ 对 $(t;s,u)$ 的连续性，我们易看出 $\xi(t;s,u)$ 对 $(t;s,u)$ 连续．特别地，Δ_Z 是一映射：

$$(-\infty,\infty)\times E^p \to (-\infty,\infty)\times E^p.$$

这是一满映射，因为 $\|(s,u)-\Delta_Z(s,u)\|$ 恒 $\leqslant \delta_Z$，所以 Δ_Z 可扩充至一映射从球 $S^{p+1} = ((-\infty,\infty)\times E^p)\cup(\infty)$ 到其自身内(把∞映至∞)，且这扩充后的映射同伦于 S^{p+1} 上的恒同映射；这蕴涵这映射的拓扑度是 1，因而用拓扑学中的常见论据，即得

$$\Delta_Z((-\infty,\infty)\times E^p) = (-\infty,\infty)\times E^p.$$

要证明定理余下部分，我们可对任给的一 $\xi_0(t)\in\mathscr{L}_p(-\infty,$

∞)，写

$$J_{(s,u)}(\xi_0(t)) = \sum_{k=1}^{p} \left\{\int_{r_k}^{t} (\xi_0(\theta)A^{(1)}(\theta)\right.$$

$$\left. + f(\theta, z(\theta; s, u)))E^k(A;\theta,0)d\theta\right\} E^k(A;0,t).$$

对这式子右端取微商，即看出

$$\frac{dJ_{(s,u)}(\xi_0(t))}{dt} = J_{(s,u)}(\xi_0(t))A_t^{(0)}(t)$$

$$+ \xi_0(t)A^{(1)}(t) + f(t, z(t;s,u)).$$

所以，若 $\xi_0(t)$ 满足(3.1)(对于某一 $(s,u) \in (-\infty, \infty) \times E^p$)，直接计算就给出 $z(t;s,u) - \xi_0(t)$ 满足 $(\bar{Z})$，且从 $J_{(s,u)}$ 的定义也可直接看出：如果 $r_k \in (-\infty, \infty)$，则

$$\xi_0(r_k)I_{(k)} = J_{(s,u)}(\xi_0(r_k))I_{(k)} = 0.$$

其逆，设 $\xi_0(t) = z(t;s,u) - \bar{z}(t;s,u')$ 对某一 $u' \in E^p$，且

$$\xi_0(r_k)I_{(k)} = 0$$

对于 $r_k \in (-\infty, \infty)$. 则直接计算也给出，$\xi_0(t) - J_{(s,u)}(\xi_0(t))$ 满足线性方程组

$$\frac{dz}{dt} = zA^{(0)}(t), \quad -\infty < t < \infty,$$

这蕴涵

$$\xi_0(t) - J_{(s,u)}(\xi_0(t)) = wE(A;0,t)$$

对某一 $w = (w^1, w^2, \cdots, w^p) \in E^p$.

但 $w = 0$. 这是因为若 $r_k \in (-\infty, \infty)$，则

$$\xi_0(r_k)I_{(k)} = 0 = J_{(s,u)}(\xi_0(r_k))I_{(k)},$$

从而 $w^k = 0$. 若 $r_k = \pm\infty$，则因

$$\exp\int_0^t \operatorname{diag}_k A(t')dt'$$

不是 $(-\infty, \infty)$ 上的有界函数，而 $\xi_0(t) - J_{(s,u)}(\xi_0(t))$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上有界，由是 w^k 也必须 $=0$. 从 $w = 0$ 就得出 $\xi_0(t)$ 满足(3.1). 这样，我们就证明了：对于 $(s,u) \in (-\infty, \infty) \times E^p$，$(\bar{Z})$ 恰有唯一解 $\bar{z}(t;s,u')$ 使

$$\xi(t) = z(t;s,u) - \bar{z}(t;s,u')$$

具有性质

(a) $\xi(t) \in \mathscr{L}_p(-\infty,\infty)$ 且

(b) $\xi(r_k)I_{(k)} = 0$ 对于 $r_k \in (-\infty,\infty)$,

而 $\xi(t)$ 即为 $\xi(t;s,u)$, u' 即为 $u - \xi(s;s,u)$. 于是，由于对任给的 $s' \in (-\infty,\infty)$,

$$z(t;s',z(s';s,u)) - \bar{z}(t;s',\bar{z}(s';s,u'))$$
$$= z(t;s,u) - \bar{z}(t;s,u')$$

仍具有这两个性质,所以

$$\xi(t;s',z(s';s,u)) = \xi(t) = \xi(t;s,u),$$

即保相性质 (i) 也成立. 现在定理证完.

注 据 (3.2), 映射 Δ_Z 的作法是构造式的.

定理3.2 设常微分方程组 $(Z) \in \mathscr{M}_p$ 给出如前. 如果 $f(t,z)$ 具有 Lipschitz 常数

$$\hat{k}_f < \frac{1}{\bar{\xi}_A(1 + 2\hat{\eta}_A\hat{\xi}_A)^p}, \tag{3.4}$$

则 Δ_Z 是从$(-\infty,\infty)\times E^p$ 到其自身上的一拓扑变换.

证 根据上面,我们只需证 Δ_Z 是单映射(用区域不变性定理易看出从 E^n 到其自身上的单映射恒是拓扑变换). 为此,设对于 (s,u) 及 $(s,u') \in (-\infty,\infty) \times E^p$ 有

$$\Delta_Z(s,u) = \Delta_Z(s,u') = (s,\bar{u}).$$

记

$$\bar{C} = \sup_{t\in(-\infty,\infty)} \|(\xi(t;s,u) - \xi(t;s,u'))\Lambda_Z\|.$$

显然, $\bar{C} < \infty$. 于是据定理 3.1,

$$\|(\xi(t;s,u) - \xi(t;s,u'))\Lambda_Z\|$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{p}\left\|\int_{r_k}^{t}[f(\theta,\bar{z}(\theta;s,\bar{u}) + \xi(\theta;s,u)) - f(\theta,\bar{z}(\theta;s,\bar{u})\right.$$
$$\left. + \xi(\theta;s,u'))]E^k(A;\theta,t)\Lambda_Z d\theta\right\|$$
$$+ \sum_{k=1}^{p}\left\|\int_{r_k}^{t}(\xi(\theta;s,u) - \xi(\theta;s,u'))\Lambda_Z(\Lambda_Z^{-1}A^{(1)}(\theta)I_{(k)}\Lambda_Z)\right.$$

$$\times E^{k}(A;\theta,t)d\theta\Big\| \leqslant \hat{\kappa}_f \frac{\bar{C}}{\lambda_Z^{\rho}} \cdot \lambda_Z \hat{\xi}_A + \bar{C}\lambda_Z \hat{\eta}_A \hat{\xi}_A$$

$$= \bar{C}\left(\frac{\hat{\kappa}_f}{\lambda_Z^{\rho-1}} + \lambda_Z \hat{\eta}_A\right)\hat{\xi}_A,\ t \in (-\infty,\infty).$$

从而

$$\bar{C} \leqslant \bar{C}\left(\frac{\hat{\kappa}_f}{\lambda_Z^{\rho-1}} + \lambda_Z \hat{\eta}_A\right)\hat{\xi}_A.$$

所以，若(3.4)成立，则$(\hat{\kappa}_f/\lambda_Z^{\rho-1} + \lambda_Z\hat{\eta}_A)\hat{\xi}_A < 1$，故必有 $\bar{C} = 0$，这蕴涵 $\xi(s;s,u) = \xi(s;s,u')$；由是 $u = \bar{u} + \xi(s;s,u) = u'$，定理证完。

为方便，对于前面的 $(Z) \in \mathscr{M}_p$，我们将写

$$\hat{\eta}_Z = \hat{\eta}_A,\ \hat{\bar{\eta}}_Z = \hat{\bar{\eta}}_f,\ \hat{\xi}_Z = \hat{\xi}_A,\ \hat{\kappa}_Z = \hat{\kappa}_f.$$

记 $\widehat{\mathscr{M}}_p = \mathscr{M}_p^1 \times \mathscr{M}_p^2 \times \mathscr{M}_p^3$. 如前面所述，任一方程组 $(Z) \in \mathscr{M}_p$ 由一个方阵函数 $A(t) \in \mathscr{M}_p^1$，一个向量函数 $f(t,z) \in \mathscr{M}_p^2$ 及一标基 $r_Z \in \mathscr{M}_p^3$ 三者组成，并满足条件 (IV_*). 所以，我们可自然地把 (Z) 看作属于 $\widehat{\mathscr{M}}_p$ 的一元素. 这样，我们就有

$$\mathscr{M}_p \subset \widehat{\mathscr{M}}_p.$$

我们将把 $\widehat{\mathscr{M}}_p$ 作成一拓扑空间，在其上取拓扑如下：在 $\mathscr{M}_p^1$ 上取紧致开拓扑($\mathscr{M}_p^1$ 中每一元素是一个映射，把$(-\infty,\infty)$映到以所有 p 阶方阵取模 $\mathscr{N}(\ )$作成的模线性空间). 同样在 $\mathscr{M}_p^2$ 上取紧致开拓扑. 但 $\mathscr{M}_p^3$ 上的拓扑则将由 $(-\infty) \cup (-\infty,\infty) \cup (\infty)$上通常的顺序拓扑的 p 重笛卡儿积而得. 取$\widehat{\mathscr{M}}_p$ 作为这些空间的 Descartes 积空间. 于是我们取 $\mathscr{M}_p$ 上这样一拓扑，由它所有如下的子集W作成一拓扑基，即

$$W = W(G,\lambda) = G \cap \{(X) \in \mathscr{M}_p \mid \hat{\eta}_X + \hat{\bar{\eta}}_X + \hat{\kappa}_X + \hat{\xi}_X < \lambda\},$$

其中 $0 < \lambda < \infty$，G 是 $\widehat{\mathscr{M}}_p$ 中一开子集. 另一方面，命 $\mathscr{N}_p$ 为所有映射：$(-\infty,\infty) \times E^p \to (-\infty,\infty) \times E^p$ 作成的集合. 我们也将在 $\mathscr{N}_p$ 上取紧致开拓扑.

如同定理 3.1 中所述，对每一$(Z)\in\mathscr{M}_p$联系一确定的映射

$$\vartheta(Z)=\Delta_Z\in\mathscr{N}_p.$$

定理 3.3 ϑ 在 $\mathscr{M}_p$ 上连续.

证 设Γ是 $\mathscr{M}_p$ 的一子集，$(X_0)\in\mathscr{Q}(\Gamma)$（这记号表$\Gamma$ 在 $\mathscr{M}_p$ 中的闭包）. 我们须证 $\vartheta(X_0)\in\mathscr{Q}(\vartheta(\Gamma))$，或等价地证$\Gamma$中有一序列$\{(Y_i)\}$使得

$$\lim_{j\to\infty}\sup_{(t,z)\in(-j,j)\times H_j}\|\vartheta(Y_i)(t,z)-\vartheta(X_0)(t,z)\|=0,\quad(3.5)$$

其中 $H_j=\{z\in E^p\mid\|z\|\leqslant j\}$.

$(X_0)\in\mathscr{Q}(\Gamma)$（部分地)是说，$\mathscr{Q}(\Gamma)$中有常微分方程组$(X_0)$

$$\frac{dz}{dt}=zC_0(t)+\zeta_0(t,z),\ -\infty<t<\infty,z\in E^p,\quad(X_0)$$

以某一$(r_{10},r_{20},\cdots,r_{p0})\in\mathscr{M}_p^3$ 为标基，且Γ中有常微分方程组(X_k)

$$\frac{dz}{dt}=zC_k(t)+\zeta_k(t,z),\ -\infty<t<\infty,z\in E^p,\quad(X_k)$$

以$(r_{1k},r_{2k},\cdots,r_{pk})\in\mathscr{M}_p^3$ 为标基，$k=1,2,3,\cdots$，使得

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{t\in(-k,k)}\mathscr{N}(C_k(t)-C_0(t))=0,\quad(3.6)$$

$$\sup_{k=0,1,2,3,\cdots}(\bar\eta_{X_k}+\hat\xi_{X_k})<\infty;$$

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{(t,z)\in(-k,k)\times H_k}\|\zeta_k(t,z)-\zeta_0(t,z)\|=0,\quad(3.7)$$

$$\sup_{k=0,1,2,3,\cdots}(\bar\eta_{X_k}+\hat\kappa_{X_k})<\infty;$$

$$\lim_{k\to\infty}(r_{1k},r_{2k},\cdots,r_{pk})=(r_{10},r_{20},\cdots,r_{p0}).\quad(3.8)$$

如同前面一样，写 $C_k(t)$ 成两部分和

$$C_k(t)=C_k^{(0)}(t)+C_k^{(1)}(t),k=1,2,3,\cdots,$$

其中$C_k^{(0)}(t)$是对角式方阵，其对角线系数与$C_k(t)$的，顺次相同. 于是，考虑积分方程

$$\xi(t)-\sum_{i=1}^{p}\int_{r_{ik}}^{t}(\zeta_k(r,z_k(r;s,u))$$

$$+\xi(r)C_k^{(1)}(r))E^i(C_k;r,t)dr,$$

$$k = 0, 1, 2, 3, \cdots,$$

其中

$$E^{i}(C_k; r, t) = I_{(i)} \exp \int_r^t C_k^{(0)}(t')dt'.$$

如同前面，$z_k(t; s, u)$ 表 (X_k) 的解使 $z_k(s; s, u) = u$. 据定理 3.1，对任给的 $(s, u) \in (-\infty, \infty) \times E^p$，这方程恰有一解 $\in \mathscr{L}_p(-\infty, \infty)$，将记作 $\xi_k(t; s, u)$；而 $\vartheta(X_k)$ 是映射：

$$(-\infty, \infty) \times E^p \to (-\infty, \infty) \times E^p$$

使

$$\vartheta(X_k)(s, u) = (s, u - \xi_k(s; s, u)).$$

我们说：对 $(-\infty, \infty) \times E^p$ 中任给的一收敛到 (s_0, u_0) 的序列 $\{(s_i, u_i)\}$ 及一序列 $\{k_j\}$，序列 $\{\xi_{k_j}(s_j; s_j, u_j)\}$ 收敛到 $\xi_0(s_0; s_0, u_0)$. 事实上，据定理 3.1-(ii) 及 (3.6),(3.7),

$$\sup_{\substack{(s,u) \in (-\infty,\infty) \times E^p \\ k=0,1,2,3,\cdots}} \|\xi_k(s; s, u)\| < \infty.$$

所以 $\{\xi_{k_j}(s_j; s_j, u_j)\}$ 有收敛的子序列；而我们要证明的，等价地说，是每个这样的收敛子序列都必须收敛到 $\xi_0(s_0; s_0, u)$. 为简便，我们可不失一般性，假定 $\{\xi_{k_j}(s_j; s_j, u_j)\}$ 自身是收敛的，并假定它收敛到 $\xi_0 \in E^p$.

我们须证 $\xi_0 = \xi_0(s_0; s_0, u_0)$. 为此，简记 $\xi_j = \xi_{k_j}(s_j; s_j, u_j)$ $(j = 1, 2, 3, \cdots)$，并考虑线性方程组

$$\frac{dz}{dt} = zC_k(t), \quad -\infty < t < \infty, \quad z \in E^p$$

的解 $\bar{z}_k(t; s, \bar{u})$ 使 $\bar{z}_k(s; s, \bar{u}) = \bar{u}$ $(k = 0, 1, 2, 3, \cdots)$. 于是，从 (3.6) 及 (3.7) 我们有[1]

$$\begin{aligned} &\lim_{j\to\infty} \|z_{k_j}(t; s_j, u_j) - z_0(t; s_0, u_0)\| = 0, \\ &\lim_{j\to\infty} \|\bar{z}_{k_j}(t; s_j, u_j - \xi_j) - \bar{z}_0(t; s_0, s_0 - \xi_0)\| = 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

又据定理 3.1 及 (3.6), (3.7),

$$\sup_{t \in (-\infty,\infty),\, j=1,2,3,\cdots} \|z_{k_j}(t; s_j, u_j) - \bar{z}_{k_j}(t; s_j, u_j - \xi_j)\|$$

1) 这易从微分方程求解的 Picard 逐次逼近法看出.

$$= \sup_{t\in(-\infty,\infty),\, j=1,2,3,\cdots} \|\xi_{kj}(t;s_j,u_j)\| < \infty.$$

这蕴涵

$$\sup_{t\in(-\infty,\infty)} \|z_0(t;s_0,u_0) - \bar{z}_0(t;s_0,u_0-\xi_0)\| < \infty.$$

所以再据定理 3.1，我们就看出

$$z_0(t;s_0,u_0) - \bar{z}_0(t;s_0,u_0-\xi_0) = \xi_0(t;s_0,u_0),$$

如果

$$(z_0(r_{i0};s_0,u_0) - \bar{z}_0(r_{i0};s_0,u_0-\xi_0))I_{(i)} = 0$$

$$\text{对 } r_{i0}\in(-\infty,\infty). \tag{3.10}$$

但 (3.10) 成立，因为(3.9) 中所述的收敛性实际上在每一闭区间 $\langle t',t''\rangle$ 上是一致的，且据 (3.8) 及定理 3.1，当 j 充分大时，

$$(z_{kj}(r_{ik_j};s_j,u_j) - \bar{z}_{kj}(r_{ik_j};s_j,u_j-\xi_j))I_{(i)} = 0,$$

如果 $r_{i0}\in(-\infty,\infty)$. 这给出 (3.10)；特别地，$\xi_0 = \xi_0(s_0;s_0,u_0)$. 这证明断语。

从这断语，$\vartheta(X_0)$ 的连续性以及欧氏空间中有界闭子集的紧致性，我们易得出结论：对任给的 $\varepsilon>0$ 及 j，存在 $k'=k(\varepsilon,j)$ 使得

$$\sup_{(t,z)\in(-j,j)\times H_j} \|\vartheta(X_{k'})(t,z) - \vartheta(X_0)(t,z)\| < \varepsilon.$$

所以 $\{(Y_k)\}$ 有子序列满足 (3.5)。定理证完。

现在，任给 $(X)\in\mathscr{M}_p$

$$\frac{dz}{dt} = zC(t) + \zeta(t,z),\ -\infty<t<\infty,\ z\in E^p, \tag{X}$$

以 $(r_1,r_2,\cdots,r_p)$ 为标基。命 $r'_k=r_k$ 或 $=0$ 按 $r_k\in(-\infty,\infty)$ 或 $=\pm\infty$ 而定。我们将称有序组 $(r'_1,r'_2,\cdots,r'_p)$ 为 (X) 的次标基。当 $r_k\in(-\infty,\infty)$ 时，记

$$[r_k]_X = \{(z^1,z^2,\cdots,z^p)\in E^p \mid z^j=0 \text{ 对于 } r_j\neq r_k\},$$

这是 E^p 的一子线性空间。

我们将称一 $(X')\in\mathscr{M}_p$,

$$\frac{dz}{dt} = zC'(t) + \zeta'(t,z),\ -\infty<t<\infty,\ z\in E^p. \tag{X'}$$

与 (X) 协同，如果 (i_0) (X) 与 (X') 的次标基相同；(ii_0) 存在一变数变换 $h_t(z)=zV(t)$，其中 $V(t)$ 是正交方阵且对 t 可微，$t\in(-\infty,\infty)$，使得 (X) 经过这变数变换后变换成 (X')，且 $[r_k]_X$ 在这变换下保持不变

$$h_{r_k}([r_k]_X)=[r_k]_{X'}$$

对每个 $r_k\in(-\infty,\infty)$。这 $h_t(z)$ 将称为一协同变换。

我们注意，若 (X') 与 (X) 协同，以 $h_t(z)=zV(t)$ 为协同变换，则

$$zC'(t)+\zeta'(t,z)=zV(t)^{tr}\left[C(t)V(t)+\frac{dV(t)}{dt}\right]$$

$$+\zeta(t,zV(t)^{tr})V(t).$$

于是因 $\zeta(t,z)$ 及 $\zeta'(t,z)$ 都是 $(-\infty,\infty)\times E^p$ 上的有界函数，我们必有

$$C'(t)=V(t)^{tr}\left[C(t)V(t)+\frac{dV(t)}{dt}\right],$$

所以线性方程组

$$\frac{dz}{dt}=zC'(t),\ -\infty<t<\infty,\ z\in E^p$$

也恰是

$$\frac{dz}{dt}=zC(t),\ -\infty<t<\infty,\ z\in E^p \qquad (\bar{X})$$

的协同方程组。

定理3.4 设 (X)及$(X')\in\mathscr{M}_p$，(X')与 (X) 协同以 h_t 为协同变换。则

$$\Delta_{X'}H=H\Delta_X:(-\infty,\infty)\times E^p\to(-\infty,\infty)\times E^p,$$

其中 $H(t,z)=h_t(z)$。

证 记 $z(t;s,u)$ 及 $\bar{z}(t;s,u)$ 分别为 (X) 及 $(\bar{X})$ 的解使

$$z(s;s,u)=u=\bar{z}(s;s,u),$$

并考虑

$$\xi(t;s,u)=z(t;s,u)-\bar{z}(t;s,u).$$

据定理 3.1 易看出，要证明这定理，只须证：(a) $\xi(t;s,u)V(t)$ 在 $(-a,a)$ 上有界，(b) $\xi(r_k;s,u)V(r_k)I_{(k)}=0$ 对 $r_k\in(-\infty,\infty)$，或等价地，内积

$$\langle\xi(r_k;s,u)V(r_k),z\rangle=\langle\xi(r_k;s,u),zV(r_k)^{tr}\rangle=0$$

对 $z\in[r_k]_{X'}$，$r_k\in(-\infty,\infty)$。但 (a) 明显，因 $\xi(t;s,u)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上有界而 $V(t)$ 是正交方阵。这内积也为0，因 $\xi(r_k;s,u)I_{(k)}=0$ 对 $r_k\in(-\infty,\infty)$，且协同变换 h_t 给出

$$zV(r_k)^{tr}=zV(r_k)^{-1}\in[r_k]_X$$

对 $z\in[r_k]_{X'}$ 及 $r_k\in(-\infty,\infty)$，定理证完。

下面，我们考虑一线性常微分方程组

$$\frac{dz}{dt}=zB(t),\ -\infty<t<\infty,$$

$$z=(z^1,z^2,\cdots,z^p)\in E^p, \tag{X_p}$$

其中 $B(t)=(b_{ij}(t))$ 是三角式方阵，其对角线以上的系数 $b_{ij}(t)$ $(i<j)$，都是 0，$B(t)$ 对 t 连续，且在 $(-\infty,\infty)$ 上有界

$$\sup_{t\in(-\infty,\infty)}\mathcal{N}(B(t))=\bar{\eta}<\infty.$$

记 $z(t,u)(-\infty<t<\infty)$，为 (X_p) 的解使 $z(0,u)=u$。

为方便，我们将称 (X_p) 对于 E^p 的一直和分解

$$E^p=E_-\oplus E_+$$

及常数 $\eta_1<0$，$d_1>0$ 在 (t_0,∞)（其中 $-\infty\leqslant t_0<\infty$）上具有性质 (P_1)，如果

$$\begin{aligned}&\|z(s+T,u)\|\leqslant\|z(s,u)\|\exp(\eta_1T)\\&\quad\text{对所有 }(s,u)\in(t_0,\infty)\times E_-\text{ 及 }T\geqslant d_1,\\&\|z(s,u)\|\leqslant\|z(s+T,u)\|\exp(\eta_1T)\\&\quad\text{对所有 }(s,u)\in(t_0,\infty)\times E_+\text{ 及 }T\geqslant d_1.\end{aligned}\tag{3.11}$$

我们将称 (X_p) 对于 $\{1,2,\cdots,p\}$ 的一子集 J_- 及常数 $\eta_2<0$，$d_2>0$ 在 (t_0,∞) 上具有性质 (P_2)，如果

$$\frac{1}{T}\int_0^T b_{kk}(s+t)dt\leqslant\eta_2$$

$$\text{对所有 } k \in J_-, s > t_0 \text{ 及 } T \geq d_2, \tag{3.12}$$
$$\frac{1}{T}\int_0^T b_{kk}(s+t)dt \geq -\eta_2$$

对所有 $k \in \{1,2,\cdots,p\} - J_-, s > t_0$ 及 $T \geq d_2$.

写

$$B(t) = \begin{pmatrix} b_{11}(t) & 0 \\ b(t) & B'(t) \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

并考虑方程组

$$\frac{dz'}{dt} = z'B'(t), \quad -\infty < t < \infty, \quad z' \in E^{p-1}. \tag{X_{p-1}}$$

又对任一 $z \in E^p$，写 $z = \{pr(z), pr'(z)\}$，其中 $pr(z) \in (-\infty, \infty)$，$pr'(z) \in E^{p-1}$. 于是

$$\frac{dpr'(z(t,u))}{dt} = pr'(z(t,u))B'(t),$$

即 $pr'(z(t,u))$ 是 (X_{p-1}) 的解使

$$pr'(z(0,u)) = pr'(u).$$

明显地，(X_p) 有一解是

$$z(t, e_1) = \left(\exp\int_0^t b_{11}(t')dt', 0\right),$$

其中 $e_1 = (1,0)$，$0 \in E^{p-1}$.

引理 3.5 方程组 (X_p) 对于 E^p 的一直和分解

$$E^p = E_- \oplus E_+$$

在 $(0,\infty)$ 上具有性质 (P_1) 的充要条件是它对 $\{1,2,\cdots,p\}$ 的一子集 J_- 在 $(0,\infty)$ 上具有性质 (P_2). 在这条件下，$\dim E_-$ 必等于 J_- 中所含整数的个数 $n(J_-)$. 另外，若 p 不 $\in J_-$，则 E_- 包含在 E^p 的超平面 $z^p = 0$ 内.

证 先证条件的必要性. 这显然成立对于 $p = 1$. 以下设 $p > 1$. 设 (X_p) 对 E^p 的一直和分解 $E^p = E_- \oplus E_+$ 及某常数 $\eta_1 < 0$ 及 $d_1 > 0$，(3.11) 成立. 命

$$E_1 = \{z' \in E^{p-1} | z' = pr'(z), \ z \in E_-\},$$
$$E_2 = \{z' \in E^{p-1} | z' = pr'(z), \ z \in E_+\}.$$

则 $E^{p-1}=E_1+E_2$. 我们将分别就 $e_1\in E_-$ 和 e_1 不 $\in E_-$这两种不同情况来考虑. 在这两种情况下，我们都将先证明 (X_{p-1})对于 E^{p-1} 的一直和分解也具有性质 (P_1).

首先，我们说 $z(t,u)$ 与 $z(t,u')$ 内积的绝对值

$$|\langle z(t,u),z(t,u')\rangle|\leqslant\mu\|z(t,u)\|\cdot\|z(t,u')\|$$

$$\text{对所有} s\in(0,\infty)\text{ 及 } u\in E_-,u'\in E_+, \tag{3.14}$$

其中 μ 是某一常数，$0<\mu<1$. 事实上，恒有这样的不等式对于 $u=0$ 或 $u'=0$. 设 $u\neq 0\in E_-$ 且 $u'\neq 0\in E_+$. 我们有

$$\frac{d}{dt}\log\|z(t,u)-z(t,u')\|$$

$$=\frac{\langle z(t,u)-z(t,u'),(z(t,u)-z(t,u'))B(t)\rangle}{\|z(t,u)-z(t,u')\|^2}.$$

于是据(3.11),

$$\begin{aligned}
&\|z(s,u')\|\exp(-\eta_1d_1)-\|z(s,u)\|\exp(\eta_1d_1)\\
&\leqslant\|z(s+d_1,u')\|-\|z(s+d_1,u)\|\\
&\leqslant\|z(s+d_1,u)-z(s+d_1,u')\|\\
&=\|z(s,u)-z(s,u')\|\exp\int_s^{s+d_1}\left\langle\frac{z(t',u)-z(t',u')}{\|z(t',u)-z(t',u')\|},\right.\\
&\qquad\left.\frac{z(t',u)-z(t',u')}{\|z(t',u)-z(t',u')\|}B(t')\right\rangle dt'\\
&\leqslant\|z(s,u)-z(s,u')\|\exp(d_1\bar{\eta}),\quad s>0;
\end{aligned}$$

特别地，若 $\|z(s,u)\|=1=\|z(s,u')\|$, 则取 $\sigma=1$ 或 -1 使

$$\langle z(s,u),z(s,\sigma u')\rangle\geqslant 0,$$

就给出

$$\begin{aligned}
&[2(1-\langle z(s,u),z(s,\sigma u')\rangle)]^{\frac{1}{2}}\\
&=\|z(s,u)-z(s,\sigma u')\|\\
&\geqslant(\exp(-\eta_1d_1)-\exp(\eta_1d_1))\exp(-d_1\bar{\eta})\\
&\geqslant-2\eta_1d_1\exp(-d_1\bar{\eta})>0,
\end{aligned}$$

从而

$$|\langle z(s,u),z(s,u')\rangle|\leqslant 1-2\eta_1^2d_1^2\exp(-2d_1\bar{\eta})<1.$$

从这个易导出(3.14)，只须取

$$\mu = 1 - 2\eta_1^2 d_1^2 \exp(-2d_1\bar{\eta}).$$

现在，设 $e_1 \in E_-$. 在这情况下易看出 E^{p-1} 有直和分解 $E^{p-1} = E_1 \oplus E_2$. 并且，若 $u \in E_-$，置

$$v = u - (pr(z(s,u))/\|z(s,e_1)\|)e_1$$

我们就有 $v \in E_-$ 且

$$z(s,v) = z(s,u) - \frac{pr(z(s,u))}{\|z(s,e_1)\|} z(s,e_1)$$

$$= (0, pr'(z(s,u))),$$

$$pr'(z(s,v)) = pr'(z(s,u)),$$

由是 (X_{p-1}) 有一解是

$$pr'(z(t,v)) = pr'(z(t,u)), \quad -\infty < t < \infty,$$

故据(3.11)，

$$\|pr'(z(s+T,u))\| = \|pr'(z(s+T,v))\|$$

$$\leqslant \|z(s+T,v)\| \leqslant \|z(s,v)\| \exp(\eta_1 T)$$

$$= \|pr'(z(s,u))\| \exp(\eta_1 T)$$

对 $s > 0$, $T \geqslant d_1$. 若 $u \in E_+$，则

$$\|pr'(z(s,u))\| \leqslant \|pr'(z(s+T,u))\| \exp\left(\frac{\eta_1}{2} T\right)$$

对于 $s \geqslant 0$ 及 $T \geqslant \max\{d_1, \log(1-\mu^2)/\eta_1\}$. 这是因为据(3.11)及(3.14)，

$$\|pr'(z(s,u))\| \exp(-\eta_1 T) \leqslant \|z(s,u)\| \exp(-\eta_1 T)$$

$$\leqslant \|z(s+T,u)\| \leqslant pr'(z(s+T,u))/(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}}$$

对于 $0 \leqslant s < s + d_1 \leqslant s + T$. 这证明 (X_{p-1}) 在 $(0,\infty)$ 上对于 $E^{p-1} = E_1 \oplus E_2$ 具有性质 (P_1)，从而可据归纳假设，(X_{p-1}) 在 $(0,\infty)$ 上对 $\{2,3,\cdots,p\}$ 的一子集 J'_- 具有性质 (P_2). 但 $e \in E_-$，这蕴涵

$$\frac{1}{T}\int_0^T b_{11}(s+t)dt \leqslant \eta_1, \quad s > 0, \quad T \geqslant d_1.$$

所以，若置 $J_- = \{1\} \cup J'_-$，则 (X_p) 在 $(0,\infty)$ 上对 J_- 具有性质

(P_2).

其次，设 e_1 不$\in$ E_-，在这情况下，为了证明 (X_{p-1}) 在 $(0,\infty)$ 上对于 E^{p-1} 的一直和分解也具有性质 (P_2)，我们不妨设 $e_1 \in E_+$。事实上，任设 E^p 的一直和分解 $E^p = E_- \oplus E'_+$ 使 $e_1 \in E'_+$。对每一 $u \in E'_+$，$z(t,u)$ 可唯一地表成

$$z(t,u) = z(t,u_-) + z(t,u_+),$$

其中 $u_- \in E_-, u_+ \in E_+$，命

$$a = \sup_{u \in E'_+ - (0)} \frac{\|u_-\|}{\|u\|}, \quad b = \inf_{u \in E'_+ - (0)} \frac{\|u_+\|}{\|u\|}.$$

从集合 $\{u \in E'_+ \mid \|u\| = 1\}$ 的紧致性等，易看出 $a < \infty, b > 0$，所以用(3.11)，我们可取一常数 $d'_1 \geqslant d_1$ 使得对任一 $(s, u) \in \langle d'_1, \infty) \times (E'_+ - (0))$，

$$\begin{aligned} \|z(s,u)\| &\geqslant \|z(s,u_+)\| - \|z(s,u_-)\| \\ &\geqslant \|u_+\| \exp(-\eta_1 s) - \|u_-\| \exp(\eta_1 s) \\ &\geqslant [b - a\exp(2\eta_1 s)] \|u\| \exp(-\eta_1 s) \\ &\geqslant \frac{b}{2} \|u\| \exp(-\eta_1 s) \geqslant \|u\| \exp\left(-\frac{\eta_1}{2} s\right) \end{aligned}$$

及

$$\|z(s,u_-)\| \leqslant a\|u\| \exp(\eta_1 s) \leqslant \|u\| \exp\left(\frac{\eta_1}{2} s\right),$$

因而

$$\frac{\|z(s,u_-)\|}{\|z(s,u)\|} \leqslant \exp(\eta_1 s), \quad \frac{\|z(s,u_+)\|}{\|z(s,u)\|} \geqslant 1 - \exp(\eta_1 s).$$

这结合集合 $\langle 0, d'_1\rangle \times \{u \in E'_+ \mid \|u\| = 1\}$ 的紧致性及解对初值的连续性等，我们有

$$a_1 = \sup_{(s,u) \in \langle 0,\infty) \times (E'_+ - (0))} \frac{\|z(s,u_-)\|}{\|z(s,u)\|} < \infty,$$

$$b_1 = \inf_{(s,u) \in \langle 0,\infty) \times (E'_+ - (0))} \frac{\|z(s,u_+)\|}{\|z(s,u)\|} > 0.$$

于是再用(3.11)，我们可取一常数 $d''_1 \geqslant d'_1$ 使得

$$
\begin{aligned}
\|z(s+T,u)\| &\geqslant \|z(s,u_+)\|\exp(-\eta_1 T) \\
&\quad - \|z(s,u_-)\|\exp(\eta_1 T) \\
&\geqslant [b_1 - a_1\exp(2\eta_1 T)]\|z(s,u)\|\exp(-\eta_1 T) \\
&\geqslant \|z(s,u)\|\exp\left(-\frac{\eta_1}{2}T\right)
\end{aligned}
$$

对任意的 $(s,u)\in(0,\infty)\times E'_+$ 及 $T\geqslant d''_1$.

这样，我们就看出 (X_p) 对于直和分解 $E^p=E_-\oplus E'_+$ 也具有性质 (P_1)。所以,对于我们的目的来说,不妨设 E'_+ 即为 E_+.

由于 $e_1\in E_+$，于是我们仍可用与前面相类似的办法，看出 (X_{p-1}) 在 $(0,\infty)$ 上对于 E^{p-1} 的一直和分解具有性质 (P_1). 因而可据归纳假设, (X_{p-1}) 在 $\langle 0,\infty)$ 上对于 $\{2,3,\cdots,p\}$ 的一子集 J'_- 具有性质 (P_2); 从而 (X_p) 在 $(0,\infty)$ 上对于 $J_-=J'_-$ 也具有性质 (P_2). 这完成引理中条件必要性的证明.

因 $B(t)$ 是三角式方阵,其对角线以上的系数都是0，所以对于 $u=(u^1,u^2,\cdots,u^p)$, $z(t,u)$ 的第 p 个坐标是

$$
u^p\exp\int_0^t b_{pp}(t')dt'.
$$

从这事实可得出结论：若 (X_p) 对于直和分解 $E^p=E_-\oplus E_+$ 具有性质 (P_1)，对于 $\{1,2,\cdots,p\}$ 的子集 J_- 具有性质 (P_2) 且 p 不 $\in J_-$，则 E_- 包含在超平面 $z^p=0$ 内.

引理 3.5的其余部分可从下面引理推出(所有 p 阶方阵作成一凸空间;由是 (X_p) 在 $(0,\infty)$ 上这一部分如果具有性质 (P_2)，可扩充成一个适合下述引理假设的方程组).

引理 3.6 设 (X_p) 对 $\{1,2,\cdots,p\}$ 的一子集 J_- 及常数 $\eta_2<0$, $d_2>0$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上具有性质 (P_2). 则 E^p 有直和分解 $E^p=E_-\oplus E_+$ 使得对某常数 $\eta_1<0$ 及 $d_1>0$ 来说，(X_p) 在 $(-\infty,\infty)$ 具有性质 (P_1). 满足这要求的 E^p 的直和分解是唯一的,且 $\dim E_-$ 等于 J_- 中所含整数的个数 $n(J_-)$; 并且,这 η_1 及 d_1 的取法可完全由 $\bar{\eta}$, η_2 及 d_2 确定.

证 仍对 p 取归纳法来证. 引理显然对 $p=1$ 成立. 下面设

$p>1$. 写 $B(t)$ 成 (3.13)。我们有

$$\frac{d}{dt}pr(z(t,u))=b_{11}(t)pr(z(t,u))+pr'(z(t,u))b(t),$$

因而

$$pr(z(s+T,u))=pr(z(s,u))\exp\int_0^T b_{11}(s+t)dt$$
$$+\int_0^T pr'(z(s+t,u))b(s+t)\left(\exp\int_t^T b_{11}(s+t')dt'\right)dt. \tag{3.15}$$

记 $z'(t,u')$ 为 (X_{p-1}) 的解使 $z'(0,u')=u'$，明显地，(X_{p-1}) 对于 $J'_-=J_--(0)$ 及 $\eta_2<0$，$d_2>0$ 在$(-\infty,\infty)$ 上也具有性质(P_2). 故据归纳假设，(X_{p-1})对于 E^{p-1} 的一直和分解 $E^{p-1}=E'_-\oplus E'_+$ 及某常数 $\eta'_1<0$，$d'_1>0$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上具有性质 (P_1)，$\dim E'_-=n(J'_-)$，且 η'_1 及 d'_1 完全由 $\bar\eta$，η_2及 d_2确定.我们还有

$$\|z(s+t,u)\|\leqslant\|z(s,u)\|\exp(\bar\eta t)\ 对\ s\in(-\infty,\infty),\ t\geqslant 0,$$

因为

$$\log\frac{\|z(s+t,u)\|}{\|z(s,u)\|}=\int_s^{s+t}\left(\frac{d}{dt'}\log\|z(t',u)\|\right)dt'$$
$$=\int_s^{s+t}\left\langle\frac{z(t',u)}{\|z(t',u)\|},\ \frac{z(t',u)}{\|z(t',u)\|}B(t')\right\rangle dt'\ 对\ u\neq 0.$$

先设 $1\in J_-$. 命

$$E_-=\{u=re_1+u'\in E^p\,|\,r\in(-\infty,\infty),$$
$$pr'(u)=u'\in E'_-\}.$$

于是，若 $u\in E_-$ 且 $T\geqslant d_2+d'_1$，则据 (3.15) 等，

$$\|z(s+T,u)\|\leqslant\|pr'(z(s+T,u))\|$$
$$+|pr(z(s+t,u))|\leqslant\|z(s,u)\|\exp(\eta'_1T)$$
$$+\|z(s,u)\|\exp(\eta_2T)+\bar\eta\int_0^T f(t;s,u)dt, \tag{3.16}$$

其中

$$f(t;s,u)=\|pr'(z(s+t,u))\|\exp\int_t^T b_{11}(s+t')dt',$$

而

$$\int_{d_1'}^{T-d_2} f(t;s,u)dt \leqslant \|z(s,u)\|$$

$$\times \int_{d_1'}^{T-d_2} \exp(\eta_1' t + \eta_2(T-t))dt$$

$$\leqslant \|z(s,u)\|(T-d_2-d_1')\exp(\max\{\eta_1',\eta_2\}T),$$

$$\int_0^{d_1'} f(t;s,u)dt \leqslant \|z(s,u)\| \exp(\bar{\eta} d_1')$$

$$\times \frac{\exp(\eta_2 T)(1-\exp(-\eta_2 d_1'))}{\eta_2}, \tag{3.17}$$

$$\int_{T-d_2}^{T} f(t;s,u)dt \leqslant \|z(s,u)\| \exp(\bar{\eta} d_2)$$

$$\times \frac{\exp(\eta_1' T)(1-\exp(-\eta_1' d_2))}{\eta_1'}.$$

另一方面，我们置

$$E_+ = \{u \in E^p \mid pr'(u) \in E_+',$$
$$pr(u) = \iota(pr'(u)) \in (-\infty,\infty)\},$$

其中 $\iota(u') = \bar{\iota}(0,u')$，而

$$\bar{\iota}(t,u') = \int_{-\infty}^{t} z'(r,u')b(r)\left(\exp\int_r^t b_{11}(t')dt'\right)dr \text{ 对 } u' \in E_+'$$

(由于 $b(t)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上有界及 $1 \in J_-$ 等，这里无穷积分存在)。易看出 E_+ 是 E^p 的一子线性空间，且

$$\dim E_+ = \dim E_+';$$

并且直接计算给出：(X_p) 的解 $z(t,u)$ 恰 $=(\tau(t,u'),z'(t,u'))$ 对于 $u=(\iota(u'),u') \in E_+$，且对于 $T \geqslant d_1'$ 我们有

$$\|z(s,u)\| \leqslant \|z'(s,u')\| + |\tau(s,u')|$$
$$\leqslant \|z(s+T,u)\| \exp(\eta_1' T)$$
$$+ \|z(s+T,u)\|(\exp(\eta_1' T))\bar{\eta}\int_{-\infty}^{s} g(r,s)dr, \tag{3.18}$$

其中

$$g(r,s) = \exp(\eta_1'(s-r))\exp\int_r^s b_{11}(t')dt',$$

而

$$\int_{-\infty}^{s-d_1} g(r,s)dr \leqslant \int_{-\infty}^{s-d_2} \exp((\eta_2+\eta_1')(s-r))dr \leqslant \frac{-1}{\eta_2+\eta_1'},$$

$$\int_{s-d_2}^{s} g(r,s)dr \leqslant d_2\exp(\bar{\eta}d_2). \tag{3.19}$$

现在，明显地 E^p 有直和分解 $E^p = E_-\oplus E_+$ 且 $\dim E_- = n(J_-)$。从 (3.16)—(3.19) 易看出：如果取 $\eta_1 = \frac{1}{2}\max\{\eta_2, \eta_1'\}$ 并取 d_1 为一充分大的常数 $\geqslant d_2 + d_1'$，则 (X_p) 在 $(-\infty, \infty)$ 上具有性质 (P_1)。若 $u \in E^p - (E_-\cup E_+)$，则因 u 可表成 $u = u_- + u_+$ 其中 $u_- \neq 0 \in E_-, u_+ \neq 0 \in E_+$，据 (3.11) 有

$$\lim_{t\to\infty}\|z(t,u)\| = \infty \text{ 及 } \lim_{t\to-\infty}\|z(t,u)\| = \infty.$$

从这性质易导出，E^p 使 (X_p) 在 $(-\infty, \infty)$ 上具有性质(P_1)的直和分解是唯一的。从 (3.16)—(3.19) 我们还易看出，d_1 的取法可仅由 $\bar{\eta}, \eta_2, d_2$ 及 η_1', d_1' 确定。但因据归纳假设，η_1' 及 d_1' 可仅由 $\bar{\eta}, \eta_2$ 及 d_2 确定，所以 η_1 及 d_1 也可仅由 $\bar{\eta}$，η_2 及 d_2 确定。这证明在 $1 \in J_-$ 情况下，引理成立。

其次，设 $1 \in \{1, 2, \cdots, p\} - J_-$。则可经过变数变换 $t' = -t$ 将 (X_p) 变换作一线性方程组，它适合上面已考虑过的情况；从而引理仍成立。证完。

引理 3.7 设 (X_p) 对于 E^p 的一直和分解 $E^p = E_-\oplus E_+$ 及常数 $\eta_1 < 0$，$d_1 > 0$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上具有性质 (P_1)，$n_- = \dim E_-$。又设

$$e_k \in E_-, \quad k = 1, 2, \cdots, n_-, \tag{3.20}$$

其中 $e_k = (\delta_{1k}, \delta_{2k}, \cdots, \delta_{pk})$。则 (X_p) 对于 $J_- = \{1, 2, \cdots, n_-\}$ 及某常数 $\eta_2 < 0$，$d_2 > 0$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上具有性质 (P_2)。在条件 (3.20) 下，这 η_2 及 d_2 的取法可完全由 $\bar{\eta}$，η_1 及 d_1 确定。

证 由于 $B(t) = (b_{ij}(t))$ 是三角式方阵，其对角线以上的系数都是 0，所以如果 $z(s,u) = e_k$，则 $z(s+t,u)$ 的第 k 个坐标是

$$\exp\int_{s}^{s+t} b_{kk}(t')dt'.$$

从这事实易看出，当 $n_- = p$ 或 $=0$ 时，引理成立，只须取

$$(n_2, d_2) = (n_1, d_1).$$

设 $0 < n_- < p$. 写

$$B(t) = 分块形式\begin{pmatrix} B_-(t) & 0 \\ C(t) & B_+(t) \end{pmatrix},$$

其中 $B_-(t), B_+(t)$ 分别是 n_- 阶及 n_+ 阶三角式方阵，它们的对角线以上的系数都是 0，对任一 $z \in E^p$，写 $z = (pr_-(z), pr_+(z))$，其中 $pr_-(z) \in E^{n_-}$. 于是 $pr_-(z(t,u)), pr_+(z(t,u))$ 分别是方程组

$$\frac{dz'}{dt} = z'B_-(t), \quad -\infty < t < \infty, \quad z' \in E^{n_-}, \qquad (X_-)$$

$$\frac{dz''}{dt} = z''B_+(t), \quad -\infty < t < \infty, \quad z'' \in E^{n_+} \qquad (X_+)$$

的解。据引理假设我们易验证：(X_-) 对直和分解

$$E^{n_-} = E^{n_-} \oplus (0)$$

及

$$\eta_1' = \eta_1, \quad d_1' = d_1$$

在 $(-\infty, \infty)$ 上具有性质 (P_1)；但 (X_+) 对直和分解

$$E^{n_+} = (0) \oplus E^{n_+}$$

及

$$\eta_1' = \eta_1/2,$$

以及满足

$$|\eta_1| d_1 \exp(-d_1 \bar{\eta}) \exp\left(-\frac{\eta_1}{2} d_1'\right) \geqslant 1$$

的 d_1' 在 $(-\infty, \infty)$ 上具有性质 (P_1)（后者可仿照式(3.14)的证法看出)。于是据上段所证，引理仍成立。证完.

现在，任给常数 $\bar{\eta} > 0$, $\bar{\bar{\eta}} > 0$, $\eta < 0$ 及 $d > 0$. 命

$$\mathscr{M}_p(\bar{\eta}, \bar{\bar{\eta}}; \eta, d)$$

为常微方程族 $\mathscr{M}_p$ 中所有具有下述性质的方程组 (Z)

$$\frac{dz}{dt}=zA(t)+f(t,z),\ -\infty<t<\infty,\ z\in E^p, \qquad (Z)$$

作成的子族，即 $\bar{\eta}_Z\leqslant\bar{\eta}$, $\hat{\eta}_Z\leqslant\hat{\eta}$；并且，若 $(r_1, r_2, \cdots, r_p)$ 是 (Z)的标基，则

(i_*) 对于 $r_k\in(-\infty,\infty)$,

$$\sup_{r_k\leqslant s<\infty, d\leqslant T<\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \operatorname*{diag}_k(A(s+t))dt\leqslant\eta,$$

$$\inf_{-\infty<s\leqslant r_k, -\infty<T\leqslant -d}\frac{1}{T}\int_0^T \operatorname*{diag}_k(A(s+t))dt\geqslant-\eta;$$

(ii_*) 对于 $r_k=-\infty$,

$$\sup_{-\infty<s<\infty, d\leqslant T<\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \operatorname*{diag}_k(A(s+t))dt\leqslant\eta;$$

(iii_*) 对于 $r_k=\infty$,

$$\inf_{-\infty<s<\infty, -\infty<T\leqslant -d}\frac{1}{T}\int_0^T \operatorname*{diag}_k(A(s+t))dt\geqslant-\eta.$$

(易看出，这里 (i_*)—(iii_*) 蕴涵 (Z) 作为 $\mathscr{M}_p$ 中的方程组所须满足的条件 (IV_*).) 记 $n_-(Z)$, $n_0(Z)$ 及 $n_+(Z)$ 分别为 (Z) 的标基 $(r_1, r_2, \cdots, r_p)$ 中所有使

$$r_k=-\infty,\ r_k\in(-\infty,\infty)$$

及 $r_k=\infty$ 的 k 的个数.

命题 3.8 设(Z)及 $(Z')\in\mathscr{M}_p(\bar{\eta},\hat{\eta};\eta,d)$，且$(Z')$与$(Z)$协同. 则

$$(n_-(Z), n_0(Z), n_+(Z))$$
$$=(n_-(Z'), n_0(Z'), n_+(Z')).$$

证 命 h_t 为协同变换，将 (Z) 换成 (Z'). 据以前讨论，不妨设 (Z) 及 (Z') 都是线性方程组. 命 $z(t;s,u)$ 及 $z'(t;s,u)$ 分别为 (Z) 及 (Z') 的解使

$$z(s;s,u)=u=z'(s;s,u).$$

记

$$E_0=\{u\in E^p \mid \lim_{t\to\infty}\|z(t;0,u)\|=0\},$$

$$E_0' = \{u \in E^p \mid \lim_{t\to\infty} \|z(t;0,u)\| = 0\},$$

因对每一 $t \in (-\infty, \infty)$，h_t 都是正交变换，故 $E_0' = h_0(E_0)$。于是，应用引理 3.5 到 (Z) 及 (Z')，易看出

$$n_-(Z) + n_0(Z) = \dim E_0$$
$$= \dim E_0' = n_-(Z') + n_0(Z').$$

同样应用这引理到 (Z) 及 (Z') 但取 t 逆向，也可看出

$$n_0(Z) + n_+(Z) = n_0(Z') + n_+(Z').$$

但

$$n_-(Z) + n_0(Z) + n_+(Z) = p = n_-(Z')$$
$$+ n_0(Z') + n_+(Z').$$

故命题中等式成立。证完。

§4. 一 个 应 用

作为典范方程组的一个应用例子，我们将在本节中证明下述定理。

定理 4.1 设 S 是 M^n 上一 Anosov 系统。则 S 半结构稳定[1]，即：对任给的 $\varepsilon > 0$，S 在 $\mathscr{X}$ 中有一 C^0 领域 $\mathscr{W}_\varepsilon$ 使得只要 $X \in \mathscr{W}_\varepsilon$，即有一满映射 $\varphi_X: M^n \to M^n$，它把 X 的每一积分线映满 S 的一积分线，且是一 ε- 映射[2]。

所谓 ε-映射是指这映射把每一点移至一相距小于 ε 的点。这里是对 M^n 上一度量而说的。但由于 M^n 是 Riemann 流形，我们将取定 M^n 上一自然也方便的等价度量。这即是，我们(可)取这样的度量使得，如果 x 及 y 属于 M^n 的同一连通分支内，则其距离是联这两点的所有分段 C^1 弧的弧长的下确界，并记作 $\widehat{gd}(x,y)$（于是，由于 M^n 紧致，$\widehat{gd}(x,y)$ 也等于一联 x,y 的极短测地线弧的弧长）。

---

1) 半结构稳定这个称呼，原见 Z. Nitecki, On semistability for diffeomorphisms, *Invent. Math.*, 14 (1971), 83—123. 但这文章中用法与我们这里微有不同。

2) 同本章前言脚注 1)。

在给出这定理证明之前，我们将为方便，提述一下所谓 Anosov 系统的定义(例如，见 Smale 的 [6，第 800 页])。这是指 M^n 上的 C^1 型系统 S 满足下述要求：S 无奇点，M^n 的切丛 $\mathscr{C}$ 可分解成(连续但不一定可微的)线性子丛的直和

$$\mathscr{C} = \mathscr{C}_- \oplus \mathscr{C}_0 \oplus \mathscr{C}_+,$$

其中

(i) $\mathscr{C}_0$ 由 S 产生，

(ii) $\mathscr{C}_-$ 及 $\mathscr{C}_+$ 都在 $\Phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变，

(iii) $\mathscr{C}_-$ 和 $\mathscr{C}_+$ 分别对 $\Phi_t(-\infty < t < \infty)$ 来说收缩和扩张，即对于某常数 $\lambda \geq 1$ 和 $\mu < 0$，

$\|\Phi_t(u)\| \leq \lambda\|u\|\exp(\mu t)$ 对所有 $u \in \mathscr{C}_-, t \geq 0$，

$\|\Phi_{-t}(u)\| \leq \lambda\|u\|\exp(\mu t)$ 对所有 $u \in \mathscr{C}_+$，$t \geq 0$。

我们考虑 S 的共轭丛 $\mathscr{D}$ 及其上的单参数变换群 $\phi_t: \mathscr{D} \to \mathscr{D}$ $(-\infty < t < \infty)$(§1)。

命题 4.2 设 S 是 M^n 上一 Anosov 系统。则 $\mathscr{D}$ 可分解成两个都在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变的线性子丛 $\mathscr{D}_-$ 及 $\mathscr{D}_+$ 的直和

$$\mathscr{D} = \mathscr{D}_- \oplus \mathscr{D}_+,$$

其中 $\mathscr{D}_-$ 和 $\mathscr{D}_+$ 分别对 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 来说收缩和扩张，即对于某常数 $\lambda' \geq 1$ 及 $\mu' < 0$，

$$\begin{aligned} &\|\phi_t(v)\| \leq \lambda'\|v\|\exp(\mu' t) \text{ 对所有 } v \in \mathscr{D}_-,\ t \geq 0, \\ &\|\phi_{-t}(v)\| \leq \lambda'\|v\|\exp(\mu' t) \text{ 对所有 } v \in \mathscr{D}_+,\ t \geq 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

证 设 $\mathscr{C}$ 可分解成线性子丛的直和 $\mathscr{C} = \mathscr{C}_- \oplus \mathscr{C}_0 \oplus \mathscr{C}_+$ 满足 (i)—(iii)。每一 $\mathscr{C}_-$ 可表成

$$u = v_u + \lambda_u S(\sigma(u)),\ v_u \in \mathscr{D},\ \lambda_\mu \in (-\infty, \infty);$$

命 $\mathscr{D}_-$ 为所有如此得出的 v_u 作成的集合。类似地从 $\mathscr{C}_+$ 定义 $\mathscr{D}_+$。据 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 的定义，易验证 $\mathscr{D}_-$ 及 $\mathscr{D}_+$ 都在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变。显然对每一 $x \in M^n$，$\mathscr{D}_x \cap \mathscr{D}_-$ 及 $\mathscr{D}_x \cap \mathscr{D}_+$ 都是 $\mathscr{D}_x$ 的子线性空间，且

$$\dim(\mathscr{D}_x \cap \mathscr{D}_-) = \dim(\mathscr{C}_x \cap \mathscr{C}_-),$$

$$\dim(\mathscr{D}_s\cap\mathscr{D}_+)=\dim(\mathscr{C}_s\cap\mathscr{C}_+),$$
$$\mathscr{D}=\mathscr{D}_-\oplus\mathscr{D}_+.$$

因 S 无奇点且 S 在紧致流形 M^* 上连续，可取一 $T>0$ 使得

$$\|\Phi_T(S(x))\|=\|S(\phi_T(x))\|\geqslant\lambda\|S(x)\|\exp\left(\frac{\mu}{2}T\right),$$

$$\|\Phi_{-T}(S(x))\|=\|S(\phi_{-T}(x))\|\geqslant\lambda\|S(x)\|\exp\left(\frac{\mu}{2}T\right)$$

对所有 $x\in M^*$，这里 λ 及 μ 给出同(iii)中。用这事实，条件(iii)及单参数变换群 $\Phi_t(-\infty<t<\infty)$ 的连续性，可取一 $\delta>0$，$\delta\leqslant 1$，使

$$\delta\leqslant\inf_{u\in\mathscr{C}_-,\|u\|=1}\left\|u-\frac{S(\sigma(u))}{\|S(\sigma(u))\|}\right\|,$$
$$\delta\leqslant\inf_{u\in\mathscr{C}_+,\|u\|=1}\left\|u-\frac{S(\sigma(u))}{\|S(\sigma(u))\|}\right\|,$$

由是

$$\|\phi_t(v_u)\|\leqslant\|\Phi_t(u)\|\leqslant\lambda\|u\|\exp(\mu t)$$
$$\leqslant\frac{2\lambda}{\delta}\|v_u\|\exp(\mu t)\text{ 对 } u\in\mathscr{C}_-,\ t\geqslant 0,$$

$$\|\phi_{-t}(v_u)\|\leqslant\frac{2\lambda}{\delta}\|v_u\|\exp(\mu t)$$
$$\text{对 } u\in\mathscr{C}_+, t\geqslant 0.$$

这给出(4.1)。因 $\mathscr{C}=\mathscr{C}_-\oplus\mathscr{C}_0\oplus\mathscr{C}_+$ 是一个从分解，易看出 $\mathscr{D}=\mathscr{D}_-\oplus\mathscr{D}_+$ 是一个从分解。证完。

设 S 没有奇点。我们可应用命题 2.15—2.20 到 $\Lambda=M^*$。在这些命题中，我们将取定 $\Lambda=M^*$。于是取定 $\mathscr{V}$，ξ 以及 $\tilde{J}(M^*,\xi)$ 同命题 2.17 中。对 $\alpha\in\mathscr{E}$，我们考虑常微分方程组

$$\frac{dz}{dt}=\tilde{S}_\alpha(t,z),(t,z)\in\tilde{L}_{S,\alpha}\qquad(\tilde{S}_\alpha)$$

及映射 $\tilde{\mathscr{P}}_\alpha:\tilde{L}\to M^*$(§2)。对 $X\in\mathscr{V}$ 及 $\alpha\in\mathscr{E}(=\tau^{-1}(M^*)$ 因 S 无奇点)，命函数 $\tilde{f}_{X,\alpha}(t,z)$ 给出同(2.32)中。

我们先给几个引理。

引理 4.3 设 S 没有奇点。存在一整数 $p_0\geqslant 1$ 及一常数 $\delta_*>0$，$\delta_*<\bar{\zeta}$，具有性质：任给 $\alpha\in\mathscr{E}$，$0<\delta<\delta_*$ 及 $(s,u)\in\tilde{J}(M^*,\bar{\zeta})$，$\|u\|\leqslant\delta/p_0$。则 $(\tilde{S}_\alpha)$ 有解 $z_\alpha(t;s,u)$ 对于 $t\in$ 某一区间 $(\bar{s},\bar{\bar{s}})$（它包含 s），使 $z_\alpha(s;s,u)=u$ 且满足要求

$$\|z_\alpha(t;s,u)\|\leqslant\delta \text{ 对 } t\in(\bar{s},\bar{\bar{s}}),$$

$$\int_s^{\bar{s}}\tilde{f}_{s,\alpha}(t',z_\alpha(t';s,u))dt'\leqslant -1,$$

$$\int_s^{\bar{\bar{s}}}\tilde{f}_{s,\alpha}(t',z_\alpha(t';s,u))dt'\geqslant 1.$$

证 考虑对任一 $\alpha\in\mathscr{E}$ 来说 $(\tilde{S}_\alpha)$ 的任一解

$$z_\alpha(t;s,u),t\in(r',r'')$$

（它包含 s），使 $z_\alpha(s;s,u)=u$。因 $S_\alpha(t,0)=0$ 对所有 $t\in(-\infty,\infty)$，故 $z=0$ 是 $(\tilde{S}_\alpha)$ 的一解。所以，若 $u\neq 0$，则 $z_\alpha(t;s,u)\neq 0$ 对 $t\in(r',r'')$，从而可表

$$\log\frac{\|z_\alpha(t;s,u)\|}{\|u\|}=\int_s^t\left\langle\frac{z_\alpha(t';s,u)}{\|z_\alpha(t';s,u)\|},\right.$$

$$\left.\frac{\tilde{S}_\alpha(t',z_\alpha(t';s,u))}{\|z_\alpha(t';s,u)\|}\right\rangle dt'.$$

但 $\partial\tilde{S}_\alpha(t,z)/\partial z$ 当 z 趋近于 0 时，对所有 $(t,\alpha)\in(-\infty,\infty)\times\mathscr{E}$ 均匀地趋近于 $\tilde{R}_\alpha(t)$（命题 2.18 对于 $\Lambda=M^*$），而 $\tilde{R}_\alpha(t)$ 在 $(-\infty,\infty)\times\mathscr{E}$ 上有界（命题 1.4）。所以，存在常数 $\lambda>0$ 及 $\delta_*>0$，$\delta_*<\bar{\zeta}$，使得只要

$$\alpha\in\mathscr{E},\ \|z_\alpha(t;s,u)\|\leqslant\delta_*$$

对 $t\in(r',r'')$，即有

$$\|z_\alpha(t;s,u)\|\leqslant\|u\|\exp(\lambda|t-s|),\ t\in(r',r'').$$

从这结论及命题 2.17-(iv)，易看出存在整数 $p_0>0$ 使得 p_0 及 δ_* 满足引理中所述要求。

引理 4.4 设 S 没有奇点。对任给的 $\zeta>0$，$\zeta<\bar{\zeta}$，存在数 $\delta'>0$ 及 $\delta''>0$，$\delta''\leqslant\delta'<\zeta/2$，具有性质：只要 $\alpha\in\mathscr{E}$ 及

$(s,u)\in\tilde{J}(M^n,\xi),\|u\|\leqslant\delta''$，则 $\tilde{\mathscr{P}}_\alpha$ 局限在集合

$$\{(t,z)\in\tilde{J}(M^n,\xi)|\|(t,z)-(s,u)\|<\delta'\}$$

上是到 M^n 中的一拓扑变换，且

$$\tilde{\mathscr{P}}_\alpha(\{(t,z)\in\tilde{J}(M^n,\xi)|\|(t,z)-(s,u)\|<\delta'/2\})$$

$$\supset\{x\in M^n|\widehat{gd}(\tilde{\mathscr{P}}_\alpha(s,u),x)<\delta''\}.$$

证 对任一 $\alpha\in\mathscr{E}$ 及 $\delta>0$，$\delta<\zeta$，记

$$A_\delta=\{z\in E^{n-1}|\|z\|<\delta\},$$

$$N_{\alpha,\delta}=\{x\in M^n|x=\tilde{\mathscr{P}}_\alpha(0,z),\ z\in A_\delta\}.$$

$N_{\alpha,\delta}$ 是 M^n 中一个包含 $\tau(\alpha)$ 的 $n-1$ 维子微分流形，且是 S 过 $\tau(\alpha)$ 处的一超割曲面。因 M^n 紧致且 S 无奇点，易看出存在 $\bar{T}>0$ 及 $\bar{\delta}>0$ 使得对每一 $\alpha\in\mathscr{E}$，由式子

$$\pi_\alpha(t,y)=\phi_t(y),\quad t\in\langle-\bar{T},\bar{T}\rangle,y\in N_{\alpha,\bar{\delta}},$$

给出一个到 M^n 中的拓扑变换 $\pi_\alpha:\langle-\bar{T},\bar{T}\rangle\times N_{\alpha,\bar{\delta}}\to M^n$。用命题 2.17-(iii)，2.16-(ii)（对于 $A=M^n$ 及 $X=S$），以及与上证明中相类似的论据，我们可取 $\tilde{T}>0$ 及 $\tilde{\delta}>0$，$\tilde{\delta}<\bar{\delta}$，使得对每一 $\alpha\in\mathscr{E}$ 及 $u\in A_{\tilde{\delta}}$，$(\tilde{S}_\alpha)$ 有解

$$z_\alpha(t;0,u)\in\tilde{L}_{S,\alpha},t\in\langle-\tilde{T},\tilde{T}\rangle,\ \tilde{z}_\alpha(0;0,u)=u,$$

且 $\tilde{\mathscr{P}}_\alpha(t,z_\alpha(t;0,u))=\pi_\alpha(\tilde{t},\tilde{\mathscr{P}}_\alpha(0,u))$，$\tilde{t}\in\langle-\bar{T},\bar{T}\rangle$；

由是存在 $T'>0$ 及 $\delta'>0$，$\delta'<\tilde{\delta}/2$，使得对每一 $\alpha\in\mathscr{E}$，$\tilde{\mathscr{P}}_\alpha$ 将 $\langle-T',T'\rangle\times A_{2\delta'}$ 拓扑变换至 M^n 中。但

$$\tilde{\mathscr{P}}_\alpha(s,u)=\tilde{\mathscr{P}}_{\theta_s(\alpha)}(0,u)$$

对 $(s,u,\alpha)\in\tilde{L}\times\mathscr{E}$ 连续，且 $\mathscr{E}$ 紧致(因 S 无奇点)。我们易看出存在 δ'' 使得 δ' 及 δ'' 满足引理所述要求。证完。

引理 4.5 设 S 没有奇点。存在常数 $\lambda_0\geqslant1$ 及 $\delta_0>0$，$\delta_0<\xi$，具有性质：只要 $\alpha\in\mathscr{E},(t,z)$ 及 $(t',z')\in\tilde{J}(M^n,\xi)$，$\|z\|$ 及 $\|z'\|$ 及 $\|(t,z)-(t',z')\|$ 都 $<\delta_0$，则

$$\frac{1}{\lambda_0}\|(t,z)-(t',z')\|\leqslant\widehat{gd}(\tilde{\mathscr{P}}_\alpha(t,z),$$

$$\tilde{\mathscr{P}}_\alpha(t',z'))\leqslant\lambda_0\|(t,z)-(t',z')\|.$$

证 对 $\alpha\in\mathscr{E}$，由 $\tilde{\mathscr{P}}_\alpha(t,z)=\tilde{\mathscr{P}}_{\tau(\alpha)}(t,0,z)$ 给出的映射：

$\tilde{L} \to M^n$ 是 C^1 型的，且在 $\tilde{J}(M^n, \xi)$ 上是正则的（命题 2.16-(ii)）. 所以我们可考虑 M^n 上原给的 Riemann 度量就映射 $\tilde{\mathscr{P}}_0$ 来说在 $\tilde{J}(M^n,\xi)$ 上所取的基本二次型，并考虑与这基本二次型相应的正定对称方阵 $\tilde{G}(t,z;\alpha)$。我们说，存在 $\lambda_0 \geqslant 1$ 及 $\delta_1 > 0$，$\delta_1 < \xi$，使得

$$\frac{1}{\lambda_0^2} \leqslant \inf_{\substack{(t,z,\alpha)\in \tilde{J}(M^n,\xi)\times\mathscr{E},\|z\|\leqslant\delta_1 \\ w\in E^n,\|w\|=1}} w\tilde{G}(t,z;\alpha)w^{tr}$$

$$\leqslant \sup_{\substack{(t,z,\alpha)\in \tilde{J}(M^n,\xi)\times\mathscr{E},\|z\|\leqslant\delta_1 \\ w\in E^n,\|w\|=1}} w\tilde{G}(t,z;\alpha)w^{tr} \leqslant \lambda_0^2.$$

由是，若取 $\delta_0 > 0$，$\delta_0 < \min\{\delta_1, \delta'/4\lambda_0^2\}$（$\delta'$ 给出同引理 4.4 中），易验证 λ_0 及 δ_0 满足这引理中所述要求。

为证明断语，任给 $(s,u,\alpha) \in \tilde{J}(M^n,\xi) \times \mathscr{E}$。考虑

$$B_0 = \{y = (y^1, y^2, \cdots, y^n) \in E^n \mid \|y\| < \zeta_0\}$$

上的向量场 $S_{t^*(\alpha)}(s,y)$ 及 C^∞ 型映射

$$\mathscr{P}_{t^*(\alpha),s} = \mathscr{P}_{t^*(\Theta_s(\alpha)),0}: B_0 \to M^n (\S 2).$$

这后者将 B_0 微拓变换至 M^n 中，从而 M^n 上原给的 Riemann 度量就 $\mathscr{P}_{t^*(\alpha),s}$ 来说表成 B_0 上一基本二次型. 记 $G(y;\Theta_s(\alpha))$ 为与这二次型相应的正定对称方阵. 于是因

$$d\mathscr{P}_{t^*(\alpha)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{(s,0,u)}\right) = d\mathscr{P}_{t^*(\alpha),s}(\bar{\bar{S}}_{t^*(\alpha)}(s,0,u)),$$

$$d\mathscr{P}_{t^*(\alpha)}\left(\frac{\partial}{\partial z^i}\bigg|_{(s,0,u)}\right) = d\mathscr{P}_{t^*(\alpha),s}\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\bigg|_{(0,u)}\right),$$

$$2 \leqslant i \leqslant n$$

（看 (2.2) 及 $\mathscr{P}_{t^*(\alpha),s}$ 等的定义；$u \in B_0$ 因 $\xi < \zeta_0$），我们有关系式

$$\tilde{G}(s,u;\alpha) = H(s,u;\alpha)G(0,u;\Theta_s(\alpha))H(s,u;\alpha)^{tr},$$

其中

$$H(s,u;\alpha) = \text{方阵}\begin{pmatrix} \bar{\bar{S}}_{t^*(\alpha)} & (s,0,u) \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}.$$

但计算 $\bar{S}_{t^*(\alpha)}(t,0,z)$ 对 z 的偏微商并用中值定理及命题 2.2

给出

$$\|\bar{S}_{\iota^*(\alpha)}(t,0,z)-\bar{S}_{\iota^*(\alpha)}(t,0,0)\|$$

$$=\|\bar{S}_{\iota^*(\alpha)}(t,0,z)-(\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|,0,\cdots,0)\|\leqslant\bar{b}\|z\|$$

对所有 $(t,z,\alpha)\in(-\infty,\infty)\times\bar{B}\times\mathscr{E}$，其中 $\bar{b}$ 是某一常数 >0，$\bar{B}$ 给出同 §2 中。又因 S 无奇点，从 S 的连续性有

$$0<\inf_{x\in M^n}\|S(x)\|\leqslant\sup_{x\in M^n}\|S(x)\|<\infty,$$

并且

$$\sup_{(z,\alpha)\in\bar{B}\times\mathscr{E}}\max\{\mathscr{N}(G(0,z,\alpha)),\mathscr{N}(G(0,z,\alpha)^{-1})\}<\infty$$

(见命题 2.3 证明)。从这些易看出，存在满足我们断语中要求的 λ_0 及 δ_1。引理证完。

定理 4.1 的证明 设 S 是 Anosov 系统。据命题 4.2，$\mathscr{D}$ 可分解成 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下都不变的两个线性子丛 $\mathscr{D}_-$ 及 $\mathscr{D}_+$ 的直和 $\mathscr{D}=\mathscr{D}_-\oplus\mathscr{D}_+$，使得对于某常数 $\lambda'>0$ 及 $\mu'<0$，式子 (4.1) 成立。设 $\mathscr{D}_-$ 的纤维的维数是 m。命

$$\mathscr{A}=\{\alpha\in\mathscr{E}\,|\,\underset{k}{\mathrm{pro}}_1(\alpha)\in\mathscr{D}_-,\ k=1,2,\cdots,m\}.$$

易看出 $\mathscr{A}$ 在单参数变换群 $\Theta_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变，且是 $\mathscr{E}$ 的闭子集，因而是紧致集(因 S 无奇点，$\mathscr{E}$ 紧致)。对任一 $\alpha\in\mathscr{A}$，我们考虑方程组

$$\frac{dz}{dt}=z\tilde{R}_\alpha(t)^{tr},-\infty<t<\infty,\ z\in E^{n-1},\qquad(\tilde{R}_\alpha)$$

其中

$$\underset{k}{\mathrm{diag}}\tilde{R}_\alpha(t)=\omega_{k+1}(\iota^*\Theta_t(\alpha)),k=1,2,\cdots,n-1$$

(见 §1)。据命题 1.4 我们可取一数 $\hat{\eta}>0$ 使

$$\sup_{(t,\alpha)\in(-\infty,\infty)\times\mathscr{A}}\mathscr{N}(\tilde{R}_\alpha(t)^{tr})\leqslant\hat{\eta}.$$

又据 (4.1) 及引理 3.7，我们可取数 $\eta<0$ 及 $d>0$ 使得

$$\sup_{\substack{s\in(-\infty,\infty),T\in(d,\infty)\\ \alpha\in\mathscr{A}}}\frac{1}{T}\int_0^T\omega_{k+1}(\iota^*\Theta_{s+t}(\alpha))dt\leqslant\eta,$$

$$1\leqslant k\leqslant m,$$

$$\inf_{\substack{s\in(-\infty,\infty),T\in(-\infty,-d)\\ \alpha\in\mathscr{A}}} \frac{1}{T}\int_0^T \omega_{k+1}(\iota^*\Theta_{s+t}(\alpha))dt \geqslant -\eta,$$

$$m+1 \leqslant k \leqslant n-1,$$

这蕴涵

$$\hat{\xi} = \sup_{(t,\alpha)\in(-\infty,\infty)\times\mathscr{A}} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \int_{-\infty}^{t} \exp\left(\int_s^t \omega_{k+1}(\iota^*\Theta_{t'}(\alpha))dt' \right) ds \right.$$

$$\left. + \sum_{k=m+1}^{n-1} \int_t^{\infty} \exp\left(\int_s^t \omega_{k+1}(\iota^*\Theta_{t'}(\alpha))dt' \right) ds \right\} < \infty.$$

(显然 $\hat{\xi} > 0$。)

对任一 $\xi > 0$，记

$$\eta_\xi = \frac{\xi}{4\hat{\xi}(1+2\eta\hat{\xi})^{n-1}}.$$

取定$(-\infty,\infty)$上一 C^∞ 型可微函数 $f(w)$，它恒取值在 0 与 1 之间，并在$(-\infty,1/2)$上取值 1，在$(1,\infty)$上取值 0。如同上面提到过的，我们将应用命题 2.15—2.20 到 $\Lambda = M^*$，并取定$\mathscr{V}$，$\bar{\xi}$ 满足命题 2.17 中要求(对 $\Lambda = M^*$)。于是据命题 2.19，S 在 $\mathscr{X}$ 中有 C^0 邻域 $\mathscr{W} \subset \mathscr{V}$ 且存在数 $\xi > 0$，$\xi < \bar{\xi}$，使得对每一 $X \in \mathscr{W}$，

$$\sup_{\substack{(t,z,\alpha)\in \tilde{J}(M^n,\bar{\zeta})\times\mathscr{A}\\ \|z\|\leqslant\xi}} \|\tilde{X}_{\text{Rem}(\alpha)}(t,z)\| < \eta_\xi \tag{4.2}$$

成立。

任给一组如上的 $\mathscr{W}$ 及 ξ。设 $X \in \mathscr{W}$，$\alpha \in \mathscr{A}$，记

$$\tilde{X}_{\text{Rem}(\alpha,\xi)}(t,z) = \begin{cases} f\left(\dfrac{\|z\|}{\xi}\right)\tilde{X}_{\text{Rem}(\alpha)}(t,z) & \|z\| \leqslant \xi, \\ 0 & \text{对 } \|z\| \geqslant \xi. \end{cases}$$

我们考虑常微分方程组

$$\frac{dz}{dt} = z\tilde{R}_\alpha(t)^{tr} + \tilde{X}_{\text{Rem}(\alpha,\xi)}(t,z), \tag{$\tilde{X}_{\alpha,\xi}$}$$

$$-\infty < t < \infty, \quad z \in E^{n-1}.$$

易看出这是一方程组 $\in \mathscr{M}_{n-1}(\hat{\eta}, \eta_\xi; \eta, d)$，它的标基将取作

$(-\infty, -\infty, \cdots, -\infty, \infty, \cdots, \infty)$，其中恰有 m 个 $-\infty$（看前节；据命题 2.17 可看出 $\tilde{X}_{\text{Rem}(\alpha,\xi)}(t,z) \in \mathscr{M}^2_{n-1}$）。记

$$z_{X,\alpha,\xi}(t;s,u) \text{ 及 } \bar{z}_\alpha(t;s,u), \quad t \in (-\infty, \infty),$$

分别为 $(\tilde{X}_{\alpha,\xi})$ 及 $(\tilde{R}_\alpha)$ 的解使

$$z_{X,\alpha,\xi}(s;s,u) = u = \bar{z}_\alpha(s;s,u).$$

对任意的 x 及 $x' \in M^n$，我们将写

$$x' = h_{X,\xi}(x),$$

如果存在一 $\alpha \in \mathscr{A}$，$\tau(\alpha) = x'$，使得对于某一点

$$(0,u) \in \tilde{J}(M^n, \tilde{\xi}),$$

映射 $\tilde{\mathscr{P}}_\alpha$ 将 $(0,u)$ 映至 x，且 $(\tilde{X}_{\alpha,\xi})$ 的解 $z_{X,\alpha,\xi}(t;s,u)$ 有界

$$\sup_{t \in (-\infty,\infty)} \|z_{X,\alpha,\xi}(t;0,u)\| < \infty.$$

据命题 2.15(ii) 及定理 3.4，这里关系式 $x' = h_{X,\xi}(x)$ 的成立与所需 α 的选取无干（如果满足所述要求的 α 存在的话）。

任给一组 $\mathscr{W}$ 及 ξ 如上，并任给 $X \in \mathscr{W}$ 及 $\alpha \in \mathscr{A}$。据定理3.1，联系 $(\tilde{X}_{\alpha,\xi})$ 有一满映射（现在记作）

$$\vartheta(\tilde{X}_{\alpha,\xi}): (-\infty,\infty) \times E^{n-1} \to (-\infty,\infty) \times E^{n-1}$$

使得 $\vartheta(\tilde{X}_{\alpha,\xi})(s,u) = (s,\bar{u})$ 当且仅当 $z_{X,\alpha,\xi}(t;0,u) - \bar{z}_\alpha(t;0,\bar{u})$（对于 $t \in (-\infty,\infty)$ 来说）在 $(-\infty,\infty)$ 上有界（注意 $(\tilde{X}_{\alpha,\xi})$ 的标基是 $(-\infty,\cdots,-\infty, \infty,\cdots,\infty)$）。于是因 $z=0$ 是 $(\tilde{R}_\alpha)$ 的一解，$(\tilde{X}_{\alpha,\xi})$ 有有界解；并且若 $z_{X,\alpha,\xi}(t;0,u_0)$ 是这样的一有界解，则

$$\vartheta(\tilde{X}_{\alpha,\xi})(z_{X,\alpha,\xi}(t;0,u_0)) = 0$$

从而定理 3.1 给出

$$\|z_{X,\alpha,\xi}(t;0,u_0)\| \leqslant \xi/4 \text{ 对 } t \in (-\infty,\infty).$$

但从 $f(w)$ 的作法，$\tilde{X}_{\alpha,\xi}(t,z) = \tilde{X}_\alpha(t,z)$ 对于 $\|z\| \leqslant \xi/2$。所以这 $z_{X,\alpha,\xi}(t;0,u_0)$ 也是 $(\tilde{X}_\alpha)$ 的一解。这样，我们就看出：若命

$$x_0' = \tau(\alpha), \quad x_0 = \tilde{\mathscr{P}}_\alpha(0,u_0),$$

并定义 $h_{X,\xi}(x_0)$ 如上段，则 $x_0' = h_{X,\xi}(x_0)$，

$$\widehat{gd}(x_0, h_{X,\xi}(x_0)) \leqslant \frac{\xi}{4},$$[1]

且据命题 2.15-(i)，2.16-(ii) 及 2.17-(iv)，$h_{X,\xi}$ 也把系统 X 过 x_0 的积分线 $\{\phi_{X,t}(x_0) | -\infty < t < \infty\}$ 映满 S 过 x_0' 的积分线 $\{\phi_t(x_0') | -\infty < t < \infty\}$，并且 $h_{X,\xi}(\phi_{X,t}(x_0)) = \phi_{\bar{t}}(x_0')$，其中 $\bar{t}$ 是对 t 连续的严格递增函数，它的象集是 $(-\infty, \infty)$，它在 $t = 0$ 处取值 0。

但我们将以如上方式取定一组 $\mathscr{W}_0 \subset \mathscr{V}$ 及 $\xi_0 > 0$，$\xi_0 < \xi$，要求它们不但使得式子 (4.2) 对所有 $X \in \mathscr{W}_0$ 都成立，并且要求对于满足

$$0 < \hat{\kappa} < \frac{1}{\bar{\xi}(1 + 2\bar{\eta}\bar{\xi})^{n-1}}$$

的某一常数 $\hat{\kappa}$ 来说，$\tilde{S}_{\mathrm{Rem}(\alpha,\xi_0)}(t, z)$ 对所有 $\alpha \in \mathscr{A}$ 都以 $\hat{\kappa}$ 为 Lipschitz 常数。这可能性是由于命题 2.19 及命题 2.20（应用到 $\Lambda = M^n$）。因 $\tilde{S}_{\mathrm{Rem}(\alpha,\xi_0)}(t, 0)$ 恒 $= 0$ 对 $t \in (-\infty, \infty)$，所以 $z = 0$ 是 $(\tilde{S}_{\alpha,\xi_0})$ 的一解。于是，据定理 3.2 $(\tilde{S}_{\alpha,\xi_0})$ 不能有异于 $z = 0$ 的任何其他有界解。

在引理 4.4 中置 $\zeta = \min\{\xi_0, \delta_0\}$，其中 δ_0 给出同引理 4.5 中；于是取定常数 δ' 及 δ'' 满足彼处要求。任给一组 $\mathscr{W}$ 及 ξ 如前面，并设 $\xi < \delta''$。如同前面所述，对任给的 $X \in \mathscr{W}$ 及 $\alpha \in \mathscr{A}$，$(\tilde{X}_{\alpha,\xi})$ 有有界解，并且若 $z_{X,\alpha,\xi}(t; 0, u_0)$ 是这样的一有界解，则对 $x_0' = \tau(\alpha)$ 及 $x_0 = \tilde{\mathscr{P}}_\alpha(0, u_0)$ 我们有 $x_0' = h_{X,\xi}(x_0)$。我们说（在 $\xi < \delta''$ 这限制下）$h_{X,\xi}$ 在 x_0 处是单值的。事实上，任设 $\tilde{x} = h_{X,\xi}(x_0)$，即存在一 $\tilde{\alpha} \in \mathscr{A}$ 使 $\tau(\tilde{\alpha}) = \tilde{x}$，且 $(\tilde{X}_{\tilde{\alpha},\xi})$ 有有界解 $z_{X,\tilde{\alpha},\xi}(t; 0, \tilde{u})$ 使 $x_0 = \tilde{\mathscr{P}}_{\tilde{\alpha}}(0, \tilde{u})$。于是

$$\widehat{gd}(\phi_{X,t}(x_0), \phi_{\bar{t}}(x_0')) \leqslant \frac{\xi}{4},$$

1）这里，$\{\exp \mathscr{P}_\alpha(0, su_0) | 0 \leqslant s \leqslant 1\}$ 是一测地线弧连 x_0 至 $h_{X,\xi}(x_0)$，所以有这不等式。

$$\widehat{gd}(\phi_{X_t}(x_0),\ \phi_t(\tilde{x})) \leqslant \frac{\xi}{4},$$

因而 $\widehat{gd}(\phi_{\bar{t}}(x_0'),\phi_{\tilde{t}}(\tilde{x})) < \delta''/2$，其中 $\bar{t}$ 及 $\tilde{t}$ 都是对 $t\in(-\infty,\infty)$ 连续的严格递增函数，它们的象集都是 $(-\infty,\infty)$ 且它们都在 $t=0$ 处取值 0。但 $x_0' = \phi_0(x_0') = \tau(\alpha) = \widetilde{\mathscr{P}}_\alpha(0,0)$。故据引理 4.4 及命题 2.16-(ii)，我们可得出结论：存在一点

$$(s,v)\in \tilde{J}(M^*,\xi),\ \|(s,v)\| < \delta'/2,$$

使 $\widetilde{\mathscr{P}}_\alpha(s,v) = \tilde{x}$；并且 $(\tilde{S}_\alpha)$ 有解

$$z_\alpha(t;s,v)\in \tilde{J}(M^*,\tilde{\zeta}),\ -\infty < t < \infty,$$

使

$$z_\alpha(s;s,v) = v,\ \|z_\alpha(t;s,v)\| \leqslant \delta'/2 < \xi_0/2,$$
$$\widetilde{\mathscr{P}}_\alpha(t,z_\alpha(t;s,v)) = \phi^{\hat{t}}(\tilde{x}),$$

其中 $\hat{t}$ 是对 t 连续的严格递增函数，它在 $t=s$ 处取值 0。因

$$\tilde{S}_\alpha(t,z) = \tilde{S}_{\alpha,\xi_0}(t,z)$$

对 $\|z\| \leqslant \xi_0/2$，于是 $z_\alpha(t;s,v)$ 也是 $(\tilde{S}_{\alpha,\xi_0})$ 的一解，它据上段所述，必须恒 $=0$。于是从

$$\tilde{x} = \widetilde{\mathscr{P}}_\alpha(s,z_\alpha(s;s,v)) = \widetilde{\mathscr{P}}_\alpha(s,0) = \phi_s(x_0')$$

我们有

$$\tilde{\alpha}\in \tau^{-1}(\tilde{x})\cap \mathscr{A} = \Theta_s(\tau^{-1}(x_0')\cap \mathscr{A}).$$

从而据定理 3.4 及命题 2.15，对于我们的目的来说，不妨设 $\tilde{\alpha} = \Theta_s(\alpha)$，即对于这 $\tilde{\alpha} = \Theta_s(\alpha)\in\mathscr{A}$，我们有 $\tau(\tilde{\alpha}) = \tilde{x}$，且 $(\tilde{X}_{\tilde{\alpha},\xi})$ 有有界解 $z_{X,\tilde{\alpha},\xi}(t;0,\tilde{u})$ 使 $x_0 = \widetilde{\mathscr{P}}_{\tilde{\alpha}}(0,\tilde{u})$。由是

$$\widetilde{\mathscr{P}}_\alpha(0,u_0) = x_0 = \widetilde{\mathscr{P}}_\alpha(s,\tilde{u}).$$

但

$$\|u_0\| = \|z_{X,\alpha,\xi}(0;0,u_0)\| \leqslant \xi/4 < \delta''/4,$$
$$\|\tilde{u}\| = \|z_{X,\alpha,\xi}(0;0,\tilde{u})\| < \delta'/4,$$
$$|s| = \|(s,0)\| = \|(s,z_\alpha(s;s,v))\| \leqslant \delta'/2.$$

这给出

$$\|(0,u_0)-(s,\tilde{u})\| < \delta'.$$

故据引理 4.4，$(0,u_0) = (s,\tilde{u})$，由是

$$s=0,\ \tilde{\alpha}=\alpha, \tilde{x}=\tau(\tilde{\alpha})=\tau(\alpha)=x_0'.$$

这证明我们的断语：$h_{X,\xi}$（在 $\xi<\delta''$ 这条件下）在 x_0 处是单值的。

现在，命 b_0 及 b_1，p_0 及 δ_*，λ_0 分别给出同命题 2.17-(iv)（对于 $\Lambda=M^n$），引理 4.3，引理 4.5 中。据命题 2.19（应用到 $\Lambda=M^n$），我们可取 S 在 $\mathscr{X}$ 中的一 C^0 邻域 $\mathscr{W}_\varepsilon\subset\tilde{\mathscr{V}}$ 及一数 $\xi_\varepsilon>0$ 满足

$$\xi_\varepsilon<\min\left\{8p_0\varepsilon, 1, \delta_*, \delta'', \frac{3p_0b_0}{b_1}\right\}$$

（其中 ε 是要证的定理 4.1 叙述中所给）使得只要 $X\in\mathscr{W}_\varepsilon$，即有

$$\sup_{\substack{(t,z,\alpha)\in \hat{J}(M^n,\hat{\xi})\times\mathscr{V}\\ \|z\|\leqslant\xi_\varepsilon}}\|\tilde{X}_{\mathrm{Rem}(\alpha)}(t,z)\|$$

$$\leqslant\frac{\xi_\varepsilon}{16p_0\lambda_0^2\hat{\xi}(1+2\hat{\eta}\hat{\xi})^{n-1}}<\eta\xi_\varepsilon \tag{4.3}$$

（其中 $p_0\geqslant 1$，$\lambda_0\geqslant 1$）。

我们将考虑一给定的 $X\in\mathscr{W}_\varepsilon$。若 $z_{X,\alpha,\xi_\varepsilon}(t;0,u)$ 是 $(\tilde{X}_{\alpha,\xi_\varepsilon})$（对于 $\alpha\in\mathscr{A}$）的一有界解，则据定理 3.1，

$$\sup_{t\in(-\infty,\infty)}\|z_{X,\alpha,\xi_\varepsilon}(t;0,u)\|\leqslant\frac{\xi_\varepsilon}{16p_0\lambda_0^2}<\varepsilon. \tag{4.4}$$

我们将证明

$$\varphi_X=h_{X,\xi_\varepsilon}$$

是一映射：$M^n\to M^n$ 满足定理 4.1 叙述中的要求，但前面已证部分及(4.4)已给出：h_{X,ξ_ε} 映满 M^n，把 X 过一点的积分线映满 S 的一积分线，在这点处是单值，且把这点映至相距 $<\varepsilon$ 的点（如果 h_{X,ξ_ε} 在这点处有定义的话）。所以，我们只余证 h_{X,ξ_ε} 的定义域是整个 M^n 以及它的连续性。

为证 h_{X,ξ_ε} 的定义域是整个 M^n，考虑一任给的点 $x\in M^n$。为方便，我们将称 x 与一点 $x_0\in M^n$ 在 $\langle -T,T\rangle$ 上规则相距（其中 T 是一数 $\geqslant 0$），如果存在 $\alpha_0\in\mathscr{A}$ 及 $u_0\in\tilde{L}$ 使

$$\tau(\alpha_0)=x_0,\ \tilde{\mathscr{P}}_{\alpha_0}(0,u_0)=x,$$

且存在 $T'\leqslant 0$ 及 $T''\geqslant 0$ 使

$$\sup_{t\in\langle T',T''\rangle}\|z_{X,\alpha_0,\xi_\varepsilon}(t;0,u_0)\|\leqslant\frac{\xi_\varepsilon}{8p_0},\tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}-T&=\int_0^{T'}\tilde{\jmath}_{X,\alpha_0}(t',z_{X,\alpha_0,\xi_\varepsilon}(t';0,u_0))dt',\\ T&=\int_0^{T''}\tilde{\jmath}_{X,\alpha_0}(t',z_{X,\alpha_0,\xi_\varepsilon}(t';0,u_0))dt'.\end{aligned}\tag{4.6}$$

(据命题 2.16-(ii)，这里 (4.6) 蕴涵

$$\tilde{\mathscr{P}}_{\alpha_0}(T',z(T';0,u_0))=\phi_{XT}(x)$$

及

$$\tilde{\mathscr{P}}_{\alpha_0}(T'',z(T'';0,u_0))=\phi_{X(-T)}(x),$$

因为 $\tilde{X}_{\mathrm{Rem}(\alpha)}(t,\ z)=\tilde{X}_{\mathrm{Rem}(\alpha,\xi_\varepsilon)}(t,\ z)$ 对 $\|z\|\leqslant\xi_\varepsilon/2$，从而 $z_{X,\alpha_0,\xi_\varepsilon}(t;0,u_0)$ 在 $\langle T',T''\rangle$ 也满足方程组 $(\tilde{X}_\alpha)$。）易看出 x 与它自身在 $\langle 0,0\rangle$ 上规则相距（可取 $\alpha_0\in\tau^{-1}(x)\cap\mathscr{A}$ 及 $u_0=0$）。

设 x 与 x_0 在 $\langle -T,T\rangle$ 上规则相距。我们说，M^n 上有一点 $\bar{x}$ 使得 x 与 $\bar{x}$ 在 $\langle -T-b_0/4,T+b_0/4\rangle$ 上也规则相距。事实上，任取满足 x 与 x_0 在 $\langle -T,T\rangle$ 上规则相距的要求的 $\alpha_0\in\mathscr{A}$ 及 $u_0\in\tilde{L}$。据式子 (4.3) 及定理 3.1，存在一点 $(0,\bar{u}_0)\in(-\infty,\infty)\times E^{n-1}$ 使

$$\vartheta(\tilde{X}_{\alpha_0,\xi_\varepsilon})(0,u_0)=(0,\bar{u}_0),$$

而对于 $(\tilde{R}_{\alpha_0})$ 的解 $\bar{z}_{\alpha_0}(t;0,\bar{u}_0)$ 我们有

$$\sup_{t\in(-\infty,\infty)}\|z_{X,\alpha_0,\xi_\varepsilon}(t;0,u_0)-\bar{z}_{\alpha_0}(t;0,\bar{u}_0)\|\leqslant\frac{\xi_\varepsilon}{16p_0\lambda_0^2}.$$

另一方面，仍据 (4.3) 及定理 3.1（对于 $X=S\in\mathscr{W}_s$），存在一点 $(0,u_0')\in(-\infty,\infty)\times E^{n-1}$ 使 $\vartheta(\tilde{S}_{\alpha_0,\xi_\varepsilon})(0,u_0')=(0,\bar{u}_0)$，且

$$\sup_{t\in(-\infty,\infty)}\|z_{S,\alpha_0,\xi_\varepsilon}(t;0,u_0')-\bar{z}_{\alpha_0}(t;0,\bar{u}_0)\|\leqslant\frac{\xi_\varepsilon}{16p_0\lambda_0^2},$$

因而

$$\sup_{t\in(-\infty,\infty)}\|z_{X,\alpha_0,\xi_\varepsilon}(t;0,u_0)-z_{S,\alpha_0,\xi_\varepsilon}(t;0,u_0')\|\leqslant\frac{\xi_\varepsilon}{8p_0\lambda_0^2},\tag{4.7}$$

这结合 (4.5) 给出

$$\sup_{t\in\langle T',T''\rangle}\|z_{S,\alpha_0,\xi_\varepsilon}(t;0,u_0')\|\leqslant\frac{\xi_\varepsilon}{4p_0}.$$

故 $z_{S,\alpha_0,\xi_\varepsilon}(t;\ 0,\ u_0')$ 在 $\langle T',\ T''\rangle$ 上也满足方程组 $(\tilde{S}_{\alpha_0})$（因 $\tilde{S}_{\alpha_0}(t,\ z)=\tilde{S}_{\alpha_0,\xi_\varepsilon}(t,\ z)$ 对 $\|z\|\leqslant\xi_\varepsilon/2$）。于是据引理 4.3，存在 $s'<T'$ 及 $s''>T''$ 使得 $z_{S,\alpha_0,\xi_\varepsilon}(t;0,u_0')$ 在 $\langle s',s''\rangle$ 上仍满足 $(\tilde{S}_{\alpha_0})$，

$$s^*=\int_{T'}^{s'}\eta_{S,\alpha_0}(t',z_{S,\alpha_0,\xi_\varepsilon}(t';0,u_0'))dt'\leqslant-1,$$

$$s^{**}=\int_{T''}^{s''}\eta_{S,\alpha_0}(t',z_{S,\alpha_0,\xi_\varepsilon}(t';0,u_0'))dt'\geqslant 1,$$

且

$$\sup_{t\in\langle s',s''\rangle}\|z_{S,\alpha_0,\xi_\varepsilon}(t;0,u_0')\|\leqslant\frac{\xi_\varepsilon}{4}.$$

这后者结合（4.7）给出

$$\sup_{t\in\langle s',s''\rangle}\|z_{X,\alpha_0,\xi_\varepsilon}(t;0,u_0)\|\leqslant\frac{\xi_\varepsilon}{2},$$

因而 $z_{X,\alpha_0,\xi_\varepsilon}(t;0,u_0)$ 在 $\langle s',s''\rangle$ 上也满足 $(\tilde{X}_{\alpha_0})$。又记

$$r^*=\int_0^{T'}\eta_{S,\alpha_0}(t',z_{S,\alpha_0,\xi_\varepsilon}(t';0,u_0'))dt',$$

$$r^{**}=\int_0^{T''}\eta_{S,\alpha_0}(t',z_{S,\alpha_0,\xi_\varepsilon}(t';0,u_0'))dt',$$

并置 $t^*=r^*+s^*$，$t^{**}=r^{**}+s^{**}$。于是据（4.7）及（4.6），并应用引理 4.5 及命题 2.16-(ii)（到 X 及 S），我们可得出一个对 $t\in\langle t^*,t^{**}\rangle$ 连续的严格递增函数 $\theta(t)$ 使得

$$\theta(r^*)=-T,\ \theta(0)=0,\ \theta(r^{**})=T,$$

$$t^*-r^*\leqslant-1,\ t^{**}-r^{**}\geqslant 1, \tag{4.8}$$

$$\widehat{gd}(\phi_t(x'),\phi_{X\theta(t)}(x))\leqslant\frac{\xi_\varepsilon}{8p_0\lambda_0}<\delta''\text{对}t\in\langle t^*,t^{**}\rangle, \tag{4.9}$$

其中 $x'=\tilde{\mathscr{P}}_{\alpha_0}(0,u_0')$。

任取 $\alpha'\in\tau^{-1}(x')\cap\mathscr{A}$。则 $\tilde{\mathscr{P}}_{\alpha'}(t,0)=\phi_t(x')$ 对 $t\in(-\infty,\infty)$。又（4.9）蕴涵 $\widehat{gd}(x',x)<\delta''$。故据引理 4.4，存在

$(s,v)\in\tilde{J}(M^*,\xi)$，$\|(s,v)\|=\|(0,0)-(s,v)\|\leqslant\delta'/2$，使 $\widetilde{\mathscr{P}}_{\alpha'}(s,v)=x$。考虑方程组 $(\widetilde{X}_{\alpha'})$ 过 (s,v) 的解。于是仍据 (4.9)，$\theta(t)$ 对 t 的连续及严格递增性，引理 4.4 以及命题 2.16-(ii)，我们易看出：$(\widetilde{X}_{\alpha'})$ 有解 $z_{X,\alpha'}(t;s,v)$ 对 $t\in$ 某一区间 $\langle T_0,T_{00}\rangle$，且有一个对 t 连续的严格递增函数 $\chi(t)$ 使得

$$\begin{gathered}\chi(t^*)=T_0,\chi(0)=s,\chi(t^{**})=T_{00},\\ \theta(t)=\int_t^{\chi(t)}\tilde{f}_{X,\alpha'}(t',z_{X,\alpha'}(t';s,v))dt'.\end{gathered}\tag{4.10}$$

由是

$$\phi_{X\theta(t)}(x)=\widetilde{\mathscr{P}}_{\alpha'}(\chi(t),z_{X,\alpha'}(\chi(t);s,v))\text{ 对 }t\in\langle t^*,t^{**}\rangle,$$
$$\|(t,0)-(\chi(t),z_{X,\alpha'}(\chi(t);s,v))\|\leqslant\delta'/2\text{ 对 }t\in\langle t^*,t^{**}\rangle.$$

进一步因 $\delta'<\min\{\xi_0,\delta_0\}\leqslant\delta_0$（见前），所以据 (4.9) 及引理 4.5，我们又有

$$\|(t,0)-(\chi(t),z_{X,\alpha'}(\chi(t);s,v))\|\leqslant\frac{\xi_\varepsilon}{8p_0}\text{ 对 }t\in\langle t^*,t^{**}\rangle,$$

这蕴涵

$$\begin{gathered}\|z_{X,\alpha'}(t;s,v)\|\leqslant\frac{\xi_\varepsilon}{8p_0}\text{ 对 }t\in\langle T_0,T_{00}\rangle,\\ |t-\chi(t)|\leqslant\frac{\xi_\varepsilon}{8p_0}\text{ 对 }t\in\langle t^*,t^{**}\rangle.\end{gathered}\tag{4.11}$$

特别地，

$$|t^*-T_0|,\ |t^{**}-T_{00}|,\ |r^*-\chi(r^*)|$$

及

$$|r^{**}-\chi(r^{**})|\text{ 都 }<\frac{\xi_\varepsilon}{8p_0}.$$

于是，据 (4.10)，(4.8) 及命题 2.17-(iv)，

$$\begin{aligned}&\int_t^{T_0}\tilde{f}_{X,\alpha'}(t',z_{X,\alpha'}(t';s,v))dt'\\ &-\left(\int_t^{\chi(r^*)}+\int_{\chi(r^*)}^{r^*}+\int_{t^*}^{T_0}+\int_{r^*}^{t^*}\right)\\ &\times\tilde{f}_{X,\alpha'}(t',z_{X,\alpha'}(t';s,v))dt'\end{aligned}$$

$$\leqslant -T + \frac{\xi_\epsilon b_1}{4p_0} - b_0 \leqslant -T - \frac{b_0}{4} \tag{4.12}$$

(因 $\xi_\epsilon \leqslant 3p_0 b_3/b_1$)。类似地可看出

$$\int_s^{T_{00}} \tilde{f}_{X,\alpha'}(t', z_{X,\alpha'}(t'; s, v))dt' \geqslant T + \frac{b_0}{4}. \tag{4.13}$$

现在，命 $\bar{\alpha} = \Theta_s(\alpha')$，$\bar{x} = \tau(\bar{\alpha})$。则

$$x = \tilde{\mathscr{P}}_{\alpha'}(s, v) = \tilde{\mathscr{P}}_{\bar{\alpha}}(0, v);$$

据命题 2.15-(i)，$z_{X,\bar{\alpha}}(t; 0, v) = z_{X,\alpha'}(s + t; s, v)$ 对 $t \in \langle T_0 - s, T_{00} - s\rangle$ 是 $(\tilde{X}_{\bar{\alpha}})$ 的一解；又据 (4.11)，

$$\|z_{X,\bar{\alpha}}(t; 0, v)\| \leqslant \frac{\xi_\epsilon}{8p_0} \text{ 对 } t \in \langle T_0 - s, T_{00} - s\rangle,$$

因而

$$z_{X,\bar{\alpha},\xi_\epsilon}(t; 0, v) = z_{X,\bar{\alpha}}(t; 0, v)$$

对 $t \in \langle T_0 - s, T_{00} - s\rangle$。从 (4.12) 及 (4.13)，

$$\begin{aligned}
&\int_0^{T_0 - s} \tilde{f}_{X,\bar{\alpha}}(t', z_{X,\bar{\alpha}}(t'; 0, v))dt' \\
&= \int_0^{T_0 - s} \tilde{f}_{X,\alpha'}(s + t', z_{X,\alpha'}(s + t'; s, v))dt' \\
&\leqslant -T - \frac{b_0}{4},
\end{aligned}$$

$$\int_0^{T_{00} - s} \tilde{f}_{X,\bar{\alpha}}(t', z_{X,\bar{\alpha}}(t'; 0, v))dt' \geqslant T + \frac{b_0}{4}.$$

从这些易导出我们的断语：x 与 $\bar{x}$ 在 $\left\langle -T - \frac{b_0}{4}, T + \frac{b_0}{4}\right\rangle$ 上规则相距。

因 x 与它自身在 $\langle 0, 0\rangle$ 上规则相距，从上段断语我们可取 M^n 上一序列的点 $\{\bar{x}_j\}$，每个 $\bar{x}_j$ 与 x 在 $\left\langle -\frac{jb_0}{4}, \frac{jb_0}{4}\right\rangle$ 上规则相距。这是说，存在一序列 $\{\bar{\alpha}_j\}$，$\bar{\alpha}_j \in \mathscr{A}$，及一序列 $\{\bar{u}_j\}$，$\bar{u}_j \in E^{n-1}$，使 $\tau(\bar{\alpha}_j) = \bar{x}_j$，$\tilde{\mathscr{P}}_{\bar{\alpha}_j}(0, \bar{u}_j) = x$，且存在两序列 $\{T'_j\}$ 及 $\{T''_j\}$ 的数 $T'_j \leqslant 0$ 及 $T''_j \geqslant 0$ 使得

$$\sup_{t\in\langle T_j' T_j''\rangle} \|z_{X,\alpha_j,\xi_\varepsilon}(t;0,\bar{u}_j)\| \leqslant \frac{\xi_\varepsilon}{8p_0},$$

$$\frac{-jb_0}{4} = \int_0^{T_j'} \gamma_{X,\alpha_j}(t', z_{X,\alpha_j,\xi_\varepsilon}(t';0,\bar{u}_j))dt',$$

$$\frac{jb_0}{4} = \int_0^{T_j''} \gamma_{X,\alpha_j}(t', z_{X,\alpha_j,\xi_\varepsilon}(t';0,u_j))dt'. \tag{4.14}$$

于是据命题 2.17- (iv)，$-jb_0/4 \geqslant T_j' b_1$，$jb_0/4 \leqslant T_j'' b_1$，因而

$$\lim_{j\to\infty} T_j' = -\infty, \quad \lim_{j\to\infty} T_j'' = \infty. \tag{4.15}$$

命常微方程族 $\mathscr{M}_{n-1}$ 给出同 §3 中，据 §3 中所述，$\mathscr{M}_{n-1}$ 作成一拓扑空间，$\supset \mathscr{M}_{n-1}(\hat{\eta}, \eta\xi_\varepsilon; \eta, d)$。对于 $X \in \mathscr{W}_\varepsilon$，命

$$g_X(\alpha) = (\widetilde{X}_{\alpha,\xi_\varepsilon}), \ \alpha \in \mathscr{A}.$$

这给出一映射

$$g_X: \mathscr{A} \to \mathscr{M}_{n-1}(\hat{\eta}, \eta\xi_\varepsilon; \eta, d)$$

(据命题 1.4 及 2.17-(iii))。写 $\bar{u}_j = (\bar{u}_j^1, \bar{u}_j^2, \cdots, \bar{u}_j^{n-1})$，我们有

$$x = \widetilde{\mathscr{P}}_{\alpha_j}(0, \bar{u}_j) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n-1} \bar{u}_j^k \operatorname{proj}_k \bar{\alpha}_j\right).$$

因 $\mathscr{A}$ 紧致，且 $\bar{u}_j$ 是紧致集 $\{z \in E^{n-1} \mid \|z\| \leqslant \xi_\varepsilon/8p_0\}$ 中的点，我们不妨设 $\{\bar{\alpha}_j\}$，$\{\bar{u}_j\}$ 是 $\mathscr{A}$，E^{n-1} 中的收敛序列，分别收敛到 $\bar{\alpha}_0 \in \mathscr{A}$，$\bar{u}_0 \in E^{n-1}$。于是据 (4.14) 及 (4.15)，并用指数映射及 g_X 的连续性，我们有

$$\widetilde{\mathscr{P}}_{\alpha_0}(0, \bar{u}_0) = x$$

及

$$\sup_{t\in(-\infty,\infty)} \|z_{X,\alpha_0,\xi_\varepsilon}(t;0,\bar{u}_0)\| \leqslant \frac{\xi_\varepsilon}{8p_0},$$

由是有 $h_{X,\xi_\varepsilon}(x) = \tau(\bar{\alpha}_0)$。这证明 h_{X,ξ_ε} 的定义域是整个 M^*。

最后，我们证 h_{X,ξ_ε} 的连续性。设 $\{x_j\}$ 是 M^* 中一序列，收敛到 $x_0 \in M^*$。我们须证 $\{h_{X,\xi_\varepsilon}(x_j)\}$ 收敛到 $h_{X,\xi_\varepsilon}(x_0)$。据 h_{X,ξ_ε} 的定义，对每一 x_j 有一 $\alpha_j \in \tau^{-1}(h_{X,\xi_\varepsilon}(x_j)) \cap \mathscr{A}$ 且有一点 $u_j \in E^{n-1}$ 使得

$$\widetilde{\mathscr{P}}_{\alpha_j}(0, u_j) = x_j,$$

$$\sup_{t\in(-\infty,\infty)} \|z_{X,\alpha_j,\xi_\varepsilon}(t;0,u_j)\| < \infty,$$

$$j = 1,2,3,\cdots.$$

据前面 (4.4)，这里不等式可换作

$$\sup_{t\in(-\infty,\infty)} \|z_{X,\alpha_j,\xi_\varepsilon}(t;0,u_j)\| < \xi_\varepsilon,$$

这蕴涵

$$\|u_j\| \leqslant \xi_\varepsilon,\ j = 1,2,3,\cdots .$$

于是据 $\mathscr{A}$ 及 E^{n-1} 中的子集 $\{z\in E^{n-1}|\,\|z\|\leqslant \varepsilon\}$ 的紧致性，对于我们的目的来说，不妨设 $\{\alpha_j\},\{u_j\}$ 是 $\mathscr{A}$，E^{n-1} 中的收敛子序列，分别收敛到 $\alpha_0\in\mathscr{A}$，$u_0\in E^{n-1}$，$\|u_0\|\leqslant\xi_\varepsilon$。因而

$$\widetilde{\mathscr{P}}_{\alpha_0}(0,u_0) = x_0.$$

又据定理 3.3 及 g_X 的连续性我们有映射 $\bar{g}_X = \vartheta g_X:\mathscr{A}\to\mathscr{N}_{n-1}$，这蕴涵

$$\lim_{j\to\infty}\sup_{(t,z)\in(-j,j)\times H_j} \|\bar{g}_X(\alpha_j)(t,z) - \bar{g}_X(\alpha_0)(t,z)\| = 0,$$

其中 $H_j = \{z\in E^{n-1}|\,\|z\|\leqslant j\}$。由是

$$\lim_{j\to\infty}\bar{g}_X(\alpha_j)(0,u_j) = \bar{g}_X(\alpha_0)(0,u_0).$$

但 $\bar{g}_X(\alpha_j)(0,u_j) = (0,0)$（据 $\vartheta(\widetilde{X}_{\alpha_j,\xi_\varepsilon})$ 的定义）。所以

$$\bar{g}_X(\alpha_0)(0,u_0) = (0,0).$$

这给出

$$\sup_{t\in(-\infty,\infty)} \|z_{X,\alpha_0,\xi_\varepsilon}(t;0,u_0)\| < \infty.$$

故

$$h_{X,\xi_\varepsilon}(x_0) = \tau(\alpha_0) = \lim_{j\to\infty}\tau(\alpha_j) = \lim_{j\to\infty}h_{X,\xi_\varepsilon}(x_j).$$

这证明 h_{X,ξ_ε} 连续。所以，若取 $\varphi_X = h_{X,\xi_\varepsilon}$，则 φ_X 满足定理 4.1 叙述中所有要求。定理 4.1 证完。

仍设 S 是 Anosov 系统。任给 $\varepsilon>0$。若取 S 在 $\mathscr{X}$ 中的一 C^1 邻域 $\mathscr{W}_\varepsilon^*$ 及一数 $\xi_\varepsilon^*>0$，$\xi_\varepsilon^*<\min\{2\varepsilon,\bar{\xi}/2\}$，使得对每一 $X\in\mathscr{W}_\varepsilon^*$，

$$\sup_{(t,z,\alpha)\in \tilde{J}(M^n,\zeta)\times\mathscr{V}} \|\tilde{X}_{\mathrm{Rem}(\alpha)}(t,\ z)\|$$

$$< \frac{\xi_\varepsilon^*}{2\tilde{\xi}(1+2\tilde{\eta}\tilde{\xi})^{n-1}},$$

$$\|\tilde{X}_{\mathrm{Rem}(\alpha,2\xi_\varepsilon^*)}(t,z) - \tilde{X}_{\mathrm{Rem}(\alpha,2\xi_\varepsilon^*)}(t,z')\|$$

$$< \frac{\|z - z'\|}{2\tilde{\xi}(1+2\tilde{\eta}\tilde{\xi})^{n-1}}$$

对所有$(t,z,\alpha)\in E^n \times \mathscr{A}$.

(用命题 2.20 (对 $\Lambda = M^n$), 我们可以这样取 $\mathscr{W}_\varepsilon^*$ 及 ξ_ε^*; $\tilde{X}_{\mathrm{Rem}(\alpha,2\xi_\varepsilon^*)}(t,\ z)$ 给出法同上证明中), 则 $h_{X,2\xi_\varepsilon^*}$ 是一拓扑变换: $M^n \to M^n$(应用定理 3.2; $h_{X,2\xi_\varepsilon^*}$ 定义法也同上证明中), 具有性质:

(a) 它是一 ε-映射,

(b) 它把 X 的每一积分线映满 S 的一积分线. 这论断证明法与上面定理 4.1 的证明相类[1]. 这样,我们就得出周知的 Anosov 定理,即 M^n 上一 Anosov 系统结构稳定.

这 Anosov 结果(特别是微拓变换这特款下)以往引起过比较多的讨论, 也出现过不同方式的证明(例如 Anosov, Trudy Mat. Inst. Steklov., **90**(1967); Moser, J. Diff. Eqs., **5** (1969), 411—440). 我们这里用常微分方程式论的方法,有这样的好处,即对结构稳定性涉及到的 C^1 度量 $\|X - S\|_1$ 的数值如何作定量估计有清楚的线索.

我们不费更多的周折,用同样方式可证明定理 4.1 的一个如下的推广形式的定理 4.6. 设 Λ 是 M^n 的一子集,在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变, 且它不把 S 的任何奇点作为闭包点. 我们说 S 在 Λ 上有双曲型构造,如果对于 Λ 的每个连通分支 Λ_j, 部分丛 $\mathscr{C}|\Lambda_j$ 可分解成线性子丛的直和

---

1) 但现在证明要简单得多; M^n 是一紧致流形, 其上一个到其自身内的单映射自然是一满映射,用这事实,即可免去如同上面关于 h_{X,ξ_ε} 的定义域是整个 M^n 这一较复杂的证明过程.

$$\mathscr{C}|\Lambda_1=\mathscr{C}_{i-}\oplus\mathscr{C}_{i0}\oplus\mathscr{C}_{i+},$$

其中 $\mathscr{C}_{i0}$ 由 $S|\Lambda_i$ 产生，$\mathscr{C}_{i-}$ 及 $\mathscr{C}_{i+}$ 都在 $\Phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变，且对于某常数 $\lambda\geqslant 1$ 和 $\mu<0$（λ 和 μ 只与 Λ 有关），Φ_t 分别在 $\mathscr{C}_{i-}$ 和 $\mathscr{C}_{i+}$ 上收缩和扩张，即

$$\|\Phi_t(u)\|\leqslant\lambda\|u\|\exp(\mu t)\ \text{对所有}\ u\in\mathscr{C}_{i-},\ t\geqslant 0,$$

$$\|\Phi_{-t}(u)\|\leqslant\lambda\|u\|\exp(\mu t)\ \text{对所有}\ u\in\mathscr{C}_{i+},\ t\geqslant 0.$$

从 $\Phi_t(-\infty<t<\infty)$ 的连续性，易看出：若 S 在 Λ 上有双曲型构造，则 S 在 Λ 的闭包上也有双曲型构造。

定理 4.6 设 Λ 是 M^* 中一子集，在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变，且它在 M^* 中的闭包不含有 S 的奇点。又设 S 在 Λ 上有双曲型构造。任给 $\varepsilon>0$。则

(i_0) S 在 $\mathscr{X}$ 中有一 C^0 邻域 $\mathscr{W}$ 使得只要 $X\in\mathscr{W}$，M^* 中就有一在 $\phi_{Xt}(-\infty<t<\infty)$ 下不变的子集 Λ_X，及一 ε-映射 $\varphi_{\Lambda X}:\Lambda_X\to\Lambda$，它映满 Λ，且它把 X 的每一包含在 Λ_X 内的积分线映满 S 的一积分线。

(ii_0) S 在 $\mathscr{X}$ 中有一 C^1 邻域 $\mathscr{W}^*$ 使得只要 $X\in\mathscr{W}^*$，即有一个到 M^* 中的 ε-拓扑变换 $\varphi^*_{\Lambda X}:\Lambda\to M^*$，它把 S 的每一包含在 Λ 内的积分线映满 X 的一积分线。

参 考 文 献

[1] 廖山涛，紧致微分流形上常微分方程系统的某类诸态备经性质，北京大学学报(自然科学)，9(1963)，241—265；309—324(即本书第一章)。

[2] 廖山涛，常微分方程系统所导出的在切丛上的单参数变换群的诸态备经性质对相空间结构的探讨的应用 1，北京大学学报(自然科学)，12(1966)，1—43.

[3] 廖山涛，常微系统的一个诸态备经性质定理，中国科学，1(1973)，1—20.

[4] 廖山涛，关于双曲型点(将发表)。

[5] Robbin, J., Topological conjugacy and structural stability for discrete dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 78 (1972), 923—952.

[6] Smale S., Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.* 73(1967), 747—817.

[7] Walters P., Anosov diffeomorphisms are topologically stable, *Topology*, 9(1970), 71—78.

第三章　阻碍集与强匀断条件

§1. 引　言

近几年来，在常微系统结构稳定理论中，有相当多的工作讨论所谓双曲型流或条件较强的所谓公理 A 流（以及双曲型或公理 A 微拓变换这特款）的性质．另一个比较起来以前尚少注意但有用的概念是所谓强匀断条件．

设 M^n 为一 n 维紧致的 C^∞ 型 Riemann 流形，$n \geqslant 2$，其上有一 C^1 型常微系统 S，则 S 导出 M^n 上一 C^1 型单参数变换群

$$\phi_t:\ M^n \to M^n,\ -\infty < t < \infty,$$

从而导出 M^n 的切空间丛 $\mathscr{C}$ 上一单参数变换群

$$\Phi_t = d\phi_t:\ \mathscr{C} \to \mathscr{C},\ -\infty < t < \infty.$$

记 σ: $\mathscr{C} \to M^n$ 为丛投射，并记 $\mathscr{C}_x = \sigma^{-1}(x)$ 对 $x \in M^n$．任给 M^n 中一个在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变的闭子集 Λ．我们将以 $\Omega(S, \Lambda)$ 表 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 限制在 Λ 上时的非游荡集．这是 Λ 中所有具有下述性质的点 x 作成的集合，即：对 x 每一个在 Λ 中的邻域 U，都有一数 $t_U \geqslant 1$ 使得 $U \cap \phi_{t_U}(U) \neq 0$．$\Omega(S, \Lambda)$ 是 M^n 中一闭子集，在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变．

照通常的说法，我们将称 S 在 Λ 上具有双曲型构造，如果部分丛 $\mathscr{C}|\Lambda$ 有直和分解

$$\mathscr{C}|\Lambda = \mathscr{F}_- \oplus \{S|\Lambda\} \oplus \mathscr{F}_+,$$

其中 $\{S|\Lambda\}$ 由 $S|\Lambda$ 产生而 $\mathscr{F}_-$ 及 $\mathscr{F}_+$ 都在 $\Phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变，这分解在 Λ 中 S 的每一常点处都局部地是一丛分解，且存在数 $\lambda > 0$ 及 $\mu < 0$ 使得

$$\|\Phi_t(u)\| \leqslant \lambda\|u\|\exp(\mu t)\quad 对所有\ u \in \mathscr{F}_-\ 及\ t \geqslant 0,$$

$$\|\Phi_{-t}(u)\| \leqslant \lambda \|u\| \exp(\mu t) \text{ 对所有 } u \in \mathscr{T}_{+} \text{ 及 } t \geqslant 0.$$

我们将称 S 满足公理 A，如果 S 在 $\Omega(S, M^*)$ 上具有双曲型构造，且它的周期点(即奇点或周期轨道上的点)集合在 $\Omega(S, M^*)$ 中稠密。

我们说 S 在 Λ 上满足强匀断条件，如果对每一 $x \in \Lambda$，每一 $u \in \mathscr{C}_x$ 可表成 $u = u_- + u_+ + \lambda_x S(x)$，其中 u_- 及 $u_+ \in \mathscr{C}_x$，$\lambda_x \in (-\infty, \infty)$，满足

$$\lim_{t\to\infty} \|\Phi_t(u_-)\| = 0, \quad \lim_{t\to-\infty} \|\Phi_t(u_+)\| = 0.$$

关于双曲型构造及公理 A 的综合评述，可看 [6, 4]。事实上，对它们的讨论，在此时以前的许多文献中都涉及到(例如，见 [4] 所引用的许多文献中)。 历史上，Smale[6] 在所谓 Anosov 系统的基础上，进一步引进双曲型构造这概念，同时引进公理 A，以寻找关于系统结构稳定的适当条件。

这里关于强匀断条件的叙述，是[3，第 471 页；4，第948 页]关于微拓变换一相当条件的自然推广，而与 [7，第 287 页；5，第 157 页] 所叙述的几何式条件有些不同。后者要求稳定流形与非稳定流形匀断相交¹⁾。

历史上，仍是为了寻找系统结构稳定的条件，Smale([7，第287 页])在公理 A 的基础上，补充所谓强匀断条件；Robbin([3，第471 页])修改这条件成为线性化的形式(这即本文所采用的形式)。但不象关于双曲型构造及公理 A 这情况，过去工作中对于强匀断条件，涉及较少，更没有独立地处理过。

如上所述，双曲型构造，公理 A 以及强匀断条件这三者的最初引进都是为了寻找结构稳定的特征性质这样一个目的。 Robbin[3] 证明的一个（原为 Smale 推测的）重要定理： 紧致微分流形上一 C^2 型微拓变换在它满足公理 A 及强匀断条件这情况下，是结构稳定的。如果把这定理叙述中的微拓变换换作常微系统，类似结

1）在系统满足公理 A 的前提下，后者与我们这里叙述的将一致，如同[3，第471 页]中提到过的那样。

论最近证明也成立，即 Robinson[5].

可是，在双曲型构造、公理 A 以及(如上所述，亦即采用[3，第471页]中的方式来界定的)强匀断条件这三者中，后一个比较起来将是最基本的，虽然这后一个初看起来形式较弱. 本章的目的之一是给出这说法的根据 (见本章 § 3). 本章的另一个更重要的目的是引进 M^n 中一个称为 S 的阻碍集的闭子集 $Ob(S)$(见 §2)，同时从 $Ob(S)$ 出发，讨论 M^n 中在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变的闭子集 Λ 与 $Ob(S)$ 的交集为 0 这情况下，Λ 所具有的性质(见 § 3). 一个结论是，S (在 M^n 上)满足强匀断条件即蕴涵 S 满足公理 A. 根据下面诸节中的讨论，可以期望，把阻碍集作为探讨常微系统的一个基本工具将是恰当的.

§ 2. 阻 碍 集 $Ob(S)$

为给出 $Ob(S)$ 的定义，我们将用 [1] 中的记号，并考虑 S 所有常点作成的集合 M 及 S 的共轭丛 $\mathscr{D}$. 这是 $\mathscr{C}$ 的一子丛，以 M 为底空间，其上任一点 x 处的纤维 $\mathscr{D}_x$ 是 $\mathscr{C}_x$ 中所有与 $S(x)$ 正交的切向量组成的 $n-1$ 维子线性空间. 对任一 $(t,u)\in(-\infty,\infty)\times\mathscr{D}_x$, $\Phi_t(u)$ 可唯一地表成 $\Phi_t(u)=\lambda_{(t,u)}S(\phi_t(x))+\phi_t(u)$，其中 $\lambda_{(t,u)}\in(-\infty,\infty)$, $\phi_t(u)\in\mathscr{D}_{\phi_t(x)}$(即 $\phi_t(u)$ 是 $\Phi_t(u)$ 在 $\mathscr{D}_{\phi_t(x)}$ 上的垂直投影). 这给出一单参数变换群

$$\phi_t:\mathscr{D}\to\mathscr{D},\quad -\infty<t<\infty$$

(见 [1, §1]).

我们需要用到 $\mathscr{D}$ 上与 S 相联系的另一个单参数变换群. 为此，对任意的 $u\in\mathscr{D}_x$, $x\in M$, 记 $\circledast u$ 为 $\mathscr{D}_x$ 中所有与 u 正交的切向量作成的子线性空间. 因 $\phi_t(\circledast u)$ 是 $\mathscr{D}_{\phi_t(x)}$ 中一子线性空间，故存在唯一的 $\Psi_t(u)\in\mathscr{D}_{\phi_t(x)}$, 它与 $\phi_t(\circledast u)$ 正交且使得 $\phi_t(u)-\Psi_t(u)\in\phi_t(\circledast u)$. 用这办法，我们得出 $\mathscr{D}$ 上一单参数变换群

$$\Psi_t:\mathscr{D}\to\mathscr{D},\quad -\infty<t<\infty,$$

并且，若命 $\mathscr{D}^*$ 为 $\mathscr{D}$ 在 $\mathscr{C}$ 中的闭包，这变换群可唯一地扩充至

$\mathscr{D}^*$上一单参数变换群

$$\Psi_t: \mathscr{D}^* \to \mathscr{D}^*, \quad -\infty < t < \infty,$$

于是命

$$Ob(S) = \{x = \sigma(u) \in M^n \mid u \in \mathscr{D}^*,$$
$$\|u\| = 1 = \inf_{t \in (-\infty, \infty)} \|\Psi_t(u)\|\},$$

这个集合叫作与 S 相联系的阻碍集．易看出，这是 M^n 中一闭子集．

如所周知，通过扭扩的办法，紧致微分流形上一微拓变换作为离散动力体系来考虑时，可看作常微系统的一特款．上面阻碍集的定义以及本文中所有关于常微系统的结论都可自然地转换成关于微拓变换的相当叙述．这些转换，形式上是显然的，我们将不进一步论述．

§3. 结果的叙述

记 $\mathscr{X}$ 为 M^n 上所有 C^1 型常微系统作成的线性空间．对任一 $X \in \mathscr{X}$，记 $\|X\|_1$ 为 X 的 C^1—模．于是 $\mathscr{X}$ 就这模作成一 Banach 空间(例如，见 [1])，仍记作 $\mathscr{X}$．任取定 M^n 上一拓扑度量，任意两点 x 及 y 间的距离将记作 $d(x,y)$．S 所有奇点作成的集合(在 M^n 中)的内集将记作 $I(S)$．

设 Λ 是 M^n 中一闭子集，在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变．我们将称 S 在 Λ 上结构稳定，如果对任给的 $\varepsilon > 0$，存在一对应的 $\delta > 0$ 使得只要 $X \in \mathscr{X}$ 且 $\|X - S\|_1 < \delta$，即有一个从 Λ 到 M^n 中的拓扑变换 f，它把 S 的每一包含在 Λ 内的积分线映满 X 的一积分线，且满足

$$d(x, f(x)) < \varepsilon \quad 对所有 \ x \in \Lambda.$$

定理 3.1 设 Λ 是 M^n 中一闭子集，在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变．且设

$$\Lambda \cap (I(S) \cup Ob(S)) = 0,$$

则 S 在 Λ 上结构稳定．

定理 3.2 设 Λ 是 M^n 中一闭子集，在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下

不变，则 S 在 A 上满足强匀断条件当且仅当

$$A\cap(I(S)\cup Ob(S))=0.$$

在这两个定理中取 $A=M^*$，即看出我们的结果包括（§1 中提到的）Robbin-Robinson 定理[5,3]作为特款。并且，比起 [3]，依照我们的结果就不需要微拓变换满足公理 A 这假设。比起 [5]，我们的结果也具有较简单的形式，虽然本文界定的强匀断条件（看 § 1）与 [5] 中所指的有些不同。

据定理 3.2 易看出，S 的一奇点 x_0 是通有的（即 S 在 x_0 处的 Jacobi 方阵所有特征根的实部都不为 0）当且仅当 x_0 不 $\in I(S)\cup Ob(S)$。也易看出，S 的一（异于奇点的）周期轨道 P 是通有的（即 P 的所有特征指数的绝对值都不等于 1）当且仅当 $P\cap Ob(S)=0$。

定理 3.2 的意义，不仅是其中两个条件等价，较重要的是在于其中等式应用起来有方便之处，而这等式可用来代替强匀断条件。下面定理 3.3 证明简单，可取来说明这个事实。

命 $\mathscr{X}^0$ 为 $\mathscr{X}$ 中所有满足 $I(X)\cup Ob(X)=0$ 的系统 X（或等价地，所有在 M^* 上满足强匀断条件的 X）作成的集合。如上面所述，$\mathscr{X}$ 就 C^1- 模作成一 Banach 空间。

定理 3.3 $\mathscr{X}^0$ 是 $\mathscr{X}$ 中一开子集。

我们简述这证明如下。相应于 $S\in\mathscr{X}$ 导出的 $\mathscr{C}$ 上的单参数变换群 $\varphi_t(-\infty<t<\infty)$，每一 $X\in\mathscr{X}$ 导出的 $\mathscr{C}$ 上的单参数变换群将记作 $\varphi_{Xt}(-\infty<t<\infty)$。于是由 $\tilde{\Phi}(t,X,u)=\varphi_{Xt}(u)$ 给出一映射

$$\tilde{\Phi}:(-\infty,\infty)\times\mathscr{X}\times\mathscr{C}\to\mathscr{C}.$$

相应于 S 的共轭丛 $\mathscr{D}$，$\mathscr{D}^*$ 及其上的单参数变换群 $\Psi_t(-\infty<t<\infty)$，我们也有 $X\in\mathscr{X}$ 的共轭丛 $\mathscr{D}_X$，$\mathscr{D}_X^*$ 及单参数变换群

$$\Psi_{Xt}:\mathscr{D}_X^*\to\mathscr{D}_X^*,\ -\infty<t<\infty.$$

设 $S\in\mathscr{X}^0$。我们将证明 S 有一 C^1 邻域 $\subset\mathscr{X}^0$。但首先，S 的每一奇点都不 $\in I(S)\cup Ob(S)$，由是易验证对于 S 每一奇点

x，有 $\mathscr{C}_x\subset\mathscr{D}^*$. 设相反地 $S\in\mathscr{R}-\mathscr{R}^0$ 的闭包，则在 $\mathscr{R}-\mathscr{R}^0$ 中可取一序列 $\{X_k\}$ 收敛到 S 使得对每一 k，有一 $u_k\in\mathscr{D}^*_{X_k}$ 满足

$$\|u_k\|=1=\inf_{t\in(-\infty,\infty)}\|\Psi_{X_k t}(u_k)\|.$$

从 M^n 的单位切球丛的紧致性，不妨设 $\{u_k\}$ 是 $\mathscr{C}$ 中一收敛叙列，收敛到一 $u_0\in\mathscr{C}$，$\|u_0\|=1$. 由是据 $\bar{\Phi}$ 的连续性及 Ψ_{Xt} $(-\infty<t<\infty)$ 的定义，我们将可得

$$u_0\in\mathscr{D}^* \text{ 且 } \|\Psi_t(u_0)\|=\lim_{k\to\infty}\|\Psi_{X_k t}(u_k)\|,$$

从而

$$\|u_0\|=1=\inf_{t\in(-\infty,\infty)}\|\Psi_t(u_0)\|.$$

但这与 $S\in\mathscr{R}^0$ 相矛盾. 就这样，我们可看出定理 3.3 成立.

上面定理证明较难于直接用强匀断条件来完成，因为那样，我们将遇到某种一致收敛性是否成立而答案比较隐晦的问题.

现在，对任一 $x\in M^n$，记

$$F_-(x)=\{u\in\mathscr{C}_x\,|\,\lim_{t\to\infty}\|\Phi_t(u)\|=0\},$$

$$F_+(x)=\{u\in\mathscr{C}_x\,|\,\lim_{t\to-\infty}\|\Phi_t(u)\|=0\};$$

又对 S 的任一常点 x，记

$$D_-(x)=\{u\in\mathscr{D}_x\,|\,\lim_{t\to\infty}\|\phi_t(u)\|=0\},$$

$$D_+(x)=\{u\in\mathscr{D}_x\,|\,\lim_{t\to-\infty}\|\phi_t(u)\|=0\}.$$

这些都是 $\mathscr{C}_x$ 的子线性空间. 显然，对于 M^n 中一个在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变的闭子集来说，所谓 S 在 Λ 上满足强匀断条件，这意思恰是

$$\mathscr{C}_x=F_-(x)+\{S(x)\}+F_+(x) \text{ 对所有 } x\in\Lambda,$$

其中 $\{S(x)\}$ 表 $\mathscr{C}_x$ 中由 $S(x)$ 所产生的子线性空间. 对 $\mathscr{C}_x$，$x\in M^n$ 中的任一 p 维子线性空间 L，记 $*L$ 为 $\mathscr{C}_x$ 中与 L 正交的 $n-p$ 维子线性空间；于是命

$$B_-(x)=*(F_+(x)+\{S(x)\}),$$

$$B_+(x)=*(F_-(x)+\{S(x)\}).$$

易验证，若 x 是 S 的一奇点不 $\in I(S)\cup Ob(S)$ 或是 S 的一常点，则 $B_-(x)$ 及 $B_+(x)$ 都 $\subset \mathscr{D}^*$，且有

$$\Psi_t(B_-(x)) = B_-(\phi_t(x)),$$

$$\Psi_t(B_+(x)) = B_+(\phi_t(x)),\quad -\infty < t < \infty.$$

定理 3.4 设 Λ 是 M^n 中一闭子集，在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变。且设

$$\Lambda \cap (I(S)\cup Ob(S)) = 0.$$

则存在数 $\eta_\Lambda < 0$ 及 $d_\Lambda > 0$ 使得

$\|\Psi_t(u)\| \leqslant \|u\|\exp(\eta_\Lambda t)$ 对所有 $u \in B_-(x), x\in \Lambda$ 及 $t \geqslant d_\Lambda$，

$\|\Psi_t(u)\| \geqslant \|u\|\exp(-\eta_\Lambda t)$ 对所有 $u \in B_+(x), x\in \Lambda$ 及 $t \geqslant d_\Lambda$。

设 Λ 是 M^n 中一闭子集，在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变，且设 $\Lambda\cap(I(S)\cup Ob(S)) = 0$。我们将可以看出 Λ 具有较清楚的构造模型。为此，对任一 $x\in\Lambda$，记

$$gr(x) = n - \dim B_-(x) - \dim B_+(x),$$

称为 x 的梯数。我们将有 $gr(x) \geqslant 0$，而 $gr(x) = 0$ 当且仅当 x 是 S 的一奇点 $\in \Lambda$。对于 $x\in\Lambda$，三联数组

$$(gr(x),\ \dim B_-(x),\ \dim B_+(x))$$

将称为 x 的梯型. 对任意的整数 $p\geqslant 0$，$q\geqslant 0$，$r\geqslant 0$，$p+q+r=n$，记

$$\Lambda^p_{q,r} = \{x\in\Lambda \mid x \text{ 的梯型} = (p,q,r)\},$$

$$\Lambda^p = \bigcup_{\substack{(p',q',r')\\ p'\leqslant p}} \Lambda^{p'}_{q',r'}.$$

于是 Λ 分成互不相交的诸集合 $\Lambda^p_{q,r}$ 的集合和。如通常，对于一点 $x\in M^n$，积分线 $\{\phi_t(x)\mid -\infty < t < \infty\}$ 的 ω-极限集合 Γ_x 及 α- 极限集合 Γ'_x 是指

$$\Gamma_x = \{y = \lim_{k\to\infty}\phi_{t_k}(x)\in M^n \mid t_1 < t_2 < t_3 < \cdots, \lim_{k\to\infty} t_k = \infty\}.$$

$$\Gamma'_x = \{y = \lim_{k\to\infty}\phi_{t_k}(x)\in M^n \mid t_1 > t_2 > t_3 > \cdots, \lim_{k\to\infty} t_k = -\infty\}.$$

若 $x\in\Lambda$，则 Γ_x 及 Γ'_x 显然都 $\subset\Lambda$。记 $\Omega^*(S,\Lambda)$ 为所有具有下述性质的点 $x\in\Lambda^1-\Lambda^0$ 作成的集合，即：Γ_x 及 Γ'_x 都不含有 S 的奇点。我们也将考虑 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 限制在 Λ 上时的非游荡

集 $\Omega(S,\Lambda)$.

定理 3.5 设Λ是M^n中一闭子集，在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变。且设 $\Lambda\cap(I(S)\cup Ob(S))=0$. 则

(i) 在序列

$$0=\Lambda^{-1}\subset\Lambda^0\subset\Lambda^1\subset\Lambda^2\subset\cdots\subset\Lambda^n=\Lambda$$

中，每一Λ^p都是Λ中一闭子集，每一 $\Lambda^p_{q,r}$ 在 $\Lambda^p-\Lambda^{p-1}$ 中开，且都在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变。

(ii) 对任给的一点 $x\in\Lambda^p_{q,r}$, $p>0$, 积分线 $P_x=\{\phi_t(x)\mid-\infty<t<\infty\}$的 ω-极限集合 Γ_x 包含在 $\Lambda^0_{p+q,r}$ 或 $\Lambda^1_{p+q-1,r}$ 内，按Γ_x是否含有S的奇点而定；P_x的α-极限集合Γ'_x包含在$\Lambda^0_{q,p+r}$或 $\Lambda^1_{q,p+r-1}$ 内，按Γ'_x是否含有S的奇点而定。

(iii) $\Omega^*(S,\Lambda)$ 是Λ中一闭子集，在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变，且S在 $\Omega^*(S,\Lambda)$ 上具有双曲型构造。$\Omega(S,\Lambda)$ 包含在$\Lambda^0\cup\Omega^*(S,\Lambda)$ 内，由是S在 $\Omega(S,\Lambda)$ 上也具有双曲型构造。

(iv) S的每一在Λ内的奇点x_0都有任意小的在 M^n 中的邻域V使得，当 $x\in\Lambda\cap(M^n-V)$ 时，正半轨线 $\{\phi_t(x)\mid t\in\langle0,\infty)\}$ 及负半轨线 $\{\phi_t(x)\mid t\in(-\infty,0\rangle\}$ 不能同时与V相交。

特别地，取 $\Lambda=M^n$ 并设 $I(S)\cup Ob(S)=0$. 这里(iii)给出，S在 $\Omega(S,M^n)$ 上有双曲型构造。另一方面，结合封闭引理(见[2; 6, 804页]) 及这里定理 3.1 就给出，S的周期点集合在$\Omega(S,M^n)$ 中稠密。所以，据这里定理 3.2，我们可得出结论：S在 M^n 上满足强匀断条件即蕴涵S满足公理 A.

我们还可以给出关于双曲型构造的形式较简单的等价条件，即

定理 3.6 设Λ是M^n中一闭子集，在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变，则

(i) S在Λ上具有双曲型构造当且仅当有直和分解

$$\mathscr{C}_x=F_-(x)\oplus\{S(x)\}\oplus F_+(x) \text{ 对每一 } x\in\Lambda.$$

(ii) 在Λ不含有S的奇点这情况下，S在Λ上具有双曲型构造当且仅当有直和分解

$$\mathscr{D}_x = D_-(x) \oplus D_+(x) \text{ 对每一 } x \in \Lambda.$$

§4. 槽点集合

若阻碍集 $Ob(S)$ 与 M^* 中一个在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变的闭子集 Λ 的交集为 0，单参数变换群 $\Psi_t(-\infty < t < \infty)$ 限制在 $\mathscr{D}^*$ 的子集 $\{u \in \mathscr{D}^* | \sigma(u) \in \Lambda\}$ 上时有一些对我们很有用的性质。关于这个，我们将解释在下面。

我们可考虑一较广的情况。设 E 是一紧致度量空间，其上有一单参数变换群

$$\theta_t:\ E \to E,\quad -\infty < t < \infty.$$

给定 E 上一连续实函数 $\zeta(x)$。

一点 $x_0 \in E$ 将称为 $\theta_t(-\infty < t < \infty)$ 就 $\zeta(x)$ 来说的槽点，如果

$$\int_0^t \zeta(\theta_s(x_0))ds \geqslant 0 \text{ 对所有 } t \in (-\infty, \infty).$$

记 $\check{E}$ 为 E 中所有这些槽点作成的集合，称为 $\theta_t(-\infty < t < \infty)$ 就 $\zeta(x)$ 来说的槽集。易看出 $\check{E}$ 是 E 中一闭子集。

记

$$E_- = \left\{x \in E \,\middle|\, \overline{\lim_{t\to\infty}} \int_0^t \zeta(\theta_s(x))ds < 0 \right.$$
$$\left. \text{且} \underline{\lim_{t\to-\infty}} \int_0^t \zeta(\theta_s(x))ds > 0 \right\},$$

$$E_+ = \left\{x \in E \,\middle|\, \underline{\lim_{t\to\infty}} \int_0^t \zeta(\theta_s(x))ds > 0 \right.$$
$$\left. \text{且} \overline{\lim_{t\to-\infty}} \int_0^t \zeta(\theta_s(x))ds < 0 \right\},$$

$$\widehat{E} = \left\{x \in E \,\middle|\, \overline{\lim_{t\to\infty}} \int_0^t \zeta(\theta_s(x))ds < 0 \right.$$
$$\left. \text{且} \overline{\lim_{t\to-\infty}} \int_0^t \zeta(\theta_s(x))ds < 0 \right\}.$$

定理 4.1 设Π是E中一闭子集，在 $\theta_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变，且设

$$\Pi\cap\check{E}=0.$$

则

(i) Π 分解成彼此互不相交的子集

$\Pi_-=\Pi\cap E_-$，$\Pi_+=\Pi\cap E_+$，$\widehat{\Pi}=\Pi\cap\widehat{E}$ 的集合和. Π_-，Π_+ 及$\widehat{\Pi}$ 都在 $\theta_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变.

(ii) Π_- 及 Π_+ 都是Π中的闭子集，而$\widehat{\Pi}$ 是Π中一开子集.

(iii) Π中有一闭子集 Π^* 包含在$\widehat{\Pi}$内，它作成 $\theta_t(-\infty<t<\infty)$ 在$\widehat{\Pi}$上的一截痕，即，由 $\theta^*(t,x)=\theta_t(x)$ 对 $(t,x)\in(-\infty,\infty)\times\Pi^*$ 给出一个映满 $\widehat{\Pi}$ 的拓扑变换

$$\theta^*:(-\infty,\infty)\times\Pi^*\to\widehat{\Pi}.$$

(iv) 存在常数 $\eta_\Pi^*<0$ 及 $d_\Pi^*>0$ 使得

$$\int_0^T\zeta(\theta_t(x))dt<\begin{cases}T\eta_\Pi^* & \text{对所有 } x\in\Pi_- \text{ 及 } T\geqslant d_\Pi^*,\\ -T\eta_\Pi^* & \text{对所有 } x\in\Pi_+ \text{ 及 } T\leqslant -d_\Pi^*,\end{cases}$$

$$\int_0^T\zeta(\theta_{s+t}(x))dt<\begin{cases}T\eta_\Pi^* & \text{对所有 } x\in\Pi^*,\ s\geqslant 0 \text{ 及 } T\geqslant d_\Pi^*,\\ -T\eta_\Pi^* & \text{对所有 } x\in\Pi^*,\ s\leqslant 0 \text{ 及 } T\leqslant -d_\Pi^*.\end{cases}$$

这个定理在我们工作中将显得是基本的. 事实上，要应用它到常微系统 S，我们可考虑 $\mathscr{D}^*$ 的子集

$$\tilde{\mathscr{D}}=\{u\in\mathscr{D}^*\,|\,\|u\|=1\}.$$

这是一紧致可度量空间. 因对于 $u\in\mathscr{D}^*$，$\|u\|\neq0$，我们有 $\|\Psi_t(u)\|\neq0$ 且 $\Psi_t(\lambda u)=\lambda\Psi_t(u)$ 对 t 及 $\lambda\in(-\infty,\infty)$，故对 $u\in\tilde{\mathscr{D}}$ 置 $\tilde{\Psi}_t(u)=\Psi_t(u)/\|\Psi_t(u)\|$ 即给出 $\tilde{\mathscr{D}}$ 上一单参数变换群

$$\tilde{\Psi}_t:\tilde{\mathscr{D}}\to\tilde{\mathscr{D}},\quad -\infty<t<\infty.$$

又实际上，$\|\Psi_t(u)\|$ 对 t 连续地可微，且函数

$$\tilde{\omega}(u)=\left.\frac{d\|\Psi_t(u)\|}{dt}\right|_{t=0}$$

对 $u\in\mathscr{D}^*$ 连续。于是我们可考虑 $\tilde{\Psi}_t(-\infty<t<\infty)$ 就 $\tilde{\omega}(u)$ 来说的楷集

$$Tob(S)=\left\{u\in\tilde{\mathscr{D}}\,\middle|\,\inf_{t\in(-\infty,\infty)}\int_0^t\tilde{\omega}(\tilde{\Psi}_s(u))ds=0\right\}\subset\tilde{\mathscr{D}}.$$

但从$\tilde{\Psi}_t(-\infty<t<\infty)$ 及 $\tilde{\omega}(u)$ 的定义易看出

$$\|\Psi_t(u)\|=\exp\int_0^t\tilde{\omega}(\tilde{\Psi}_s(u))ds\quad 对\ (t,u)\in(-\infty,\infty)\times\tilde{\mathscr{D}}.$$

于是 $Ob(S)=\sigma(Tob(S))$.对 M^* 中任一个在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变的闭子集,记

$$\Pi(\Lambda)=\{u\in\tilde{\mathscr{D}}\,|\,\sigma(u)\in\Lambda\}.$$

这是 $\tilde{\mathscr{D}}$ 中一闭子集，在 $\tilde{\Psi}_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变，且 $\Lambda\cap Ob(S)=0$ 当且仅当 $\Pi(\Lambda)\cap Tob(S)=0$。所以,当 $\Lambda\cap Ob(S)=0$ 时，我们可应用定理G到$\tilde{\mathscr{D}}$及其上的单参数变换群 $\tilde{\Psi}_t(-\infty<t<\infty)$ 以及函数 $\tilde{\omega}(u)$ 这情况上。这时关于 $\Pi(\Lambda)$ 与定理 4.1 叙述中相应的一些性质,在我们要得的结果的证明中,多处起要紧的作用。

参 考 文 献

[1] 廖山涛,典范方程组,数学学报,17(1974),100—109,175—196,270—295(即本书第二章).

[2] Pugh, C., The closing lemma, *Amer. J. Math.*, 89(1967), 956—1009.

[3] Robbin, J., A structural stability theorem, *Ann. of Math.*, (2), 94 (1971), 447—493.

[4] Robbin, J., Topological conjugacy and structural stability for discrete dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 78(1972), 923—952.

[5] Robinson, C., Structural stability of vector fields, *Ann. of Math.*, (2), 99(1974), 154—175.

[6] Smale, S., Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73(1967), 747—817.

[7] Smale, S., Notes on differentiable dynamical systems, Proc. Symp. Pure Math., Amer. Math. Soc., 14,1970, 277—287.

第四章　阻　碍　集(I)

我们打算在这章和第六章详细介绍一下我们关于阻碍集的一些结果．阻碍集概念首先在[2]中提出，涉及到目前深受注意的关于常微系统结构稳定性的探讨，而在这些探讨中以前只是象双曲型构造、公理A及强匀断条件这些概念起主导作用．

在这里，我们可对这些作点较概括式的进一步说明．设M^n为一n维紧致的 C^∞ Riemann 流形，$n \geqslant 2$，其上有一 C^1 常微系统 S．则 S 导出 M^n 上一 C^1 单参数变换群 ϕ_t: $M^n \to M^n(-\infty < t < \infty)$，从而导出 M^n 的切空丛 $\mathscr{C}$ 上一单参数变换群

$$\Phi_t = d\phi_t:\ \mathscr{C} \to \mathscr{C},\ -\infty < t < \infty.$$

记 $\sigma: \mathscr{C} \to M^n$ 为丛投射，$\mathscr{C}_x = \sigma^{-1}(x)$ 对 $x \in M^n$.

我们将称 S 在一点 $x \in M^n$ 处满足匀断条件，如果每一 $u \in \mathscr{C}$，可表成 $u = u_- + u_+ + \lambda_u S(x)$，其中 u_- 及 $u_+ \in \mathscr{C}_x$，$\lambda_u \in (-\infty, \infty)$，使得

$$\lim_{t\to\infty}\|\Phi_t(u_-)\| = 0, \quad \lim_{t\to-\infty}\|\Phi_t(u_+)\| = 0.$$

如果 S 在每一点 $x \in M^n$ 处都满足匀断条件，即称 S 满足强匀断条件．记M为 S 所有常点作成的集合，$\mathscr{D}$为 S 的共轭丛，这丛以M为底空间，它在一点 x 处的纤维 $\mathscr{D}_x$ 由 $\mathscr{C}_x$ 中所有与 $S(x)$ 正交的向量组成．命$\mathscr{D}^*$ 为$\mathscr{D}$在$\mathscr{C}$中的闭包．依照[2，§2]，S 也自然地在 $\mathscr{D}^*$ 上给出一单参数变换群

$$\Psi_t:\ \mathscr{D}^* \to \mathscr{D}^*,\ -\infty < t < \infty.$$

于是 S 的阻碍集 $Ob(S)$ 定义作

$$Ob(S) = \{x = \sigma(u) \in M^n \mid u \in \mathscr{D}^*,\ \|u\| = 1 = \inf_{t\in(-\infty,\infty)}\|\Psi_t(u)\|\}.$$

从变换群 Ψ_t 的连续性，$Ob(S)$ 显然是 M^n 中一闭子集．

这里叙述的强匀断条件是 Robbin ([5, 第 471 页; 6, 第 948 页])关于微拓变换一相当条件的自然推广[1](如所周知，通过扭扩的办法，微分流形上一微拓变换作为离散动力体系来考虑时，可作为常微系统的一特款)。记 $I(S)$ 为 S 所有奇点作成的集合在 M^* 中的内集。我们有，S 满足强匀断条件当且仅当 $I(S)\cup Ob(S)=0$ (原见 [2]; 本章系 4.13 将给出证明)。关于双曲型构造及公理A，见 Smale[9] 及后来许多关于常微系统结构稳定的文献，这里暂不重述。但我们想说，在阻碍集、双曲型构造、公理 A 及强匀断条件这四者中，除开前面一个至最近 [2] 中才出现外，余下三个在常微系统结构稳定性的探讨中所起的不同程度的作用，是早已为这方面工作者所熟知了的(例如 [5—8])[2]。

我们建议研究阻碍集，暂可举出下述理由:

(A) 强匀断蕴涵公理 A. 这在 [2] 中已提到过。在结构稳定理论的历史进程中，Robbin[5] 曾证明这样一个重要结果，即紧致微分流形上一 C^1 微拓变换满足公理 A 及强匀断条件蕴涵它结构稳定，但未能察觉到(迄今一般似仍都未察觉到)，其中所假设的两个条件中，后者实蕴涵前者这样一个重要事实(见本章末附记)。根据前面可看出，S 在 $x\in M^*$ 处满足匀断条件怎样依赖 x 而变化，这将是一个比较隐晦的问题，因而难以直接循此途径察觉到这事实。但我们在本章关于阻碍集的探讨的基础上，易在以后一文中给出这事实的证明。这说明阻碍集值得研究。

(B) 大范围分析常微系统理论中一个广泛的课题是，不但要研究结构稳定这一方面，也要研究非结构稳定这另一方面，包括分枝理论以及怎样产生分枝等。这后一方面的研究目前虽已有开端(例如 [4])，但一 C^1 系统 x 是否满足强匀断条件或公理 A 等如何

---

1) 一几何式的条件最早为 Smale 提出，后在 [5, 第 471 页] 中修改成线性化的形式(即本文所采用的形式，见 [2, §1])。

2) 如同 [2, §1] 中曾经提到过的一样，在这三者中，只有强匀断条件以前比较起来尚少注意，只处于辅助地位，更没有独立地处理过。

依赖 x 而变化仍是一个比较隐晦的问题，不若采用阻碍集(及其可能的推广)的办法，因为这些是 M^n 中的闭子集，是几何实体，由是有可能提供一较有效的途径和一个较统一的观点．但自然，这只是一长远设想，具体内容的讨论将远远不在本章范围以内．

作为这样研究的一个起点，我们自然先考虑一极端情况，即 $I(S)\cup Ob(S)=0$，但在本章中，我们将较广地讨论 M^n 中任一个闭子集 A，它在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变，且满足 $A\cap(I(S)\cup Ob(S))=0$．为简便，M^n 中这样一个闭子集将称为 S 的一正常集．我们于是从阻碍集出发系统地讨论一正常集 A 的线性性质，即 Φ_t 限制在部分丛 $\mathscr{C}|A$ 上时本身所具有的一些性质（A 的一些非线性性质，比如小扰动性质，将出现在以后的文章中)．这里，我们称之为线性性质，因为切丛 $\mathscr{C}$ 上的变换群 $\Phi_t:\mathscr{C}\to\mathscr{C}(-\infty<t<\infty)$ 是流形 M^n 上的变换群 $\phi_t:M^n\to M^n(-\infty<t<\infty)$ 的整体线性化．这样的性质值得讨论．一个简单例子，即有名的通常所指的 Anosov 系统可由此看出，有较简单的等价条件(见 §5，系 5.11)．

最后，我们想说，本文内容的提纲式报导已见 [2] 中．两者凑合起来看将是方便的，因为 [2] 中的叙述虽然简要，但有些叙述证明起来太长，本章中不得不拆开来证．这样，[2] 中的定理 B, D, E, F, G[1] 的证明分别见本章的 §4，§§4 及 2，§5，§5，§1 中．但 [2] 中的定理 A[1] 及强匀断蕴涵公理 A 这个叙述的证明将在以后的文章中给出(参见本章末附记)．本章 §1 关于槽集的讨论是以后进一步讨论的一个基础．

§1. 槽点集合

我们将考虑一紧致度量空间 E 及其上的一单参数变换群

$$\theta_t:\ E\to E,\ -\infty<t<\infty,$$

1) [2] 中的定理 A，B，C，D，E，F 和 G 分别是本书第三章的定理 3.1，3.2，3.3，3.4，3.5，3.6 和 4.1．——编者注

并给定 E 上一连续函数 $\zeta(x)$。

一点 $x_0\in E$ 将称为 $\theta_t(-\infty<t<\infty)$ 就 $\zeta(x)$ 来说的槽点，如果

$$\int_0^t \zeta(\theta_s(x_0))ds \geqslant 0 \text{ 对所有 } t\in(-\infty,\infty).$$

记 $\check{E}$ 为 E 中所有这些槽点作成的集合，称为 $\theta_t(-\infty<t<\infty)$ 就 $\zeta(x)$ 来说的槽集。据 $\theta_t(-\infty<t<\infty)$ 及 $\zeta(x)$ 的连续性，这是 E 中一闭子集。

我们先给几个引理。

引理 1.1 设 Π 是 E 中一闭子集在 $\theta_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变。设 Π 中有一序列 $\{x_k\}$ 具有性质

$$\int_0^t \zeta(\theta_s(x_k))ds \geqslant \delta_0 \text{ 对所有 } t\in\langle s_{k-}, s_{k+}\rangle,$$

其中 δ_0 及 s_{k-} 及 s_{k+} 给定 $\in(-\infty,\infty)$，且设

$$\lim_{k\to\infty} s_{k-}=-\infty,\quad \lim_{k\to\infty} s_{k+}=\infty.$$

则 $\Pi\cap\check{E}\neq 0$。

证 因 Π 是紧致度量空间 E 中一闭子集，故 $\{x_k\}$ 有子序列收敛到一点 $x_0\in\Pi$。于是据引理假设以及 $\theta_t(-\infty<t<\infty)$ 及 $\zeta(x)$ 的连续性，我们有

$$\int_0^t \zeta(\theta_s(x_0))ds \geqslant \delta_0 \text{ 对所有 } t\in(-\infty,\infty).$$

命

$$\delta_1=\inf_{t\in(-\infty,\infty)}\int_0^t \zeta(\theta_s(x_0))ds,$$

显然 $-\infty<\delta_1<\infty$。

对每个 $k=1,2,3,\cdots$，可取 t_k 使

$$\int_0^{t_k} \zeta(\theta_s(x_0))ds \leqslant \delta_1+\frac{1}{k}.$$

命 $\bar{x}_k=\theta_{t_k}(x_0)$。因 Π 在 $\theta_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变，$\bar{x}_k$ 仍 $\in\Pi$。又

$$\int_0^t \zeta(\theta_s(\bar{x}_k))ds = \int_{t_k}^{t_k+t} \zeta(\theta_s(x_0))ds$$
$$= \int_0^{t_k+t} \zeta(\theta_s(x_0))ds - \int_0^{t_k} \zeta(\theta_s(x_0))ds \geqslant -\frac{1}{k}$$

对所有 $t\in(-\infty,\infty)$. 据Π的紧致性，$\{\bar{x}_k\}$ 有子序列收敛到一点 $\bar{x}_0\in\Pi$. 于是再据 $\theta_t(-\infty<t<\infty)$ 及 $\zeta(x)$ 的连续性，我们就有

$$\int_0^t \zeta(\theta_s(\bar{x}_0))ds \geqslant 0 \text{ 对所有 } t\in(-\infty,\infty).$$

故 $\Pi\cap\check{E}\neq 0$. 证完.

引理 1.2 设Π是E中一闭子集，在 $\theta_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变. 设Π中有一序列 $\{x_k\}$ 具有性质

$$\int_0^{s_{k-}} \zeta(\theta_s(x_k))ds \geqslant \delta_0,\quad \int_0^{s_{k+}} \zeta(\theta_s(x_k))ds \geqslant \delta_0,$$

其中 δ_0, s_{k-} 及 $s_{k+}\in(-\infty,\infty)$ 给定，且设

$$\lim_{k\to\infty} s_{k-} = -\infty,\quad \lim_{k\to\infty} s_{k+} = \infty.$$

则 $\Pi\cap\check{E}\neq 0$.

证 我们将重新取Π中一序列的点，并得出满足引理 1.1 中要求的不等式. 在这里，显然可设 $s_{k-}\leqslant 0\leqslant s_{k+}$ 对 $k=1, 2, 3, \cdots$.

对每个 $k=1, 2, 3, \cdots$, 考虑函数

$$g_k(t) = \int_0^t \zeta(\theta_s(x_k))ds,\quad t\in\langle s_{k-}, s_{k+}\rangle.$$

我们将用下面的一些记号：由于 $g_k(t)$ 在 $\langle s_{k-},s_{k+}\rangle$ 上连续，我们可取 $p_{k-}\in\langle s_{k-},0\rangle$, $p_{k+}\in\langle 0, s_{k+}\rangle$, $q_{k-}\in\langle p_{k-}, 0\rangle$, $q_{k+}\in\langle 0, p_{k+}\rangle$ 及 $r_k\in\langle q_{k-},q_{k+}\rangle$ 使

$$g_k(p_{k-}) = \inf_{t\in\langle s_{k-},0\rangle} g_k(t),\quad g_k(p_{k+}) = \inf_{t\in\langle 0,s_{k+}\rangle} g_k(t),$$
$$g_k(q_{k-}) = \sup_{t\in\langle p_{k-},0\rangle} g_k(t),\quad g_k(q_{k+}) = \sup_{t\in\langle 0,p_{k+}\rangle} g_k(t),$$
$$g_k(r_k) = \inf_{t\in\langle q_{k-},q_{k+}\rangle} g_k(t).$$

明显地，$g_k(p_{k-}) \leqslant 0 = g_k(0) \leqslant g_k(s_{k-}) - \delta_0$，$g_k(p_{k+}) \leqslant 0 \leqslant g_k(s_{k+}) - \delta_0$，$g_k(r_k) \leqslant 0$. 又记

$$l_- = \inf_{k=1,2,3,\cdots} g_k(p_{k-}),\quad l_+ = \inf_{k=1,2,3,\cdots} g_k(p_{k+}).$$

对于我们的目的来说，(如必须，可适当取子序列)不妨设有

$$m_- = \lim_{k\to\infty} g_k(q_{k-}),\quad m_+ = \lim_{k\to\infty} g_k(q_{k+}).$$

由于 $\zeta(x)$ 在紧致空间 E 上连续，我们有

$$\sup_{x\in E} |\zeta(x)| = \kappa < \infty.$$

下面，我们就几个不同情况来考虑.

(i_0) $l_- = -\infty$ 或 $l_+ = -\infty$. 先设 $l_- = -\infty$. 命 $y_k = \theta_{p_{k-}}(x_k)$. 因 Π 在 $\theta_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变，$y_k \in \Pi$. 又

$$\int_0^t \zeta(\theta_s(y_k))ds = \int_{p_{k-}}^{p_{k-}+t} \zeta(\theta_s(x_k))ds$$
$$= g_k(p_{k-}+t) - g_k(p_{k-}) \geqslant 0 \text{ 对 } t \in \langle t_{k-}, t_{k+}\rangle,$$

其中 $t_{k-} = s_{k-} - p_{k-}$，$t_{k+} = -p_{k-}$. 由是

$$-\kappa t_{k-} \geqslant \int_0^{t_{k-}} \zeta(\theta_s(y_k))ds = g_k(s_{k-}) - g_k(p_{k-})$$
$$\geqslant \delta_0 - g_k(p_{k-}),$$

且

$$\kappa t_{k+} \geqslant \int_0^{t_{k+}} |\zeta(\theta_s(y_k))|ds \geqslant -g_k(p_{k-}).$$

但 $l_- = -\infty$. 故 $\{k\}$ 中有子序列 $\{k_j\}$ 使 $\lim\limits_{j\to\infty} t_{k_j-} = -\infty$，$\lim\limits_{j\to\infty} t_{k_j+} = \infty$. 于是我们可应用引理 1.1 到序列$\{y_{k_j}\}$得出 $\Pi \cap \check{E} \neq 0$. 在 $l_+ = -\infty$ 情况下，我们可类似地验证这同样结论成立.

(ii_0) $m_- = \infty = m_+$. 在这情况下，我们也可用与上面相类似的办法得到 $\Pi \cap \check{E} \neq 0$ (这时我们取 $y_k = \theta_{r_k}(x_k)$，$t_{k-} = q_{k-} - r_k$，$t_{k+} = q_{k+} - r_k$).

(iii_0) m_- 及 m_+ 中至少有一个 $=\infty$，且 $\{k\}$ 有子序列 $\{k_j\}$ 使得或 $p_{k_j-} \geqslant \frac{1}{2} s_{k_j-}$ $(j = 1, 2, 3, \cdots)$，或 $p_{k_j+} \leqslant \frac{1}{2} s_{k_j+}$ $(j = 1,2,3,\cdots)$. 在这情况下我们仍可应用引理 1.1 得出 $\Pi \cap$

$\check{E} \neq 0$。例如，设 $p_{kj-} \geqslant \frac{1}{2} s_{kj-}$ $(j=1, 2, 3, \cdots)$。如果 $m_- = \infty$，我们可考虑序列 $\{\theta_{p_{k-}}(x_k)\}$，$\{s_{k-} - p_{k-}\}$，$\{q_{k-} - p_{k-}\}$ 的子序列。如果 $m_+ = \infty$，命 $p'_k \in \langle p_{k-}, q_{k+}\rangle$ 使 $g_k(t)$ 在这区间上于 p'_k 处取极小值，于是可考虑$\{\theta_{p'_k}(x_k)\}$，$\{s_{k-} - p'_k\}$，$\{q_{k+} - p'_k\}$ 的子序列。

(iv$_0$) $\{k\}$ 有子序列$\{k_j\}$ 使 $p_{kj-} \geqslant \frac{1}{2} s_{kj-}$ 且 $p_{kj+} \leqslant \frac{1}{2} s_{kj+}$，$j = 1, 2, 3, \cdots$。在这情况下仍可如上得出 $\Pi \cap \check{E} \neq 0$，只须取 p_k 为 p_{k-} 及 p_{k+} 中的一个使 $g(p_k) = \min\{g(p_{k-}), g(p_{k+})\}$ 并考虑 $\{\theta_{p_k}(x_k)\}$，$\{s_{k-} - p_k\}$，$\{s_{k+} - p_k\}$ 的子序列。

(v$_0$) 现在，要完成引理的证明，只需证：在 $-\infty < l_- \leqslant m_- < \infty$ 且 $\{k\}$ 有子序列 $\{k_j\}$ 使 $p_{kj-} \leqslant \frac{1}{2} s_{kj-}$，或在$-\infty < l_+ \leqslant m_+ < \infty$ 且 $\{k\}$ 有子序列 $\{k'_j\}$ 使 $p_{k'_j+} \geqslant \frac{1}{2} s_{k'_j+}$ 这两种情况下都有 $\Pi \cap \check{E} \neq 0$。我们可考虑这里前一情况（后一情况可类似处理）。不失一般性，可设 $\{k_j\}$ 即为 $\{k\}$。命 $y_k = \theta_{\frac{1}{4}s_{k-}}(x_k)$。于是

$$\int_0^t \zeta(\theta_s(y_k))ds = \int_0^{t+\frac{1}{4}s_{k-}} \zeta(\theta_s(x_k))ds - \int_0^{\frac{1}{4}s_{k-}} \zeta(\theta_s(x_k))ds$$
$$\geqslant l_- - g_k(q_{k-}) \text{ 对于 } \frac{1}{4} s_{k-} \leqslant t \leqslant -\frac{1}{4} s_{k-}.$$

但 $\lim\limits_{k\to\infty} s_{k-} = -\infty$ 且 $\lim\limits_{k\to\infty} g_k(q_{k-}) = m_-$。所以仍据引理 1.1 有 $\Pi \cap \check{E} \neq 0$。引理 1.2 证完。

从引理 1.2 显然有

引理 1.3 设Π是E中一闭子集，在 $\theta_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变，且设

$$\Pi \cap \check{E} = 0.$$

则对任给的 $\delta \in (-\infty, \infty)$，存在一对应的数 $T_\delta > 0$ 使得对任意的 $x \in \Pi$，$T_- \leqslant -T_\delta$ 及 $T_+ \geqslant T_\delta$ 都不能同时有

$$\int_0^{T_-} \zeta(\theta_s(x))ds \geqslant \delta \text{ 及 } \int_0^{T_+} \zeta(\theta_s(x))ds \geqslant \delta.$$

现在，记

$$E_- = \left\{ x \in E \,\middle|\, \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t}\int_0^t \zeta(\theta_s(x))ds < 0 \text{ 且 } \right.$$

$$\left. \overline{\lim_{t\to-\infty}} \frac{1}{t}\int_0^t \zeta(\theta_s(x))ds < 0 \right\},$$

$$E_+ = \left\{ x \in E \,\middle|\, \underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t}\int_0^t \zeta(\theta_s(x))ds > 0 \text{ 且 } \right.$$

$$\left. \underline{\lim_{t\to-\infty}} \frac{1}{t}\int_0^t \zeta(\theta_s(x))ds > 0 \right\},$$

$$\widehat{E} = \left\{ x \in E \,\middle|\, \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t}\int_0^t \zeta(\theta_s(x))ds < 0 \text{ 且 } \right.$$

$$\left. \underline{\lim_{t\to-\infty}} \frac{1}{t}\int_0^t \zeta(\theta_s(x))ds > 0 \right\},$$

$$\hat{E} = \left\{ x \in E \,\middle|\, \int_0^t \zeta(\theta_s(x))ds \leqslant 0 \text{ 对所有 } t \in (-\infty, \infty) \right\}^{1)}.$$

定理 1.4 设Π是E中一闭子集，在 $\theta_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变，且设

$$\Pi \cap \check{E} = 0.$$

则

(i) Π分解成彼此互不相交且都在 $\theta_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变的子集

$$\Pi \cap E_-,\ \Pi \cap E_+,\ \Pi \cap \widehat{E}$$

的集合和[2]。

---

1) 对偶地说，$\hat{E}$ 是 $\theta_t(-\infty<t<\infty)$ 就函数 $-\zeta(x)$ 来说的槽集.

2) 根据这结论 (i)，易看出这里的集合 $\Pi\cap E_-$，$\Pi\cap E_+$ 与 $\Pi\cap\widehat{E}$ 与 [2，定理 G] 中所指的一致，虽然这里的 E_-，E_+，$\widehat{E}$ 与彼处所定义的一般不一定相同. 事实上，若记

$$E_-^0 = \left\{ x \in E \,\middle|\, \overline{\lim_{t\to\infty}} \int_0^t \zeta(\theta_s(x))ds < 0 \text{ 且 } \underline{\lim_{t\to-\infty}} \int_0^t \zeta(\theta_s(x))ds > 0 \right\},$$

$$E_+^0 = \left\{ x \in E \,\middle|\, \underline{\lim_{t\to\infty}} \int_0^t \zeta(\theta_s(x))ds > 0 \text{ 且 } \overline{\lim_{t\to-\infty}} \int_0^t \zeta(\theta_s(x))ds < 0 \right\},$$

$$\widehat{E}^0 = \left\{ x \in E \,\middle|\, \overline{\lim_{t\to\infty}} \int_0^t \zeta(\theta_s(x))ds < 0 \text{ 且 } \overline{\lim_{t\to-\infty}} \int_0^t \zeta(\theta_s(x))ds < 0 \right\}$$

(右端的集合正是 [2，§4] 中所考虑的)，易看出 $E_-\subset E_-^0$，$E_+\subset E_+^0$，$\widehat{E}\subset\widehat{E}^0$. 由是从这里 (i) 可得 $\Pi = \Pi\cap(E_-\cup E_+\cup\widehat{E})\subset\Pi\cap(E_-^0\cup E_+^0\cup\widehat{E}^0)\subset\Pi$. 又 E_-^0，E_+^0 与 $\widehat{E}^0$ 彼此互不相交. 故必有

$$\Pi\cap E_- = \Pi\cap E_-^0, \Pi\cap E_+ = \Pi\cap E_+^0, \ \Pi\cap\widehat{E} = \Pi\cap\widehat{E}^0.$$

(ii) $\Pi\cap E_-$ 及 $\Pi\cap E_+$ 都是Π中的闭子集，$\Pi\cap\widehat{E}$ 是Π中的开子集。

(iii) $\Pi\cap\hat{E}$ 是Π中一闭子集，包含在 $\Pi\cap\widehat{E}$ 内，且每一包含在 $\Pi\cap\widehat{E}$ 内的轨线 $\{\theta_t(x)\,|\,t\in(-\infty,\ \infty)\}$ 都必须与 $\Pi\cap\hat{E}$ 相交，其交集在Π中闭。

(iv) 存在常数 $\hat{\varepsilon}_\Pi<0$ 及 $\hat{T}_\Pi>0$ 使得

$$\int_0^T\zeta(\theta_t(x))dt<\hat{\varepsilon}_\Pi \text{ 对所有 } x\in\Pi\cap E_- \text{ 及 } T\geqslant\hat{T}_\Pi, \tag{1.1}$$

$$\int_0^T\zeta(\theta_t(x))dt>-\hat{\varepsilon}_\Pi \text{ 对所有 } x\in\Pi\cap E_+ \text{ 及 } T\geqslant\hat{T}_\Pi, \tag{1.2}$$

$$\int_0^T\zeta(\theta_{s+t}(x))dt<\hat{\varepsilon}_\Pi \text{ 对所有 } x\in\Pi\cap\hat{E} \text{ 及 } (s,T)\in\langle 0,\infty)\times\langle\hat{T}_\Pi,\infty)\cup(-\infty,0\rangle\times(-\infty,-\hat{T}_\Pi\rangle. \tag{1.3}$$

证 任给一数$\delta<0$。命 T_δ 给出同引理 1.3 中。于是对任一 $x\in\Pi$，我们不能同时有这样的两个不等式，即

$$\int_0^{-T_\delta}\zeta(\theta_s(x))ds\geqslant\delta \text{ 及 } \int_0^{T_\delta}\zeta(\theta_s(x))ds\geqslant\delta.$$

任给 $\bar{x}\in\Pi$，考虑下面的双侧数序列

$$\cdots,\ \xi_{-2}(\bar{x}),\ \xi_{-1}(\bar{x}),\ \xi_0(\bar{x}),\ \xi_1(\bar{x}),\ \xi_2(\bar{x}),\ \cdots, \tag{1.4}$$

其中

$$\begin{aligned}\xi_k(\bar{x})&=\int_{(k-1)T_\delta}^{kT_\delta}\zeta(\theta_s(\bar{x}))ds\\&=\int_0^{T_\delta}\zeta(\theta_s(\theta_{(k-1)T_\delta}(\bar{x}))ds\\&=-\int_0^{-T_\delta}\zeta(\theta_s(\theta_{kT_\delta}(\bar{x})))ds.\end{aligned}$$

于是，若在(1.4)中有某一 $\xi_{k_1}(\bar{x})\leqslant-\delta$，即

$$\int_0^{-T_\delta}\zeta(\theta_s(\theta_{k_1T_\delta}(\bar{x})))ds\geqslant\delta,$$

则必有 $\xi_{k_1+1}(\bar{x}) < \delta < -\delta$。同样可看出在(1.4)中，若有某一 $\xi_{k_2}(\bar{x}) \geqslant \delta$，则 $\xi_{k_2-1}(\bar{x}) > -\delta > \delta$。所以对于 $\bar{x}$，只有下述三种情况可能发生，即

(I_+) $\xi_k(\bar{x}) > -\delta$ 对 $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots$，

(I_-) $\xi_k(\bar{x}) < \delta$ 对 $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots$，

$(\widehat{I})$ 存在一 k_0 使得 $\xi_{k_0}(\bar{x}) \geqslant \delta$，且 $\xi_k(\bar{x}) < \delta$ 对所有 $k > k_0$，$\xi_k(\bar{x}) > -\delta$ 对所有 $k < k_0$。

但 $\zeta(x)$ 在 E 上有界 $(\sup\limits_{x \in E} |\zeta(x)| < \infty)$。于是结合 (I_+)，(I_-) 及 $(\widehat{I})$ 我们就看出，Π 中任一点 $x \in E_+$，E_- 或 $\widehat{E}$ 按 x 满足 (I_+)，(I_-) 或 $(\widehat{I})$ 而定。这给出 $\Pi = \Pi \cap (E_- \cup E_+ \cup \widehat{E})$，从 E_-，E_+ 及 $\widehat{E}$ 的定义易看出 $\Pi \cap E_-$，$\Pi \cap E_+$ 及 $\Pi \cap \widehat{E}$ 彼此不相交且都在 $\theta_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变。这给出 (i)。据变换群 $\theta_t(-\infty < t < \infty)$ 的连续性及 $x \in \Pi \cap E_+$ 的特征性质 (I_+) 即看出 $\Pi \cap E_+$ 在 Π 中闭。同样可看出 $\Pi \cap E_-$ 在 Π 中闭，因而 $\Pi \cap \widehat{E}$ 在 Π 中开。这给出 (ii)。

$\hat{E}$ 从定义显然是 E 中一闭子集，因而 $\Pi \cap \hat{E}$ 在 Π 中闭。据 (I_+) 及 (I_-)，$\Pi \cap \hat{E} \cap (E_- \cup E_+) = 0$，因而 $\Pi \cap \hat{E} \subset \Pi \cap \widehat{E}$。若 $x \in \Pi \cap \widehat{E}$，则据 $(\widehat{I})$，对于 $(-\infty, \infty)$ 上的连续函数

$$g(t) = \int_0^t \zeta(\theta_s(x))ds,$$

我们有 $\lim\limits_{t \to \infty} g(t) = -\infty = \lim\limits_{t \to -\infty} g(t)$；由是 $g(x)$ 必在一 $t = t_0$ 处取极大值，即 $\theta_{t_0}(x) \in \hat{E}$。

若 $x \in \Pi \cap \hat{E} (\subset \Pi \cap \widehat{E})$，则据 $(\widehat{I})$ 显然有 $\xi_k(x) < \delta$ 对 $k \geqslant 2$，且 $> -\delta$ 对 $k \leqslant -2$。所以据 $\zeta(x)$ 在 E 上的有界性我们可取一 $\hat{T}_\Pi \geqslant T_\delta$ 使(1.3)成立对于 $\varepsilon_\Pi = \delta/2$。借助于 (I_+) 及 (I_-)，显然 $\hat{T}_\Pi$ 还可如是取，使得(1.1)及(1.2)也都对于这 ε_Π 成立。若 $x \in \Pi \cap \hat{E}$，则据(1.3)，轨线 $\{\theta_t(x) | t \in (-\infty, \infty)\}$ 与

$\hat{E}$ 的交集必$\subset$轨弧 $\{\theta_t(x) \mid t \in \langle -\hat{T}_\Pi, \hat{T}_\Pi \rangle\}$；于是因 $\hat{E}$ 在 E 中闭，这交集在 Π 中闭．定理证完．

系 1.5 设 Π 是 E 中一闭子集，在 $\theta_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变，又设

$$\Pi \cap \check{E} = 0.$$

命 $\hat{T}_\Pi$ 同上定理中，则 x_1 及 $\phi_t(x_1)$ 都 $\in \Pi \cap \hat{E}$ 蕴涵 $|t| < \hat{T}_\Pi$；特别地，$\Pi \cap \widehat{E}$ 不含有 $\theta_t(-\infty < t < \infty)$ 的休止点和周期轨道．

证 直接用(1.3)式可看出这系的前半结论成立．$\Pi \cap \widehat{E}$ 不能含有 $\theta_t(-\infty < t < \infty)$ 的周期轨道（也不含有休止点），因为否则这轨道上必有点 $x_0 \in \Pi \cap \hat{E}$（据定理 1.4-(iii)），且可取数 $s > \hat{T}_\Pi$ 使 $\phi_s(x_0) = x_0$，但这与前半结论矛盾．证完．

对 E（它是紧致度量空间）中的任意子集 A 及 B，记 $\nu(A, B)$ 为所有使 $U(A, \varepsilon) \supset B$ 的 ε 构成的实数集的下确界，其中 $U(A, \varepsilon)$ 表 A 的 ε- 邻域 $(\varepsilon > 0)$．

命题 1.6 设 Π 是 E 中一闭子集，在 $\theta_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变，且设

$$\Pi \cap \check{E} = 0.$$

则 $\Pi \cap \widehat{E}$ 中任一轨线 $\{\theta_t(x) \mid t \in (-\infty, \infty)\}$ 的 ω- 极限集合包含在 E_- 内，而它的 α- 极限集合包含在 E_+ 内．另外，若 F 是 Π 中一闭子集使 $F \cap E_+ = 0$，则

$$\lim_{t \to \infty} \nu(\Pi \cap E_-, \theta_t(F)) = 0; \tag{1.5}$$

若 F 是 Π 中一闭子集使 $F \cap E_- = 0$，则

$$\lim_{t \to -\infty} \nu(\Pi \cap E_+, \theta_t(F)) = 0. \tag{1.6}$$

证 据定理 1.4-(iii) 及 (iv)，$\Pi \cap \widehat{E}$ 中一轨线 $\{\phi_t(x) \mid t \in (-\infty, \infty)\}$ 至少与 $\hat{E}$ 相交于一点 $x' = \theta_t(x)$，且对于这点 x'，(1.3) 成立，所以，若 $\bar{x}$ 是这轨线的一 ω- 极限点，则据 $\theta_t(-\infty < t < \infty)$ 及 $\zeta(x)$ 的连续性，必有

$$\int_0^T \zeta(\theta_{s+t}(\bar{x}))dt \leqslant \hat{\varepsilon}_\Pi \text{ 对所有 } s\in(-\infty,\infty) \text{ 及 } T \geqslant \hat{T}_\Pi.$$

于是仍据定理 1.4-(i) 及 (iv)，$\bar{x}$ 必 $\in \Pi\cap E_-$。

设 F 是 Π 中一闭子集使 $F\cap E_+ = 0$。在 E 中任取 $\Pi\cap E_-$ 的一 ε- 邻域 $U(\Pi\cap E_-, E)$。我们说，存在 $T_\varepsilon > 0$ 使得

$$\theta_t(F)\subset U(\Pi\cap E_-,\varepsilon) \text{ 对 } t > T_\varepsilon.$$

事实上，设相反地，对每一 $k = 1, 2, 3, \cdots$，存在点 $x_k\in F$ 及 $t_k > k$ 使

$$\theta_{t_k}(x_k)\in \Pi - U(\Pi\cap E_-,\varepsilon).$$

因 F 及 Π 紧致，不妨设 $\{x_k\}$ 及 $\{\theta_{t_k}(x_k)\}$ 都是收敛序列，分别收敛到

$$x_0\in F \text{ 及 } x_0'\in \Pi - U(\Pi\cap E_-,\varepsilon).$$

据定理 1.4-(iii)，对每一 k 都有 $s_k\in(-\infty, \infty)$ 使 $\theta_{s_k}(x_k)\in \Pi\cap \hat{E}$。但序列 $\{s_k\}$ 有上界 $<\infty$，因为，否则从 $\theta_t(-\infty<t<\infty)$ 及 $\zeta(x)$ 的连续性并据定理 1.4-(i) 及 (iv)，我们易看出

$$\int_0^T \zeta(\theta_{s+t}(x_0))dt \geqslant -\hat{\varepsilon}_\Pi \text{ 对所有 } s\in(-\infty,\infty) \text{ 及 } T \geqslant \hat{T}_\Pi,$$

从而 $x_0\in E_+$，与所设 $F\cap E_+ = 0$ 矛盾．但 $t_k > k$．所以仍据 $\theta_t(-\infty<t<\infty)$及$\zeta(x)$ 的连续性并用定理 1.4-(i) 及 (iv)，我们也可类似地看出 $x_0'\in \Pi\cap E_-$。但这又与 x_0' 不 $\in U(\Pi\cap E_-, \varepsilon)$ 矛盾．这证明我们的断语．从这断语即得出(1.5)．命题中余下部分可类似地证．

系 1.7 设 Π 是 E 中一闭子集，在 $\theta_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变，且设

$$\Pi\cap\check{E} = 0.$$

则 $\theta_t(-\infty<t<\infty)$ 限制在 Π 上时的非游荡集 $\subset\Pi\cap(E_-\cup E_+)$。

证 设 $\bar{x}\in\Pi$ 是这样一非游荡点。则 Π 中有序列 $\{x_k\}$ 及一数序列 $\{t_k\}$ 满足要求

$$\lim_{k\to\infty}x_k = \bar{x} = \lim_{k\to\infty}\theta_{t_k}(x_k), \quad \lim_{k\to\infty}t_k = \infty.$$

但如果 $\bar{x}\in\Pi\cap\widehat{E}$，则因 $\Pi\cap\widehat{E}$ 在Π中开，不妨设 $x_k\in\Pi\cap\widehat{E}$，$k=1,2,3,\cdots$，由是这些 x_k 及 $\bar{x}$ 构成Π中一闭子集 $\subset\Pi\cap\widehat{E}$。从命题 1.6 易看出，若 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=\bar{x}$ 且 $\lim\limits_{k\to\infty}t_k=\infty$，则不能有 $\lim\limits_{k\to\infty}\theta_{t_k}(x_k)=\bar{x}$。这给出系 1.7。

定理 1.4 结论 (iii) 中说，每一包含在 $\Pi\cap\widehat{E}$ 内的轨线 $\{\theta_t(x)\mid t\in(-\infty,\infty)\}$ 都与 $\Pi\cap\hat{E}$ 相交。但自然可能有许多交点。下面定理简化这个事实。

定理 1.8 设Π是E中一闭子集，在 $\theta_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变，又设

$$\Pi\cap\check{E}=0.$$

则Π中有一闭子集 Π^* 包含在$\widehat{E}$内，它作成 $\theta_t(-\infty<t<\infty)$ 在 $\Pi\cap\widehat{E}$ 上的一截痕，即：每一包含在 $\Pi\cap\widehat{E}$ 内的轨线 $\{\theta_t(x)\mid t\in(-\infty,\infty)\}$ 都与 Π^* 恰相交于一点，且由 $\theta_*(t,x)=\theta_t(x)$，$(t,x)\in(-\infty,\infty)\times\Pi^*$，给出一拓扑变换

$$\theta_*:(-\infty,\infty)\times\Pi^*\to\Pi\cap\widehat{E}.$$

证 对任一 $x\in\Pi\cap\widehat{E}$，记 $\hat{E}_x=\hat{E}\cap\{\theta_t(x)\mid t\in(-\infty,\infty)\}$。

我们说，对每一 $x\in\Pi\cap\hat{E}$ 可取Π的一闭子集 F_x 满足下述要求 (i_0)—(iii_0)：

(i_0) F_x 包含 x 且包含在 $\Pi\cap\widehat{E}$ 内；

(ii_0) 每一与 F_x 相交的轨线 $\{\theta_t(y)\mid t\in(-\infty,\infty)\}$ 与 F_x 恰只相交于一点；

(iii_0) 记 $C_x=\bigcup\limits_{y\in F_x}\hat{E}_y$，$I_x$ 为 C_x 相对于 $\Pi\cap\hat{E}$ 来说的内集，则 $\hat{E}_x$ 包含在 I_x 内。

事实上，因 $\Pi\cap\hat{E}$ 紧致，$\subset\Pi\cap\widehat{E}$，且 $\Pi\cap\widehat{E}$ 是Π的开子集，不含有 $\theta_t(-\infty<t<\infty)$ 的休止点和周期轨道，故据[3，第五章，§2]中的论述，可取Π中一闭子集 F_x 满足 (i_0) 且是一管状集

$$\{\theta_t(y)\mid t\in\langle-T_x,\ T_x\rangle,\ y\in\overline{U}(x,\ \delta)\}$$

的截痕对某数 $T_x > 0$，其中 $\bar{U}(x, \delta)$ 表 x 在 Π 中的一 δ-邻域 $U(x,\delta)$ 的闭包，$\delta > 0$；进一步，从 $\theta_t(-\infty < t < \infty)$ 的连续性并应用命题 1.6，我们可设 δ 如此小使得 (ii$_0$) 成立。又 $\hat{E}_x$ 包含在 Π 的开子集

$$\{\theta_t(y) \mid t \in (-\infty, \infty),\ y \in U(x, \delta)\}$$

内，而后者与 $\hat{E}$ 的交集，据截痕的性质(见 [3，第五章，§2])，又包含在 C_x 内。故 (iii$_0$) 也成立。

对任给的一 $x \in \Pi \cap \hat{E}$，记 $A_x = \{\theta_t(y) \mid t \in (-\infty,\infty),\ y \in F_x\}$。于是据 (ii$_0$) 及系 1.5，对每一 $y \in A_x$，恰有唯一的 $\bar{t}(x, y) \in (-\infty,\infty)$ 使

$$\theta_{\bar{t}(x,y)}(y) \in F_x.$$

我们说 $\bar{t}(x,y)$ 对 $y \in A_x$ 连续。事实上，若 $\{y_k\}$ 是 A_x 中一序列收敛到一点 $y_0 \in A_x$，则这些 y_k 及 y_0 构成 Π 中一闭子集 F 使 $F \cap (E_- \cup E_+) = 0$。又 F_x 是 Π 中一闭子集，它与 $E_- \cup E_+$ 的距离 > 0。所以应用命题 1.6 中的极限式 (1.5) 及 (1.6) 我们可看出 $\{\bar{t}(x,y_k)\}$ 是一有界序列。于是从 $\theta_t(-\infty < t < \infty)$ 的连续性，F_x 的紧致性以及 (ii$_0$)，必有 $\lim\limits_{k\to\infty} \bar{t}(x,y_k) = \bar{t}(x,y_0)$。这证明 $\bar{t}(x,y)$ 对 $y \in A_x$ 的连续性。进一步，若置

$$f_x(y) = \theta_{\bar{t}(x,y)}(y) \in F_x,$$

则 $f_x(y)$ 对 $y \in A_x$ 连续。类似论据也给出，A_x 是 $\Pi \cap \widehat{E}$ 中一闭子集。

但 $C_x = A_x \cap (\Pi \cap \hat{E})$ 对 $x \in \Pi \cap \hat{E}$，而 $\Pi \cap \hat{E} \subset \Pi \cap \widehat{E}$。故从 $\Pi \cap \hat{E}$ 的紧致性，C_x 也紧致。于是从 f_x 的连续性及 (iii$_0$)，我们可取 F_x 中一包含 x 的子集 G_x，它在 F_x 中开，且使得

$$I_x \supset \text{集合 } D_x = \bigcup_{y \in G_x} \hat{E}_y.$$

易看出 D_x 是 $\Pi \cap \hat{E}$ 中一开子集 $\supset \hat{E}_x$。进一步用与上段相类似的论据还可看出，集合

$$\{\theta_t(y) \mid t \in (-\infty,\infty),\ y \in \Pi \cap \hat{E} - D_x\}$$

也在 $\Pi\cap\widehat{E}$ 中闭，从而 $B_x=\{\theta_t(y)\,|\,t\in(-\infty,\infty),\ y\in D_x\}=\{\theta_t(y)\,|\,t\in(-\infty,\infty),\ y\in G_x\}$ 在 $\Pi\cap\widehat{E}$ 中开.

现在，所有 D_x，$x\in\Pi\cap\hat{E}$，作成 $\Pi\cap\hat{E}$ 的一开覆盖. 但 $\Pi\cap\hat{E}$ 紧致。故可取有限个数的点 $x_1, x_2, \cdots, x_p\in\Pi\cap\hat{E}$ 使

$$\Pi\cap\hat{E}=\bigcup_{k=1,2,\cdots,p}D_{x_k}.$$

对每一k 及 $y\in F_{x_k}$，命 $d_k(y)$ 表 y 至 $F_{x_k}-G_{x_k}$ 的距离[1]. $d_k(y)$ 是 F_{x_k} 上一连续函数取值恒 $\geqslant 0$，而 $d_k(y)=0$ 当且仅当 $y\in F_{x_k}-G_{x_k}$. 我们于是定义 $\Pi\cap\widehat{E}$ 上一函数

$$g_k(y)=\begin{cases}d_kf_{x_k}(y) & \text{对 } y\in A_{x_k},\\ 0 & y\in\Pi\cap\widehat{E}-A_{x_k}.\end{cases}$$

因 $\Pi\cap\widehat{E}-A_{x_k}$ 及 B_{x_k} 都是 $\Pi\cap\widehat{E}$ 中的开子集，从 $f_{x_k}(y)$ 在 A_{x_k} 上的连续性可看出 $g_k(y)$ 在 $\Pi\cap\widehat{E}$ 上连续. 置

$$g(y)=\sum_{k=1}^{p}g_k(y),\ y\in\Pi\cap\widehat{E}.$$

这是 $\Pi\cap\widehat{E}$ 上一连续函数，它恒取值 >0 因

$$\Pi\cap\widehat{\Pi}=\bigcup_{k=1,2,\cdots,p}B_{x_k}.$$

我们还可扩充 A_{x_k} 上的连续函数 $\bar{t}(x_k,y)$ 到 $\Pi\cap\widehat{E}$ 上一函数 $\bar{t}(x_k,y)$满足 $\bar{t}(x_k,y)=0$ 对 $y\in\widehat{\Pi}\cap E-A_{x_k}$. 于是 $\bar{t}(x_k,y)g_k(y)$ 对 $y\in\Pi\cap\widehat{E}$ 也连续.

现在为方便，写 $\theta(t,y)=\theta_t(y)$. 定义

$$f(y)=\theta\left(\frac{1}{g(y)}\sum_{k=1}^{p}\bar{t}(x_k,y)\,g_k(y),\ y\right),\ y\in\Pi\cap\widehat{E}.$$

---

1) 当 $F_{x_k}-G_{x_k}=0$ 时，$d_k(y)$ 定义作 1.

这给出一映射 $f: \Pi\cap\widehat{E}\to\Pi\cap\widehat{E}$. 命 $\Pi^*=f(\Pi\cap\widehat{E})$. 因对每一 $y\in\Pi\cap\widehat{E}$,

$$
\begin{aligned}
f(\theta_t(y)) &= \theta\left(\frac{1}{g(\theta_t(y))}\sum_{k=1}^{p}\bar{t}(x_k,\theta_t(y))g_k(\theta_t(y)),\ \theta_t(y)\right)\\
&= \theta\left(\frac{1}{g(y)}\sum_{k=1}^{p}\bar{t}(x_k,\theta_t(y))g_k(y),\ \theta_t(y)\right)\\
&= \theta\left(\frac{1}{g(y)}\sum_{k=1}^{p}(\bar{t}(x_k,y)-t)g_k(y),\ \theta_t(y)\right)\\
&= \theta\left(\frac{1}{g(y)}\sum_{k=1}^{p}\bar{t}(x_k,y)g_k(y)-t,\ \theta_t(y)\right)\\
&= \theta\left(\frac{1}{g(y)}\sum_{k=1}^{p}\bar{t}(x_k,y)g_k(y),\ y\right)=f(y),
\end{aligned}
$$

故每一包含在 $\Pi\cap\widehat{E}$ 内的轨线 $\{\theta_t(y)\,|\,t\in(-\infty,\infty)\}$ 与 Π^* 恰相交于一点. 又每一这样的轨线都与 $\Pi\cap\hat{E}$ 相交, 故 Π^* 也 $=f(\Pi\cap\hat{E})$. 由是从 $\Pi\cap\hat{E}$ 的紧致性及 f 的连续性, Π^* 紧致. 进一步应用系 1.5 及命题 1.6 等, 即看出定理叙述中所给的映射 θ_* 是一拓扑变换. 定理证完.

系 1.9 设 Π 是 E 中一闭子集, 在 $\theta_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变. 又设

$$\Pi\cap\check{E}=0.$$

命 Π^* 是 Π 中一闭子集, 它作成 $\Pi\cap\widehat{E}$ 的一截痕如定理 1.8 中. 则存在常数 $\eta_\Pi^*<0$ 及 $d_\Pi^*>0$ 使得

$$\int_0^T\zeta(\theta_t(x))dt<\begin{cases}T\eta_\Pi^* & \text{对所有 } x\in\Pi\cap E_- \text{ 及 } T\geqslant d_\Pi^*,\\ -T\eta_\Pi^* & \text{对所有 } x\in\Pi\cap E_+ \text{ 及 } T\leqslant -d_\Pi^*,\end{cases}$$

$$\int_0^T\zeta(\theta_{s+t}(x))dt<\begin{cases}T\eta_\Pi^* & \text{对所有 } x\in\Pi^*, s\geqslant 0 \text{ 及 } T\geqslant d_\Pi^*,\\ -T\eta_\Pi^* & \text{对所有 } x\in\Pi^*, s\leqslant 0 \text{ 及 } T\leqslant -d_\Pi^*.\end{cases}$$

证 据上述定理, 每一 $x\in\Pi\cap\hat{E}$ 可唯一地表示成 $x=$

$\theta_{t(x)}(f(x))$，其中 $f(x)\in \Pi^*$ 及 $t(x)\in(-\infty,\infty)$，它们都对 x 连续．于是据 $\Pi\cap\hat{E}$ 的紧致性，$t(x)$ 在 $\Pi\cap\hat{E}$ 上有界．又 $f(\Pi\cap\hat{E})=\Pi^*$，且 $\zeta(x)$ 也在 Π 上有界．结合这些以及定理 1.4-(iv)，就看出存在常数 $\bar{a}$ 及 $\bar{T}$，$\hat{a}_\Pi\leqslant\bar{a}<0$，$0<\hat{T}_\Pi\leqslant\bar{T}$，使得对 $k=1, 2, 3, \cdots$，

$$\int_0^{k\bar{T}}\zeta(\theta_t(x))dt\leqslant k\bar{a} \quad 对 \quad x\in\Pi\cap E_-,$$

$$\int_0^{-k\bar{T}}\zeta(\theta_t(x))dt\leqslant k\bar{a} \quad 对 \quad x\in\Pi\cap E_+,$$

$$\int_0^{k\bar{T}}\zeta(\theta_{s+t}(x))dt\leqslant k\bar{a} \quad 对 \quad x\in\Pi^* \quad 及 \quad s\geqslant 0,$$

$$\int_0^{-k\bar{T}}\zeta(\theta_{s+t}(x))dt\leqslant k\bar{a} \quad 对 \quad x\in\Pi^* \quad 及 \quad s\leqslant 0.$$

从这些不等式及 $\zeta(x)$ 在 Π 上的有界性易看出满足系中所述要求的 η_Π^* 及 d_Π^* 的存在．证完．

§2. 阻 碍 集 $Ob(S)$

现在，设 M^n 为一 n 维紧致的 C^∞ Riemann 流形，$n\geqslant 2$，其上有一 C^1 常微系统 S．于是，S 在 M^n 上，在 M^n 的切空间丛 $\mathscr{C}$ 上，以及在 S 的共轭丛 $\mathscr{D}$ 上，分别导出单参数变换群

$$\phi_t:\ M^n\to M^n,\quad -\infty<t<\infty,$$

$$\Phi_t:\ \mathscr{C}\to\mathscr{C},\quad -\infty<t<\infty,$$

$$\psi_t:\ \mathscr{D}\to\mathscr{D},\quad -\infty<t<\infty.$$

关于共轭丛等的定义见 [1, 2]．这样一些记号如标架丛 $\mathscr{F}_l^\#\subset\mathscr{F}_l\subset\mathscr{U}_l\,(l=1, 2, \cdots, n)$，$S$ 所有常点作成的集合 M，单参数变换群

$$\chi_t:\mathscr{F}_l\to\mathscr{F}_l,\ \chi_t^\#:\mathscr{F}_l^\#\to\mathscr{F}_l^\#,\ -\infty<t<\infty,$$

丛投射 $\sigma:\mathscr{C}\to M^n$ 及 $\rho:\mathscr{D}\to M$，映射 $\mathrm{proj}_k:\mathscr{U}_l\to\mathscr{C}$，$k=1, 2, \cdots, l$，及

$$\mathscr{C}_x=\sigma^{-1}(x)\ 对\ x\in M^n,\quad \mathscr{D}_x=\rho^{-1}(x)\ 对\ x\in M,$$

等等同 [1, §1] 中，本章将一直沿用．

由于 ϕ_t 将 $\mathscr{D}$ 在任一 $x\in M$ 处的纤维 $\mathscr{D}_x$ 线性变换至 $\mathscr{D}_{\phi_t(x)}$ 上，我们可定义另一单参数变换群

$$\Psi_t:\ \mathscr{D}\to\mathscr{D},\quad -\infty<t<\infty$$

如下：

任给一 $u\in\mathscr{D}_x$，$x\in M$. 记 $\circledast u$ 为 $\mathscr{D}_x$ 中所有与 u 正交的切向量作成的子线性空间。则 $\phi_t(\circledast u)$ 是 $\mathscr{D}_{\phi_t(x)}$ 中一子线性空间。故存在唯一的 $u_t\in\mathscr{D}_{\phi_t(x)}$，它与 $\phi_t(\circledast u)$ 正交，并且使得 $\phi_t(u)-u_t\in\phi_t(\circledast u)$。于是命 $\Psi_t(u)=u_t$。

我们须验证，这样定义的 Ψ_t: $\mathscr{D}\to\mathscr{D}(-\infty<t<\infty)$ 的确作成一单参数变换群. 为后面方便，我们将以下述方式进行验证：考虑 M^n 上的正交 n-标架丛 $\mathscr{F}_n$上的单参数变换群 $\chi_t(-\infty<t<\infty)$ 及映射 proj_n: $\mathscr{F}_n\to\mathscr{C}$. 显然 $\mathrm{proj}_n(\mathscr{F}_n)=\{u\in\mathscr{C}\mid\|u\|\neq 0\}$；并且 $\mathrm{proj}_n\chi_t(\gamma)=\mathrm{proj}_n\chi_t(\gamma')$ 如果 $\mathrm{proj}_n\gamma=\mathrm{proj}_n\gamma'$ 对于 γ，$\gamma'\in\mathscr{F}_n$. 故若对于 $u\in\mathscr{C}_x$，$x\in M^n$，置

$$\Psi'_t(u)=\begin{cases}\mathrm{proj}_n\chi_t(\gamma)\in\mathscr{C}_{\phi_t(x)} & \text{对}\ u=\mathrm{proj}_n(\gamma),\\ 0\in\mathscr{C}_{\phi_t(x)} & \phantom{\text{对}}\ u=0\in\mathscr{C}_x,\end{cases}$$

则 $\Psi'_t(u)$ 由 (t,u) 唯一地确定，且 $\Psi'_0(u)=u$，且 $\Psi'_s\Psi'_t(u)=\Psi'_{s+t}(u)$. 又 $\mathrm{proj}_n\mathscr{F}_n\to\mathscr{C}$ 是开映射；且若命 $\chi(t,\gamma)=\chi_t(\gamma)$ 及 $\Psi'(t,u)=\Psi'_t(u)$，则交换性在图表

$$\begin{array}{ccc}(-\infty,\infty)\times\mathscr{F}_n & \xrightarrow{1\times\mathrm{proj}_n} & (-\infty,\infty)\times\mathscr{C}\\ \downarrow{\scriptstyle\chi} & & \downarrow{\scriptstyle\Psi'}\\ \mathscr{F}_n & \xrightarrow{\mathrm{proj}_n} & \mathscr{C}\end{array}$$

中成立. 由是可看出 Ψ' 连续. 这样，我们就有单参数变换群

$$\Psi'_t:\ \mathscr{C}\to\mathscr{C},\quad -\infty<t<\infty.$$

现在，$\mathscr{D}\subset\mathscr{C}$，且易看出 $\Psi_t(u)=\Psi'_t(u)\in\mathscr{D}$ 对 $u\in\mathscr{D}$. 所以

$$\Psi_t=\Psi'_t\,|\,\mathscr{D}:\ \mathscr{D}\to\mathscr{D},\quad -\infty<t<\infty$$

是一单参数变换群，如所要证。

对 $\mathscr{D}_x(x\in M)$ 中任一子线性空间 L，我们也将用记号 $\circledast L$ 表示 $\mathscr{D}_x$ 中如下所述的子线性空间，即

$$\circledast L=\{u\in\mathscr{D}_x|\langle u,u'\rangle=0\ \text{对所有}\ u'\in L\}.$$

显然 $\Psi_t(\mathscr{D}_x)=\mathscr{D}_{\phi_t(x)}$ 对任一 $x\in M$. Ψ_t 一般不是$\mathscr{D}$的纤维 $\mathscr{D}_x$ 及 $\mathscr{D}_{\phi_t(x)}$ 间的线性变换. 但我们有

命题 2.1 对任一 $x\in M$，Ψ_t 将$\mathscr{D}$的纤维 $\mathscr{D}_x$ 中每一子线性空间映满 $\mathscr{D}_{\phi_t(x)}$ 中一子线性空间，保持维数不变；事实上，若 L 为 $\mathscr{D}_x$ 中一子线性空间，则 $\Psi_t(L)=\circledast\phi_t(\circledast L)$.

证 对任一 $u\in\mathscr{D}_x$，易看出 $\phi_t(\circledast u)=\circledast\Psi_t(u)$. 任给 $\mathscr{D}_x$ 中一子线性空间 L. 则 $\mathscr{D}_{\phi_t(x)}$ 的子线性空间

$$\phi_t(\circledast L)=\phi_t\left(\bigcap_{u\in L}(\circledast u)\right)=\bigcap_{u\in L}(\phi(\circledast u))\subset\circledast\Psi_t(w),$$

$$w\in L.$$

记 $L'=\circledast\phi_t(\circledast L)$. 于是

$$\Psi_t(L)\subset L'.$$

同样可证

$$\Psi_{-t}(L')\subset\circledast\phi_{-t}(\circledast L')=L,$$

或 $L'\subset\Psi_t(L)$. 故 $L'=\Psi_t(L)$. 易看出 $\dim\ \phi_t(\circledast L)=n-1-\dim L$，由是 $\dim L'=\dim L$. 命题得证.

记 $\mathscr{D}^*$ 为$\mathscr{D}$在$\mathscr{C}$中的闭包. 明显地，$\mathscr{D}$因而 $\mathscr{D}^*$ 在 $\Psi_t(-\infty<t<\infty)$下不变，由是$\mathscr{D}$上的单参数变换群 $\Psi_t(-\infty<t<\infty)$ 可唯一地扩充至 $\mathscr{D}^*$ 上一单参数变换群，即

$$\Psi_t=\Psi_t|\mathscr{D}^*:\ \mathscr{D}^*\to\mathscr{D}^*,\ -\infty<t<\infty.$$

我们有 $\phi_t\sigma(u)=\sigma\Psi_t(u)$ 对任一 $u\in\mathscr{D}^*$.

命题 2.2 任给 $u\in\mathscr{D}^*$ 及 $\bar{u}\in\mathscr{C}$ 满足 $\sigma(u)=\sigma(\bar{u})$. 则

(i) $ru\in\mathscr{D}^*$ 且 $\Psi_t(ru)=r\Psi_t(u)$ 对 $r\in(-\infty,\infty)$.

(ii) 若 $\bar{u}-u$ 与 u 正交，则 $\Phi_t(\bar{u})-\Psi_t(u)$ 与 $\Psi_t(u)$ 正交，且 $\|\Psi_t(u)\|\leqslant\|\Phi_t(\bar{u})\|$.

(iii) 若 u 及 $\bar{u}\in\mathscr{D}$ 且 $\bar{u}-u\in\circledast u$，则 $\phi_t(\bar{u})-\Psi_t(u)\in\circledast\Psi_t(u)$ 且 $\|\Psi_t(u)\|\leqslant\|\phi_t(\bar{u})\|$.

证 从 $\mathscr{D}^*$ 及 $\Psi'_t(-\infty<t<\infty)$ 的定义易看出 (i) 成立(参照[1, 命题 1.1])。

若 $\|u\|=0$, (ii) 显然成立. 设 $\|u\|\neq 0$. 可取 M^n 在 $\sigma(u)$ 处正规 n- 标架 β 使 $\mathrm{proj}_n(\beta)=u$. 于是 $\Phi_t(u)=u'_t+\mathrm{proj}_n\chi_t(\beta)=u'_t+\Psi_t(u)$, 其中 $u'_t\in L_t$ 而 L_t 表由 $\mathrm{proj}_k\chi_t(\beta)$, $k=1, 2, \cdots, n-1$, 所张的在 $\mathscr{C}_{\phi_t\sigma(u)}$ 中的子线性空间. 于是, 若 $u'=\bar{u}-u\in L_0$, 则 $\Phi_t(u')\in L_t$, $\Phi_t(\bar{u})=\Phi_t(u)+\Phi_t(u')=(u'_t+\Phi_t(u'))+\Psi_t(u)$, 而 $\Psi_t(u)$ 与 $u'_t+\Phi_t(u')$ 正交, 且 $\|\Psi_t(u)\|\leqslant\|\Phi_t(\bar{u})\|$. 这给出 (ii).

类似地可证 (iii).

我们将考虑 M^n 的单位切球丛 $\tilde{\mathscr{C}}=\{u\in\mathscr{C}\mid\|u\|=1\}$ 及

$$\tilde{\mathscr{D}}=\mathscr{D}^*\cap\tilde{\mathscr{C}}.$$

显然 $\tilde{\mathscr{D}}$ 是紧致集 $\subset\mathscr{D}^*$. 对任一 $(t,u)\in(-\infty, \infty)\times\tilde{\mathscr{C}}$, 我们有 $\|\Psi'_t(u)\|\neq 0$; 于是置

$$\tilde{\Psi}_t(u)=\frac{\Psi'_t(u)}{\|\Psi'_t(u)\|}.$$

据命题 2.2-(i) 易看出这给出一单参数变换群

$$\tilde{\Psi}_t:\tilde{\mathscr{C}}\to\tilde{\mathscr{C}}, -\infty<t<\infty,$$

且 $\tilde{\mathscr{D}}$ 在 $\tilde{\Psi}_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变.

我们也可循下述方式看出 $\tilde{\Psi}_t(-\infty<t<\infty)$ 作为一单参数变换群所需具备的性质, 即若考虑 M^n 的正规 n- 标架丛 $\mathscr{F}^{\#}_n\subset\mathscr{F}_n$ 及 $\mathscr{F}^{\#}_n$ 上的单参数变换群 $\chi^{\#}_t(-\infty<t<\infty)$, 则

$$\mathrm{proj}_n\mathscr{F}^{\#}_n=\tilde{\mathscr{C}},$$

且交换性在图表

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{F}^{\#}_n & \xrightarrow{\chi^{\#}_t} & \mathscr{F}^{\#}_n \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{proj}_n} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{proj}_n} \\
\tilde{\mathscr{C}} & \xrightarrow{\tilde{\Psi}_t} & \tilde{\mathscr{C}}
\end{array}$$

中成立. 又 $\mathscr{F}^{\#}_n$ 紧致. 这样, 我们易得出 $\tilde{\Psi}_0(u)=u$ 对 $u\in\tilde{\mathscr{C}}$, $\tilde{\Psi}_s\tilde{\Psi}_t=\tilde{\Psi}_{s+t}$, 以及 $\tilde{\Psi}_t(u)$ 对 (t,u) 的连续性.

由于$\tilde{\mathscr{D}}$在 $\tilde{\Psi}_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变，限制$\tilde{\Psi}_t$在$\tilde{\mathscr{D}}$上仍记作 $\tilde{\Psi}_t$，即得一单参数变换群

$$\tilde{\Psi}_t:\ \tilde{\mathscr{D}} \to \tilde{\mathscr{D}},\quad -\infty < t < \infty.$$

我们有 $\phi_t\sigma(u) = \sigma\tilde{\Psi}_t(u)$ 对任一 $u \in \tilde{\mathscr{D}}$.

重要的是$\tilde{\mathscr{D}}$上的一函数 $\tilde{\omega}(u)$，它的定义如下，即：任取$\gamma \in \mathscr{F}_*^{\#}$ 使 $\mathrm{proj}_*\ \gamma = u$，并置

$$\tilde{\omega}(u) = \omega_*(\gamma),$$

其中

$$\omega_*(\gamma) = \left.\frac{d\|\mathrm{proj}_* \chi_t(\gamma)\|}{dt}\right|_{t=0}$$

给出同 [1，§1] 中。$\tilde{\omega}(u)$的定义与使 $\mathrm{proj}_*\ \gamma = u$的 $\gamma \in \mathscr{F}_*^{\#}$ 的选取无关。这是因为，若γ及 $\gamma' \in \mathscr{F}_*^{\#}$，则 $\mathrm{proj}_*\gamma = \mathrm{proj}_*\gamma'$ 蕴涵 $\mathrm{proj}_*\chi_t(\gamma) = \mathrm{proj}_*\chi_t(\gamma')$ 对所有 $t \in (-\infty, \infty)$.

对 $u \in \tilde{\mathscr{D}}$，任取 $\gamma \in \mathscr{F}_*^{\#}$ 使 $\mathrm{proj}_*\gamma = u$。因

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}(\tilde{\Psi}_t(u)) &= \tilde{\omega}(\tilde{\Psi}_t(\mathrm{proj}_*\gamma)) = \tilde{\omega}(\mathrm{proj}_*\chi_t^{\#}(\gamma))\\ &= \omega_*(\chi_t^{\#}(\gamma)),\ \text{且}\ \mathrm{proj}_*\chi_t(\gamma) = \Psi_t(u),\end{aligned}$$

故据[1，命题 1.2 及 1.3]我们有

命题 2.3 $\tilde{\omega}(u)$ 是$\tilde{\mathscr{D}}$上连续且有界的函数，并且

$$\log\|\Psi_t(u)\| = \int_0^t \tilde{\omega}(\tilde{\Psi}_s(u))ds\ \ \text{对任一}\ (t, u) \in (-\infty, \infty) \times \tilde{\mathscr{D}}.$$

定义 命 $Tob(S)$ 表$\tilde{\mathscr{D}}$上单参数变换群 $\tilde{\Psi}_t(-\infty < t < \infty)$ 就函数 $\tilde{\omega}(u)$ 来说的槽集。$Tob(S)$ 在从投射 $\sigma: \mathscr{C} \to M^n$ 下的像集 $\sigma(Tob(S))$ 将叫作常微系统 S 的阻碍集，并记

$$Ob(S) = \sigma(Tob(S)).$$

按照§1 中所述，我们有

$$Tob(S) = \left\{u \in \tilde{\mathscr{D}}\ \middle|\ \inf_{t\in(-\infty,\infty)} \int_0^t \tilde{\omega}(\tilde{\Psi}_s(u))ds \geq 0\right\}.$$

故据命题 2.3 及 2.2，还有

$$Ob(S) = \{x \in M^n \mid \text{存在}\ u \in \mathscr{C}_x \cap \mathscr{D}^*\ \text{满足}\ \inf_{t\in(-\infty,\infty)} \|\Psi_t(u)\| = \|u\| > 0\}.$$

因$\mathscr{D}$紧致，$Tob(S)$ 是$\mathscr{D}$的闭子集(看 § 1) 而 σ: $\mathscr{C} \to M^n$ 连续，所以

命题 2.4 $Ob(S)$ 是 M^n 的一闭子集。

记 $I(S)$ 为 S 所有奇点作成的集合(在 M^n 中) 的内集。据$\mathscr{D}$的定义及命题 2.2 等易验证：$\mathscr{D}$是 $\mathscr{D} \cap \tilde{\mathscr{C}}$ 在$\tilde{\mathscr{C}}$内的闭包，且

$$Ob(S) \subset \sigma(\mathscr{D}) = M^n - I(S).$$

对 M^n 中任一个在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变的闭子集 Λ，我们将普遍记

$$\Pi(\Lambda) = \{u \in \mathscr{D} \mid \sigma(u) \in \Lambda\}.$$

这是$\mathscr{D}$中一闭子集，在 $\tilde{\Psi}_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变。下面叙述明显地成立。

命题 2.5 设 Λ 是 M^n 中一闭子集，在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变。则 $\Lambda \cap Ob(S) = 0$ 当且仅当

$$\Pi(\Lambda) \cap Tob(S) = 0.$$

记

$$\mathscr{D}_- = \left\{u \in \mathscr{D} \,\middle|\, \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t}\int_0^t \tilde{\omega}(\tilde{\Psi}_s(u))ds < 0 \text{ 且}\right.$$

$$\left.\overline{\lim_{t\to-\infty}} \frac{1}{t}\int_0^t \tilde{\omega}(\tilde{\Psi}_s(u))ds < 0\right\},$$

$$\mathscr{D}_+ = \left\{u \in \mathscr{D} \,\middle|\, \underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t}\int_0^t \tilde{\omega}(\tilde{\Psi}_s(u))ds > 0 \text{ 且}\right.$$

$$\left.\underline{\lim_{t\to-\infty}} \frac{1}{t}\int_0^t \tilde{\omega}(\tilde{\Psi}_s(u))ds > 0\right\},$$

$$\widehat{\mathscr{D}} = \left\{u \in \mathscr{D} \,\middle|\, \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t}\int_0^t \tilde{\omega}(\tilde{\Psi}_s(u))ds < 0 \text{ 且}\right.$$

$$\left.\underline{\lim_{t\to-\infty}} \frac{1}{t}\int_0^t \tilde{\omega}(\tilde{\Psi}_s(u))ds > 0\right\}.$$

定理 2.6 设 Λ 是 M^n 中一闭子集，在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变，且设

$$\Lambda \cap Ob(S) = 0.$$

则

(i) $\Pi(\Lambda)$ 分解成彼此互不相交且都在 $\tilde{\Psi}_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变的子集

$\Pi_-(\Lambda)=\Pi(\Lambda)\cap\mathscr{D}_-$, $\quad\Pi_+(\Lambda)=\Pi(\Lambda)\cap\mathscr{D}_+$, $\quad\widehat{\Pi}(\Lambda)=\Pi(\Lambda)\cap\widehat{\mathscr{D}}$ 的集合和.

(ii) $\Pi_-(\Lambda)$ 及 $\Pi_+(\Lambda)$都是 $\Pi(\Lambda)$的闭子集，$\widehat{\Pi}(\Lambda)$ 是$\Pi(\Lambda)$是开子集.

(iii) $\Pi(\Lambda)$ 中有一闭子集 $\Pi^*(\Lambda)$ 作成$\widehat{\Pi}(\Lambda)$的一截痕，即由 $\tilde{\Psi}(t,u)=\tilde{\Psi}_t(u)$ 对$(t,u)\in(-\infty,\infty)\times\Pi^*(\Lambda)$ 给出一个映满 $\widehat{\Pi}(\Lambda)$ 的拓扑变换

$$\tilde{\Psi}:\ (-\infty,\infty)\times\Pi^*(\Lambda)\to\widehat{\Pi}(\Lambda)$$

(由是显然每一包含在 $\widehat{\Pi}(\Lambda)$ 内的轨线 $\{\tilde{\Psi}_t(u)\mid t\in(-\infty,\ \infty)\}$ 都与 $\Pi^*(\Lambda)$ 恰相交于一点，$\Pi^*(\Lambda)\subset\widehat{\Pi}(\Lambda)$).

(iv) 任给 $\Pi(\Lambda)$中一闭子集 $F\subset\widehat{\Pi}(\Lambda)\cup\Pi_-(\Lambda)$，则对 $\Pi(\Lambda)$中每一开子集 $V\supset\Pi_-(\Lambda)$，存在一对应的数 $T_V>0$ 使

$$\tilde{\Psi}_t(F)\subset V\quad\text{对所有}\quad t\geqslant T_V.$$

任给 $\Pi(\Lambda)$ 中一闭子集 $F'\subset\widehat{\Pi}(\Lambda)\cup\Pi_+(\Lambda)$，则对 $\Pi(\Lambda)$ 中每一开子集 $W\supset\Pi_+(\Lambda)$，存在一对应的数 $T'_W<0$ 使

$$\tilde{\Psi}_t(F')\subset W\quad\text{对所有}\quad t\leqslant T'_W.$$

(v) 存在常数 $\eta_V<0$ 及 $d_V>0$ 使得

$$\int_0^T\tilde{\omega}(\tilde{\Psi}_t(u))dt<\begin{cases}T\eta_V & \text{对所有}\ u\in\Pi_-(\Lambda)\ \text{及}\ T\geqslant d_\Lambda,\\ -T\eta_V & \text{对所有}\ u\in\Pi_+(\Lambda)\ \text{及}\ T\leqslant -d_\Lambda,\end{cases}$$

$$\int_0^T\tilde{\omega}(\tilde{\Psi}_{s+t}(u))dt<\begin{cases}T\eta_V & \text{对所有}\ u\in\Pi^*(\Lambda),s\geqslant 0\text{及}T\geqslant d_\Lambda,\\ -T\eta_V & \text{对所有}\ u\in\Pi^*(\Lambda),s\leqslant 0\text{及}T\leqslant -d_\Lambda.\end{cases}$$

证 从定理假设，我们先有：$\Pi(\Lambda)$是 $\widetilde{\mathscr{D}}$ 中一闭子集在 $\tilde{\Psi}_t$ $(-\infty<t<\infty)$下不变，且 $\Pi(\Lambda)\cap Tob(\Lambda)=0$. 于是直接应用前节中的结果到紧致可度量的空间 $\widetilde{\mathscr{D}}$，其上的单参数变换群 $\tilde{\Psi}_t$ $(-\infty<t<\infty)$及连续函数 $\tilde{\omega}(u)$，以及$\widetilde{\mathscr{D}}$中的闭子集 $\Pi(\Lambda)$，即

得到这定理中各项结论．事实上，这里（i）及（ii）可从定理 1.4 得到；这里（iii）及（v）可从定理 1.8 及系 1.9 得到，这里（iv）可由命题 1.6 推出．

定理 2.6 对于我们将来的讨论是十分基本的．以后，对于满足这定理假设的 Λ，我们将取定 $\Pi^*(\Lambda)$，η_Λ，d_Λ 满足这定理结论中所述的要求．

§3. 奇　　点

我们先处理关于奇点的一基本事实，即

定理 3.1　设 x_0 是 S 的一奇点．则 x_0 不 $\in I(S)\cup Ob(S)$ 当且仅当 x_0 是 S 的一双曲奇点[1]．

证　取 M^n 绕 x_0 处的一 C^∞ 型局部坐标系

$$H: G \to M^n,$$

其中 G 是 n 维欧氏空间 E^n 中一开子集，包含原点 0，且 $H(0)=x_0$．S 局限在这坐标系上将表成一常微分方程组

$$\frac{dy}{dt} = yC + f(y),\quad y\in G,$$

其中 C 是一 n 阶方阵，$f(y)\in E^n$ 连续地可微（因 S 是 M^n 上一 C^1 系统），且 Jacobi 方阵

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_0 = 0.$$

我们还可设 C 具有分块形式

$$C=\begin{pmatrix} C_- & 0 & 0\\ 0 & C_+ & 0\\ 0 & 0 & C'\end{pmatrix},$$

其中 C_- 及 C_+ 分别为 p_- 及 p_+ 阶正则方阵，前者所有特征根的实部都 <0，后者所有特征根的实部都 >0，而 C' 所有特征根

1）如通常，S 的一奇点 x_0 叫作双曲的，如果 S 在 x_0 处的 Jacobi 方阵所有特征根的实部都 $\neq 0$．

实部都 $= 0$. 命 $\bar{y}(t,v)$, $t\in(-\infty,\infty)$, 为线性方程组

$$\frac{dy}{dt} = yC,\ y\in E^n \tag{3.1}$$

的解使 $\bar{y}(0,v) = v$. 于是

$$\Phi_t(dH(v)) = dH(\bar{y}(t,v)). \tag{3.2}$$

记 $p = p_- + p_+$.

对任一 $y\in E^n$, 写

$$y = (pr(y),\ pr'(y)) = (pr_-(y),\ pr_+(y),\ pr'(y)),$$

其中 $pr(y)\in E^p$, $pr_-(y)\in E^{p_-}$, $pr_+(y)\in E^{p_+}$, $pr'(y)\in E^{n-p}$. 命

$$\bar{E}_- = \{y\in E^n \mid pr_+(y) = 0,\ pr'(y) = 0\},$$
$$\bar{E}_+ = \{y\in E^n \mid pr_-(y) = 0,\ pr'(y) = 0\},$$
$$E' = \{y\in E^n \mid pr(y) = 0\}.$$

记 $\mathscr{C}_{x_0-} = dH(\bar{E}_-)$, $\mathscr{C}_{x_0+} = dH(\bar{E}_+)$, $\mathscr{C}'_{x_0} = dH(E')$. 这些都是 M^n 在 x_0 处的切空间 $\mathscr{C}_{x_0}$ 中的子线性空间. 从 C 所取的分块形式及 (3.2), $\mathscr{C}_{x_0}$ 有直和分解

$$\mathscr{C}_{x_0} = \mathscr{C}_{x_0-}\oplus\mathscr{C}_{x_0+}\oplus\mathscr{C}'_{x_0},$$

且 $\mathscr{C}_{x_0-}$, $\mathscr{C}_{x_0+}$ 及 $\mathscr{C}'_{x_0}$ 都在 $\Phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变.

因 C_- 所有的特征根实部都 <0, 而 C_+ 所有的特征根实部都 >0, 线性方程组 (3.1) 的解 $\bar{y}(t,v)$ 具有下述性质, 即: 存在常数 $\eta<0$ 及 $d>0$ 使得

$$\|\bar{y}(s+T,v)\| \leqslant \|\bar{y}(s,v)\|\exp(\eta T)$$
$$\text{对所有 } (s,v)\in(-\infty,\infty)\times\bar{E}_- \text{ 及 } T\geqslant d,$$
$$\|\bar{y}(s,v)\| \leqslant \|\bar{y}(s+T,v)\|\exp(\eta T)$$
$$\text{对所有 } (s,v)\in(-\infty,\infty)\times\bar{E}_+ \text{ 及 } T\geqslant d.$$

于是考虑 $dH(\bar{y}(t,v))\in\mathscr{C}_{x_0}$ 及 M^n 上的 Riemann 度量, 我们易导出结论: 存在常数 $\eta_1<0$ 及 $d_1>0$ 使得

$$\|\Phi_{s+T}(u)\| \leqslant \|\Phi_s(u)\|\exp(\eta_1 T)$$
$$\text{对所有}(s,u)\in(-\infty,\infty)\times\mathscr{C}_{x_0-} \text{ 及 } T\geqslant d_1, \tag{3.3}$$
$$\|\Phi_s(u)\| \leqslant \|\Phi_{s+T}(u)\|\exp(\eta_1 T)$$

对所有$(s,u)\in(-\infty,\infty)\times\mathscr{C}_{x_0+}$ 及 $T\geqslant d_1$. (3.4)
用类似方式我们也可看出：对任给的 $\varepsilon>0$ 存在 $T_\varepsilon>0$ 使得 $\|\Phi_s(u)\|\exp(-\varepsilon T)\leqslant\|\Phi_{s+t}(u)\|\leqslant\|\Phi_s(u)\|\exp(\varepsilon T)$ 对所有 $(s,u)\in(-\infty,\infty)\times\mathscr{C}'_{x_0}$ 及 $T\geqslant T_\varepsilon$. 于是显然有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\|\Phi_t(u)\|=0 \text{ 对所有 } u\in\mathscr{C}'_{x_0},\ \|u\|\neq 0. \quad (3.5)$$

我们将以K表集合 $\{rS(x)\in\mathscr{C}\,|\,x\in M,\ r\in(-\infty,\ \infty)\}$ 在$\mathscr{C}$中的闭包. 为证明定理中条件的必要性，设 x_0 不$\in I(S)$. 于是 S 的这一奇点 x_0 是常点集M的边缘点. 我们说

$$\mathscr{C}_{x_0-}\oplus\mathscr{C}_{x_0+}\subset K, \quad (3.6)$$

亦即，对任给的 $v=(v',\ 0)\in E^n$, $v'\in E^p$, $0\in E^{n-p}$, 我们有G中的序列 $\{y_k\}$ 及 $(-\infty,\infty)$ 中的序列 $\{r_k\}$ 使得

$$H(y_k)\in M,\ \text{且}\ \lim_{k\to\infty}y_k=0,\ \lim_{k\to\infty}r_k(y_kC+f(y_k))=v.$$

事实上，若 $v=0$, 则取 $r_k=0$ 并可取 $G-(0)$ 中一序列满足所述要求(因 x_0 是M的边缘点，这样的序列 $\{y_k\}$ 存在). 若 $v\neq 0$, 满足这要求的序列也存在，因据C所取的分块形式及 $f(y)$ 的性质易看出

$$y_k=\frac{1}{k}\left(v'\begin{pmatrix}C_- & 0\\ 0 & C_+\end{pmatrix}^{-1},\ 0\right),\ r_k=k$$

$(k=1,\ 2,3,\cdots)$, 适合所述的两个极限式；且当 k 充分大时，$y_kC+f(y_k)\neq 0$, 从而 $H(y_k)\in M$. 这给出断语(3.6).

简记 $\Pi_{x_0}=\mathscr{C}_{x_0}\cap\mathscr{D}$, 这是$\mathscr{D}$中一闭子集，在 $\tilde{\Psi}_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变. 又简记 $\hat{\mathscr{C}}_{x_0}=\mathscr{C}_{x_0-}\oplus\mathscr{C}_{x_0+}$. 我们说，$M^n$ 在 x_0 处有正规 n- 标架β使

$$\text{proj}_k\beta\in\hat{\mathscr{C}}_{x_0} \text{ 对 } 1\leqslant k\leqslant p,\ \text{proj}_n\beta\in\Pi_{x_0}. \quad (3.7)$$

事实上，若 $p=0$, 则因 x_0 是M的边缘点，必有 $\Pi_{x_0}\neq 0$, 由是显然有这样 β 的存在. 若 $p>0$, 则据(3.6)存在 $u_0\in\hat{\mathscr{C}}_{x_0}\cap K$, $\|u_0\|=1$, 由是 $\mathscr{C}_{x_0}$ 中与 u_0 正交的 $n-1$ 维子线性空间$\subset\mathscr{D}^*$; 从而也易看出满足(3.7)的 $\beta\in\mathscr{F}^\#_a$ 的存在. 取定一如此的β, 并

简记

$$u_n = \mathrm{proj}_n \beta \in \Pi_{x_0}.$$

假设 $p < n$. 我们说,存在极限

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \tilde{\omega}(\tilde{\Psi}_s(u_n))ds = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log \|\Psi_t(u_n)\| = 0. \quad (3.8)$$

事实上,因 $\mathscr{C}_{x_0} = \overline{\mathscr{C}}_{x_0} \oplus \mathscr{C}'_{x_0}$ 且 $\overline{\mathscr{C}}_{x_0} \cap \tilde{\mathscr{D}}$ 及 $\mathscr{C}'_{x_0} \cap \tilde{\mathscr{D}}$ 都是 $\mathscr{C}_{x_0}$ 的紧致子集,故存在一数 $\lambda > 0$, $\lambda < 1$, 使

$$|\langle u, u'\rangle| \leqslant \lambda \text{ 对所有 } u \in \overline{\mathscr{C}}_{x_0} \cap \tilde{\mathscr{D}} \text{ 及 } u' \in \mathscr{C}'_{x_0} \cap \tilde{\mathscr{D}},$$

且据(3.7)可取 $\bar{u}_n \in \mathscr{C}'_{x_0}$ 使 $\bar{u}_n - u_n \in \overline{\mathscr{C}}_{x_0}$ 与 u_n 正交,由是据命题 2.2-(ii) 及 $\overline{\mathscr{C}}_{x_0}$ 及 $\mathscr{C}'_{x_0}$ 在 $\Psi_t(-\infty < t < \infty)$ 下的不变性,$\Phi_t(\bar{u}_n) - \Psi_t(u_n)$ 及 $\Phi_t(\bar{u}_n)$ 分别仍 $\in \overline{\mathscr{C}}_{x_0}$ 及 $\mathscr{C}'_{x_0}$, 且 $\Phi_t(\bar{u}_n) - \Psi_t(u_n)$ 与 $\Psi_t(u_n)$ 正交,从而

$$\|\Phi_t(\bar{u}_n)\| \geqslant \|\Psi_t(u_n)\| \geqslant \|\Phi_t(\bar{u}_n)\|(1-\lambda^2)^{\frac{1}{2}}.$$

这以及(3.5)及命题 2.3 给出(3.8).

现在,我们说,在 x_0 不 $\in I(S) \cup Ob(S)$ 这假设下,必须有 $p = n$. 这是因为如果 $p < n$, 就有(3.8); 于是应用定理 1.4 到紧致可度量空间 $\tilde{\mathscr{D}}$ 上的单参数变换群 $\tilde{\Psi}_t(-\infty < t < \infty)$, 其上的连续函数 $\tilde{\omega}(u)$ 以及其中的不变闭子集 Π_{x_0}, 我们就有 $\Pi_{x_0} \cap Tob(S) \neq 0$. 这蕴涵 $x_0 \in Ob(S)$, 与所设相矛盾. 这矛盾证明 $\mathscr{C}_{x_0} = \mathscr{C}_{x_0-} \oplus \mathscr{C}_{x_0+}$,即 x_0 是 S 的双曲奇点. 故定理条件的必要性成立.

现证条件的充分性. 设 x_0 是 S 的一双曲奇点. 则 x_0 也是一孤立奇点,由是 x_0 不 $\in I(S)$; 且 $\mathscr{C}_{x_0}$ 有直和分解 $\mathscr{C}_{x_0} = \mathscr{C}_{x_0-} \oplus \mathscr{C}_{x_0+}$. 要证 x_0 不 $\in Ob(S)$, 我们只须证: 任给 M^n 在 x_0 处的一正规 n- 标架 γ, 不等式

$$\int_0^t \omega_n(\chi_s^\#(\gamma))ds \geqslant 0 \text{ 对所有 } t \geqslant 0,$$

及 (3.9)

$$\int_0^t \omega_n(\chi_s^\#(\gamma))ds \leqslant 0 \text{ 对所有 } t \leqslant 0$$

二者不能同时成立. 为此,考虑 S 以 γ 为基的线性化方程组

$$\frac{dy}{dt} = yR_\gamma(t)^{tr}, -\infty < t < \infty,\ y = (y^1, y^2, \cdots, y^n) \in E^n\ (R_\gamma)$$

(见 [1, § 1]). 据这方程组的性质, (3.3) 及 (3.4), 易看出 E^n 有直和分解 $E^n = E_- \oplus E_+$ 使得这方程组的解 $y_\gamma(t, w), t \in (-\infty, \infty)$, $y_\gamma(0, w) = w$, 具有性质:

$$\|y_\gamma(s + T, w)\| \leqslant \|y_\gamma(s, w)\| \exp(\eta_1 T)$$
对所有 $(s, w) \in (-\infty, \infty) \times E_-$ 及 $T \geqslant d_1$,
$$\|y_\gamma(s, w)\| \leqslant \|y_\gamma(s + T, w)\| \exp(\eta_1 T)$$
对所有 $(s, w) \in (-\infty, \infty) \times E_+$ 及 $T \geqslant d_2$

(其中 $\eta_1 < 0$, $d_1 > 0$). 又 $R_\gamma(t)^{tr}, t \in (-\infty, \infty)$, 是三角式方阵, 其对角线以上的系数都是 0, 其末一对角线系数是 $\omega_n(\chi_t^\#(\gamma))$, 且 $R_\gamma(t)^{tr}$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上有界(见 [1, 命题 1.4]). 所以, 若 (3.9) 中前一不等式成立, 则应用 [1, 引理 3.5] 就得出, E_- 包含在 E^n 的超平面 $y^n = 0$ 内. 又若 (3.9) 中后一不等式同时也成立, 则也可应用 [1, 引理 3.5] (但取 t 逆向)得出, E_+ 包含在这超平面内. 于是这超平面有直和分解 $E_- \oplus E_+$. 但这不可能. 这证明条件的充分性. 定理 3.1 证完.

系 3.2 设 x_0 是 S 的一双曲奇点. 则 (i) M^n 在 x_0 处的切空间 $\mathscr{C}_{x_0}$ 包含在 $\mathscr{D}^*$ 内, 也包含在集合

$$\{rS(x) \mid x \in M, r \in (-\infty, \infty)\}$$

在$\mathscr{C}$中的闭包内; (ii) $\mathscr{C}_{x_0}$ 有直和分解 $\mathscr{C}_{x_0} = \mathscr{C}_{x_0-} \oplus \mathscr{C}_{x_0+}$ 满足 (3.3) 及 (3.4), 这给出 S 在 x_0 处的双曲型构造[1].

证 只需证 (i). 由于 x_0 不 $\in I(S)$, 据 (3.6) 有 $\mathscr{C}_{x_0} \subset K$. 于是对任一不 $= 0$ 的 $u \in \mathscr{C}_{x_0}$, $\mathscr{C}_{x_0}$ 中与 u 正交的 $n-1$ 维子线性空间 $\subset \mathscr{D}^*$, 从而易看出 (i) 成立.

系 3.3 设 Λ 是 M^n 中一闭子集, 在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变, 且满足要求 $\Lambda \cap (I(S) \cup Ob(S)) = 0$. 则 Λ 不含有 S 的非双曲奇点.

---

1) 双曲型构造这一般概念原见 [9]; 可看 [2, § 1].

证 显然。

系 3.4 设 M^* 连通，$S \neq 0$ 且 $Ob(S)=0$。则 S 的每一奇点都是双曲的，且 $I(S)=0$。

证 设 x_0 是 S 的一奇点。命 F_{x_0} 为含有 x_0 的，集合 M^*-M 的一个连通分支。因 M^* 连通而 $S\neq 0$（后者蕴涵 $M\neq 0$），F_{x_0} 必含有M的一边缘点 x_1。于是因 $Ob(S)=0$，据上述定理，x_1 是双曲奇点，由是也是一孤立奇点，而 $x_1=x_0$。证完。

设 x_0 为 S 的一双曲奇点。据系 3.2，$\mathscr{C}_{x_0}\subset\mathscr{D}^*$。显然 $\mathscr{C}_{x_0}$ 在 $\Psi_t(-\infty<t<\infty)$下不变。命 $\mathscr{C}_{x_0+}$ 及 $\mathscr{C}_{x_0-}$ 同前。记 $B_-(x_0)$，$B_+(x_0)$ 分别为 $\mathscr{C}_{x_0}$ 中所有与 $\mathscr{C}_{x_0+}$，$\mathscr{C}_{x_0-}$ 正交的切向量作成的子线性空间。则

$$\mathscr{C}_{x_0}=B_-(x_0)\oplus B_+(x_0). \tag{3.10}$$

设 $u\in B_-(x_0)$。若 $\|u\|=0$，则 $\Psi_t(u)$ 显然仍 $\in B_-(x_0)$。若 $\|u\|\neq 0$，则也有 $\Psi_t(u)\in B_-(x_0)$。这是因为，可取 M^* 在 x_0 处的一正规 n- 标架 β 使

$$\mathrm{proj}_k\beta\in\mathscr{C}_{x_0+} \text{ 对} 1\leqslant k\leqslant \dim\mathscr{C}_{x_0+},\ \mathrm{proj}_n\beta=u;$$

于是因 $\mathscr{C}_{x_0+}$ 在 $\Phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变，仍有 $\mathrm{proj}_k\chi_t(\beta)\in\mathscr{C}_{x_0+}$ 对 $1\leqslant k\leqslant\dim\mathscr{C}_{x_0+}$，因而 $\Psi_t(u)=\mathrm{proj}_n\chi(\beta)$ 仍与 $\mathscr{C}_{x_0+}$ 正交。这证明 $B_-(x_0)$ 在 $\Psi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变。同样可证 $B_+(x_0)$ 也在 $\Psi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变。

命题 3.5 设 Λ 是 M^* 中一闭子集，在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变，且设 $\Lambda\cap(I(S)\cup Ob(S))=0$。命 x_0 是 S 的一奇点 $\in\Lambda$。则 x_0 是 S 的一双曲奇点，且

$$B_-(x_0)\cap\mathscr{D}\subset\Pi_-(\Lambda);\quad B_+(x_0)\cap\mathscr{D}\subset\Pi_+(\Lambda).$$

证 （记号 $\Pi_-(\Lambda)$ 及 $\Pi_+(\Lambda)$ 意义同定理2.6 中。）据系 3.3 及 3.2，x_0 是 S 的一双曲奇点，且 $B_-(x_0)\cap\mathscr{D}$ 及 $B_+(x_0)\cap\mathscr{D}$ 都 $\subset\Pi(\Lambda)$。

因 $\mathscr{C}_{x_0+}\cap\mathscr{C}_{x_0-}=(0)$，且 $\mathscr{C}_{x_0+}\cap\mathscr{D}$及$\mathscr{C}_{x_0-}\cap\mathscr{D}$都是$\mathscr{C}_{x_0}$的紧致子集，故存在一数 $\lambda_0>0$，$\lambda_0<1$，使

$$|\langle u_1,u_2\rangle|\leqslant\lambda_0 \text{ 对任意的 } u_1\in\mathscr{C}_{x_0-}\cap\mathscr{D} \text{ 及 } u_2\in\mathscr{C}_{x_0+}\cap\mathscr{D}.$$

任给 $u \in B_-(x_0)$。因 $\mathscr{C}_{x_0} = \mathscr{C}_{x_0+} \oplus \mathscr{C}_{x_0-}$，我们可取 $\bar{u} \in \mathscr{C}_{x_0-}$ 使 $\bar{u} = u + u'$，$u' \in \mathscr{C}_{x_0+}$。于是 $\|u\| \geqslant \|\bar{u}\|(1 - \lambda_0^2)^{\frac{1}{2}}$，且据命题 2.2-(ii)，$\|\Psi_t(u)\| \leqslant \|\Phi_t(\bar{u})\|$。这以系 3.2-(ii) 给出

$$\|\Psi_t(u)\| \leqslant \|\bar{u}\|\exp(\eta_1 t) \leqslant \|u\|\exp(\eta_1 t)/(1 - \lambda_0^2)^{\frac{1}{2}}, t \geqslant d_1,$$

对某数 $\eta_1 < 0$ 及 $d_1 > 0$。所以当 $t \geqslant \max\{d_1, \log(1 - \lambda_0^2)/\eta_1\}$ 时，

$$\|\Psi_t(u)\| \leqslant \|u\|\exp(\eta_1 t/2).$$

这对所有 $u \in B_-(x_0)$ 都成立。于是从 $B_-(x_0)$ 在 $\Psi_t(-\infty < t < \infty)$ 下的不变性，定理 2.6 及命题 2.3，易得出结论：$B_-(x_0) \cap \mathscr{D} \subset \Pi_-(\Lambda)$。

同样可证 $B_+(x_0) \cap \mathscr{D} \subset \Pi_+(\Lambda)$。命题 3.5 证完。

定义 M^n 中一子集 Λ 将称为 S 的一正常集，如果 Λ 在 M^n 中闭，在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变，且 $\Lambda \cap (I(S) \cup Ob(S)) = 0$。

S 的一正常集 Λ 自然满足 $\Lambda \cap Ob(S) = 0$。其逆

命题 3.6 设 Λ 是 M^n 中一闭子集，在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变，且满足 $\Lambda \cap Ob(S) = 0$。则分解 Λ 成集合和

$$\Lambda = (\Lambda \cap I(S)) \cup (\Lambda - I(S))$$

时，$\Lambda \cap I(S)$ 是 M^n 中一闭子集，$\Lambda - I(S)$ 是 S 的一正常集。

证 易看出 $\Lambda - I(S)$ 是正常集。若 S 有一奇点 $x_0 \in \Lambda - I(S)$，则 x_0 是 S 的一双曲奇点，因而是孤立奇点，这蕴涵 x_0 不在 $I(S)$ 的边缘上。由是易看出 $\Lambda \cap I(S)$ 在 M^n 中闭。证完。

§4. 正常集的线性理论

本章以下普遍考虑 M^n 中任一个给定的，在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变的闭子集 Λ。我们将讨论 Λ 在它是 S 的正常集这情况下的线性性质(看前言中最后两段)。

先给

引理 4.1 对任给的数 $\varepsilon > 0$ 及 T，存在一对应的数 $\delta_{(\varepsilon,T)} > 0$ 使得，只要 u 及 $u' \in \mathscr{D}$，$\sigma(u) = \sigma(u')$，且 $\|u - u'\| < \delta_{(\varepsilon,T)}$，即有

$$\left|\int_0^T \tilde{\omega}(\tilde{\Psi}_t(u))dt - \int_0^T \tilde{\omega}(\tilde{\Psi}_t(u'))\,dt\right| < \varepsilon.$$

证 这可直接从$\tilde{\mathscr{D}}$上单参数变换群 $\tilde{\Psi}_t(-\infty < t < \infty)$ 及函数 $\tilde{\omega}(u)$ 的连续性及$\tilde{\mathscr{D}}$的紧致性得出。

引理 4.2 在 E^p 中，$p \geqslant 2$，任给单位长向量 v_1，v_2，及 $p-1$ 维子线性空间 G_1，G_2 它们分别与 v_1，v_2 正交。则

$$\inf_{w \in G_2, \|w\|=1} \|v_1 - w\| = \inf_{w \in G_1, \|w\|=1} \|v_2 - w\|.$$

证 直接验算。

对于 S 的一正常集 Λ，命 $\Pi_-(\Lambda)$，$\Pi_+(\Lambda)$ 及 $\widehat{\Pi}(\Lambda)$ 等给出同定理 2.6 中。

定理 4.3 设 Λ 是 S 的一正常集，任给 S 的一常点 $x \in \Lambda$，于是

(i) 若 $B_-(x)$ 是 $\mathscr{D}_x$ 中一个具有最大维数的子线性空间使

$$B_-(x) \cap \tilde{\mathscr{D}} \subset \Pi_-(\Lambda),$$

则 $(\mathscr{D}_x - B_-(x)) \cap \tilde{\mathscr{D}} \subset \Pi_+(\Lambda) \cup \widehat{\Pi}(\Lambda)$.

(ii) 若 $B_+(x)$ 是 $\mathscr{D}_x$ 中一个具有最大维数的子线性空间使

$$B_+(x) \cap \tilde{\mathscr{D}} \subset \Pi_+(\Lambda),$$

则 $(\mathscr{D}_x - B_+(x)) \cap \tilde{\mathscr{D}} \subset \Pi_-(\Lambda) \cup \widehat{\Pi}(\Lambda)$.

证 设 $B_-(x)$ 是 $\mathscr{D}_x$ 中一个具有最大维数的子线性空间使 $B_-(x) \cap \tilde{\mathscr{D}} \subset \Pi_-(\Lambda)$。任给

$$\bar{u} \in (\mathscr{D}_x - B_-(x)) \cap \tilde{\mathscr{D}}.$$

我们将证 $\bar{u}$ 不 $\in \Pi_-(\Lambda)$。事实上，设相反地，这结论不成立，即

$$\bar{u} \in \Pi_-(\Lambda).$$

命 $\bar{B}_-(x)$ 为 $\mathscr{D}_x$ 中由 $B_-(x)$ 与 $\bar{u}$ 所张的子线性空间。显然

$$\dim \bar{B}_-(x) = 1 + \dim B_-(x).$$

于是 $\dim B_-(x) \geqslant 1$[1]，且必有 $u_0 \in \bar{B}_-(x) \cap \tilde{\mathscr{D}}$ 但不 $\in \Pi_-(\Lambda)$；

---

1) $B_-(x_0) \cap \tilde{\mathscr{D}}$ 不为 0，因已有 $\bar{u} \in \mathscr{D}_x \cap \Pi_-(\Lambda)$，而 $B_-(x)$ 具有所述最大维数性质。

因而据定理 2.6-(i),

$$u_0 \in \Pi_+(\Lambda) \cup \widehat{\Pi}(\Lambda).$$

我们说,存在 $s_0 \in (-\infty, \infty)$ 使得

$$\int_0^{-T} \tilde{\omega}(\tilde{\Psi}_{s+t}(u_0))dt < T\eta_A \text{ 对所有 } s \leqslant s \text{ 及 } T \geqslant d_A \quad (4.1)$$

(其中 $d_A > 0$, $\eta_A < 0$ 给出同定理 2.6-(v) 中)。事实上,若 $u_0 \in \Pi_+(\Lambda)$, 据定理 2.6-(v), (4.1) 成立对任一 $s_0 \in (-\infty, \infty)$.
若 $u_0 \in \widehat{\Pi}(\Lambda)$,则据定理 2.6-(iii),存在 $s_0 \in (-\infty, \infty)$使 $\tilde{\Psi}_{s_0}(u) \in \Pi^*(\Lambda)$; 于是据定理 2.6-(v), (4.1) 成立对这 s_0. 这证明断语。因 $B_-(x) \cap \tilde{\mathscr{D}} \subset \Pi_-(\Lambda)$, 据定理 2.6-(i) 及 (v),

$$\int_0^{-d_A} \tilde{\omega}(\tilde{\Psi}_{s+t}(u))dt > -d_A\eta_A \text{ 对所有}$$

$$(s, u) \in (-\infty, \infty) \times (B_-(x) \cap \tilde{\mathscr{D}}).$$

这结合 (4.1) 及引理 4.1 就得出结论: 存在(由 Λ 确定的) $\delta_A > 0$ 使得

$$\inf_{s \in (-\infty, s_0], u \in B_-(x) \cap \tilde{\mathscr{D}}} \|\tilde{\Psi}_s(u) - \tilde{\Psi}_s(u_0)\| \geqslant \delta_A. \quad (4.2)$$

记 $A_-(x) = ⊛B_-(x)$, $\bar{A}_-(x) = ⊛\bar{B}_-(x)$ (记号⊛,意义见 §2)。显然 $\bar{A}_-(x) \subset A_-(x)$. 据命题 2.1,$\Psi_t(B_-(x))$及 $\Psi_t(\bar{B}_-(x))$ 都是 $\mathscr{D}_{\phi t(x)}$ 的子线性空间,且

$$\dim\Psi_t(\bar{B}_-(x)) = \dim\bar{B}_-(x), \quad \dim\Psi_t(B_-(x)) = \dim B_-(x),$$

$$\Psi_t(B_-(x)) = ⊛\phi_t(A_-(x)) \subset \Psi_t(\bar{B}_-(x)) = ⊛\phi_t(\bar{A}_-(x));$$

因而

$$\mathscr{D}_{\phi t(x)} = \phi_t(A_-(x)) \oplus \Psi_t(B_-(x)) = \phi_t(\bar{A}_-(x)) \oplus \Psi_t(\bar{B}_-(x)),$$

$$\dim\Psi_t(\bar{B}_-(x)) = 1 + \dim\Psi_t(B_-(x)). \quad (4.3)$$

我们于是可取一 $b_0 \in \bar{B}_-(x) \cap \tilde{\mathscr{D}}$ 使 b_0 与 $B_-(x)$ 正交,且对每一 $t \in (-\infty, \infty)$ 可取唯一的

$$\varphi_t(b_0) \in \Psi_t(\bar{B}_-(x))$$

使 $\phi_t(b_0) - \varphi_t(b_0) \in \phi_t(\bar{A}_-(x))$. 显然 $\varphi_0(b_0) = b_0$. 因为 b_0 与 $B_-(x)$正交,即 $b_0 \in A_-(x)$,故 $\phi_t(b_0) \in \phi_t(A_-(x)) \supset \phi_t(\bar{A}_-(x))$.
于是易看出 $\varphi_t(b_0)$ 仍 $\in \phi_t(A_-(x))$, 因而 $\varphi_t(b_0)$ 与 $\Psi_t(B_-(x))$

正交。

较广地，由于直和分解(4.3)，对任一 $(t, u)\in(-\infty, \infty)\times \bar{B}_-(x)$，也存在唯一的

$$\varphi_t(u)\in\Psi_t(\bar{B}_-(x))$$

使 $\phi_t(u)-\varphi_t(u)\in\phi_t(\bar{A}_-(x))$。易验证，对任给定的 t，φ_t 是从 $\bar{B}_-(x)$ 到 $\Psi_t(\bar{B}_-(x))$ 上的正则线性变换。特别地，$\varphi_t(b_0)\neq 0$ 因而可考虑

$$\bar{\varphi}_t(b_0)=\frac{\varphi_t(b_0)}{\|\varphi_t(b_0)\|}\in\Psi_t(\bar{B}_-(x))\cap\mathscr{D};$$

并且，若对任给的 $\tilde{u}\in\bar{B}_-(x)$，记 $*\tilde{u}$ 为 $\bar{B}_-(x)$ 中所有与 $\tilde{u}$ 正交的 u 作成的子线性空间，则 $\varphi_t(*\tilde{u})$ 是 $\Psi_t(\bar{B}_-(x))$ 中一子线性空间，其维数与 $*\tilde{u}$ 的相同。特别地，$*b_0=B_-(x)$。显然，$\circledast\tilde{u}=\bar{A}_-(x)\oplus(*\tilde{u})$；于是易看出

$$\phi_t(\circledast\tilde{u})=\phi_t(\bar{A}_-(x))\oplus\varphi_t(*\tilde{u}).$$

进一步据 Ψ_t 及 φ_t 的定义，$\Psi_t(\tilde{u})$ 恰是这样一个切向量 $\in\Psi_t(\bar{B}_-(x))$，它与 $\varphi_t(*\tilde{u})$ 正交，且使 $\varphi_t(\tilde{u})-\Psi_t(\tilde{u})\in\varphi_t(*\tilde{u})$。由是 $\bar{\Psi}_t(\tilde{u})$也与$\varphi_t(*\tilde{u})$正交对于 $\tilde{u}\in\bar{B}_-(x)\cap\mathscr{D}$。我们也将写 $\bar{\varphi}_t(u)=\varphi_t(u)/\|\varphi_t(u)\|$ 对于 $u\in B_-(x)$，$\|u\|\neq 0$。

现在，我们考虑这特别情况 $\tilde{u}=u_0\in B_-(x)\cap\mathscr{D}$，并考虑 $b_0\in\bar{B}_-(x)\cap\mathscr{D}$。据上面所述，对于给定的 t，在 $\Psi_t(\bar{B}_-(x))$ 中，我们有子线性空间 $\Psi_t(B_-(x))$(它由一切与 $\bar{\varphi}_t(b_0)$ 正交的 $u\in\Psi_t(\bar{B}_-(x))$ 组成)，还有子线性空间 $\varphi_t(*u_0)$(它由一切与 $\bar{\Psi}_t(u_0)$ 正交的 $u\in\Psi_t(\bar{B}_-(x))$ 组成)。我们可取 M^* 在 $\phi_t(x)$ 处一正规 l- 标架构成线性空间 $\Psi_t(\bar{B}_-(x))$ 的一坐标系 $(l=\dim\bar{B}_-(x))$；于是可应用引理 4.2 并依据式子(4.2)得出结论

$$\inf_{t\in(-\infty,t_0),u\in(*u_0)\cap\mathscr{D}}\|\bar{\varphi}_t(u)-\bar{\varphi}_t(b_0)\|\geqslant\delta_A>0.$$

这蕴涵

$$\sup_{t\in(-\infty,t_0),u\in(*u_0)\cap\mathscr{D}}|\langle\bar{\varphi}_t(u),\ \bar{\varphi}_t(b_0)\rangle|\leqslant\delta'_A<1, \tag{4.4}$$

其中 $\delta'_A=1-\delta_A^2/2\geqslant 0$。

我们说，存在一(由 Λ 确定的) $\bar{d}_\Lambda \geqslant d_\Lambda$ 使得

$$\|\varphi_{s-T}(b_0)\| \leqslant \|\varphi_s(b_0)\|\exp(\eta_\Lambda T/2) \quad 对所有 \quad s \leqslant s_0 \quad 及 \quad T \geqslant \bar{d}_\Lambda. \tag{4.5}$$

事实上，我们有 $b_0 = \lambda u_0 + b'$ 对于某 $\lambda \in (-\infty, \infty)$ 及 $b' \in *u_0$，且 $\varphi_t(\lambda u_0) - \Psi_t(\lambda u_0) \in \varphi_t(*u_0)$。故有

$$\varphi_t(b_0) = \lambda\Psi_t(u_0) + \lambda_t' u_t',$$

其中

$$u_t' \in \varphi_t(*u_0) \cap \mathscr{D}, \quad \lambda_t' \in (-\infty, \infty).$$

但 $\Psi_t(u_0)$ 与 u_t' 正交。故

$$\begin{aligned}\|\lambda\Psi_t(u_0)\| &= \|\varphi_t(b_0)\| \cdot |\langle\tilde{\Psi}_t(u_0), \tilde{\varphi}_t(b_0)\rangle| \\ &= \|\varphi_t(b_0)\|(1 - \langle u_t, \tilde{\varphi}_t(b_0)\rangle^2)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

从而据(4.4)，

$$\|\varphi_t(b_0)\|(1 - \delta_\Lambda'^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant \|\lambda\Psi_t(u_0)\| \leqslant \|\varphi_t(b_0)\| \quad 对 \quad t \leqslant s_0,$$

$$0 < 1 - \delta_\Lambda'^2 \leqslant 1.$$

这结合(4.1)，命题 2.2 及 2.3 就给出

$$\begin{aligned}\|\varphi_{s-T}(b_0)\| &\leqslant \|\lambda\Psi_{s-T}(u_0)\|/(1 - \delta_\Lambda'^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \|\lambda\Psi_s(u_0)\|\exp(\eta_\Lambda T)/(1 - \delta_\Lambda'^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \|\varphi_s(b_0)\|\exp(\eta_\Lambda T)/(1 - \delta_\Lambda'^2)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

对所有 $s \leqslant s_0$ 及 $T \geqslant d_\Lambda$。

所以，若取

$$\bar{d}_\Lambda = \mathrm{Max}\left\{d_\Lambda, \frac{1}{\eta_\Lambda}\log(1 - \delta_\Lambda'^2)\right\},$$

则(4.5)成立。(因 η_Λ, d_Λ 及 δ_Λ' 都由 Λ 确定，这 $\bar{d}_\Lambda$ 也由 Λ 确定。)

其次，我们考虑这特别情况 $\tilde{u} = \bar{u} \in (\bar{B}_-(x) - B_-(x)) \cap \Pi_-(\Lambda)$(看前面)。于是在 $\Psi_t(\bar{B}_-(x))$中，我们有子线性空间 $\varphi_t(*\bar{u})$ (它由一切与 $\tilde{\Psi}_t(\bar{u})$正交的 $u \in \Psi_t(\bar{B}_-(x))$ 组成)，因 $\bar{u}$ 不 $\in B_-(x)$ 而 $*b_0 = B_-(x)$，所以 b_0 不 $\in *\bar{u}$。由是 $b_0 - \lambda\bar{u} \in *\bar{u}$ 对于某一 $\lambda \in (-\infty, \infty)$，$\lambda \neq 0$。进一步就有

$$\varphi_t(b_0) = \lambda\Psi_t(\bar{u}) + \bar{b}_t, \quad \langle\Psi_t(\bar{u}), \bar{b}_t\rangle = 0, \quad 其中 \quad \bar{b}_t \in \varphi_t(*\bar{u}),$$

从而 $\|\Psi_t(\bar{u})\| \leqslant \|\varphi_t(b_0)\|/|\lambda|$。于是从(4.5)及 $\eta_\Lambda < 0$，我们看出

$$\lim_{t\to-\infty} \|\Psi_t(\bar{u})\| = 0.$$

但是另一方面，由于 $\bar{u}\in\Pi_-(\Lambda)$，据命题 2.3 及定理 2.6-(v) 我们又有

$$\|\Psi_T(\bar{u})\| \geqslant \exp(\eta_\Lambda T) \geqslant \exp(-\eta_\Lambda d_\Lambda) \text{ 对 } T\leqslant -d_\Lambda.$$

这是一矛盾．这矛盾证明，任一 $\bar{u}\in(\mathscr{D}_x - B_-(x))\cap\tilde{\mathscr{D}}$ 都不能 $\in\Pi_-(\Lambda)$．这样，结合定理 2.6-(i) 就看出定理 4.3 中的结论 (i) 成立．

类似可证其中的结论 (ii)．定理 4.3 证完．

系 4.4 设 Λ 是 S 的一正常集．则对 S 的每一常点 $x\in\Lambda$，

(i) $\mathscr{D}_x$ 中存在唯一具有最大维数的子线性空间 $B_-(x)$ 使

$$B_-(x)\cap\tilde{\mathscr{D}}\subset\Pi_-(\Lambda),$$

并且 $\Psi_t(B_-(x)) = B_-(\phi_t(x))$ 对所有 $t\in(-\infty,\infty)$．

(ii) $\mathscr{D}_x$ 中存在唯一具有最大维数的子线性空间 $B_+(x)$ 使

$$B_+(x)\cap\tilde{\mathscr{D}}\subset\Pi_+(\Lambda),$$

并且 $\Psi_t(B_+(x)) = B_+(\phi_t(x))$ 对所有 $t\in(-\infty,\infty)$．

(iii) $B_-(x)\cap B_+(x) = (0)$由是 $\dim B_-(x) + \dim B_+(x)\leqslant n-1$．

证 这存在性是显然的．因 $\Pi(\Lambda)$ 分解成彼此互不相交，且都在 $\tilde{\Psi}_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变的子集 $\Pi_-(\Lambda)$，$\Pi_+(\Lambda)$ 及 $\widehat{\Pi}(\Lambda)$ 的集合和，这里的 (i)—(iii) 都易用上述定理，命题 2.1 及式子

$$\tilde{\Psi}_t(B_-(x)\cap\tilde{\mathscr{D}}) = \Psi_t(B_-(x))\cap\tilde{\mathscr{D}},$$
$$\tilde{\Psi}_t(B_+(x)\cap\tilde{\mathscr{D}}) = \Psi_t(B_+(x))\cap\tilde{\mathscr{D}}$$

等推出．系 4.4 证完．

设 Λ 是 S 的一正常集．据定理 2.6-(iii)，对任一 $u\in\widehat{\Pi}(\Lambda)$，存在唯一的 $s^*(u)\in(-\infty,\infty)$ 使 $\tilde{\Psi}_{s^*(u)}(u)\in\Pi^*(\Lambda)$．我们也将写

$$s^*(u) = \begin{cases} -\infty & \text{对 } u\in\Pi_-(\Lambda), \\ \infty & \text{对 } u\in\Pi_+(\Lambda). \end{cases}$$

对 $\Pi(\Lambda)$ 的一子集 L，记

$$s_-^*(L) = \begin{cases} \inf\limits_{u \in L} s^*(u) & \text{若 } L \neq 0, \\ \infty & \text{若 } L = 0, \end{cases} \tag{4.6}$$

$$s_+^*(L) = \begin{cases} \sup\limits_{u \in L} s^*(u) & \text{若 } L \neq 0, \\ -\infty & \text{若 } L = 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

显然，若 L' 也是 $\Pi(\Lambda)$ 的一子集 $\supset L$，则 $s_-^*(L') \leqslant s_-^*(L)$，$s_+^*(L') \geqslant s_+^*(L)$；并且

$$s_-^*(L) = -\infty \quad \text{对于 } L \subset \Pi_-(\Lambda),\ L \neq 0,$$

$$s_+^*(L) = \infty \quad \text{对于 } L \subset \Pi_+(\Lambda),\ L \neq 0.$$

引理 4.5 设 Λ 是 S 的一正常集。则

(i) 若 L 是 $\Pi(\Lambda)$ 中一闭子集 $\subset \Pi_+(\Lambda) \cup \widehat{\Pi}(\Lambda)$，则 $s_-^*(L) > -\infty$。

(ii) 若 L 是 $\Pi(\Lambda)$ 中一闭子集 $\subset \Pi_-(\Lambda) \cup \widehat{\Pi}(\Lambda)$，则 $s_+^*(L) < \infty$。

证 任给 $\Pi(\Lambda)$ 中一闭子集 $L \subset \Pi_+(\Lambda) \cup \widehat{\Pi}(\Lambda)$。若 $L = 0$，则 $s_-^*(L) = \infty > -\infty$。设 $L \neq 0$。如果 $s_-^*(L) = -\infty$，则因 L 紧致，可取 L 中一序列 $\{u_k\}$，它收敛到一 $u_0 \in L$，且使 $\lim\limits_{k\to\infty} s^*(u_k) = -\infty$。不妨设 $s^*(u_k) < \infty$ $(k = 1, 2, 3\cdots)$。于是因 u_k 不 $\in \Pi_-(\Lambda) = \Pi(\Lambda) - (\Pi_+(\Lambda) \cup \widehat{\Pi}(\Lambda))$，$s^*(u_k) \in (-\infty, \infty)$ 从而有 $\tilde{\Psi}_{s^*(u_k)}(u_k) \in \Pi^*(\Lambda)$ $(k = 1, 2, 3\cdots)$。由是据$\mathscr{D}$上单参数变换群 $\tilde{\Psi}_t$ $(-\infty < t < \infty)$ 及 $\tilde{\omega}(u)$ 的连续性，应用定理 2.6-(v) 即得

$$\int_0^T \tilde{\omega}(\tilde{\Psi}_{s+t}(u_0))dt < T_{\eta\Lambda} \quad \text{对所有 } s \in (-\infty, \infty) \text{ 及 } T \geqslant d_\Lambda.$$

这蕴涵 $u_0 \in \Pi_-(\Lambda) \cap L$。但这不可能，因 $\Pi_-(\Lambda) \cap L = 0$。所以必有 $s_-^*(L) > -\infty$。这证明 (i)。类似可证 (ii)。引理证完。

引理 4.6 对任给的数 $\eta < 0$ 及 $d > 0$，存在一对应的数 $\xi = \xi(\eta, d) \geqslant d$ 使得只要 $\mathscr{D}_x$，$x \in M$，有直和分解

$$\mathscr{D}_x = B_1(x) \oplus B_2(x)$$

它对一 $\xi_0 \in \langle \xi, \infty)$ 满足要求

$$
\left.
\begin{array}{l}
\|\Psi_{s+t}(u)\| \leqslant \|\Psi_s(u)\| \exp(\eta t) \\
\quad \text{对所有 } u \in B_1(x),\ s \geqslant 0,\ t \geqslant d \text{ 及 } s+t \leqslant \xi_0, \\
\|\Psi_{s+t}(u)\| \geqslant \|\Psi_s(u)\| \exp(-\eta t) \\
\quad \text{对所有 } u \in B_2(x),\ s \geqslant 0,\ t \geqslant d \text{ 及 } s+t \leqslant \xi_0,
\end{array}
\right. \tag{4.8}
$$

即有

$$\|\phi_{\xi_0}(u)\| \leqslant \|u\| \exp(\eta \xi_0/2) \text{ 对所有 } u \in \circledast B_2(x), \tag{4.9}$$

$$\|\phi_{\xi_0}(u)\| \geqslant \|u\| \exp(-\eta \xi_0/2) \text{ 对所有 } u \in \circledast B_1(x). \tag{4.10}$$

证 暂先考虑一任意的 $\xi_0 \geqslant d$，然后进而确定 ξ 使满足引理要求. 应用引理 4.1 及命题 2.3，易看出对应于 $-\eta > 0$ 及 $d > 0$ 存在一数 $\delta > 0$，$\delta < 1$，使得只要 $\mathscr{D}_x$，$x \in M$，有直和分解 $\mathscr{D}_x = B_1(x) \oplus B_2(x)$ 满足 (4.8)，即有

$$|\langle u_1, u_2 \rangle| \leqslant \delta \|u_1\| \cdot \|u_2\| \text{ 对所有 } u_1 \in \Psi_s(B_1(x)),$$
$$u_2 \in \Psi_s(B_2(x)) \text{ 及 } d \leqslant s \leqslant \xi_0;$$

由是若考虑 $\phi_{\xi_0}(\circledast B_2(x)) = \circledast(\Psi_{\xi_0}(B_2(x))$ (看命题 2.1)，并写任一 $u \in \phi_{\xi_0}(\circledast B_2(x))$ 为 $u = u' + u''$，其中 $u' \in \Psi_{\xi_0}(B_1(x))$，$u'' \in \phi_{\xi_0}(\circledast B_1(x))$，易检验

$$\|u'\| \geqslant (1-\delta^2)^{\frac{1}{2}} \|u\|$$

$(0 < (1-\delta^2)^{\frac{1}{2}} < 1)$，从而据命题 2.2-(iii) 及 (4.8) 中第一式，

$$
\begin{aligned}
\|\phi_{-\xi_0}(u)\| &\geqslant \|\Psi_{-\xi_0}(u')\| \geqslant \|u'\| \exp(-\eta \xi_0) \\
&\geqslant \|u\| (1-\delta^2)^{\frac{1}{2}} \exp(-\eta \xi_0).
\end{aligned}
$$

这证明：若取 $\xi = \max\left\{d, \frac{1}{\eta} \log(1-\delta^2)\right\}$，则只要 $\mathscr{D}_x$，$x \in M$，有直和分解 $\mathscr{D}_x = B_1(x) \oplus B_2(x)$ 它对一 $\xi_0 \in \langle \xi, \infty)$ 满足 (4.8)，我们就有 (4.9). 类似可证，对于这样的 ξ，$\mathscr{D}_x$ 及 ξ_0 我们也有 (4.10). 证完.

定理 4.7 设 Λ 是 S 的一正常集. 对 $x \in \Lambda \cap M$，命 $C_+(x) = \circledast B_-(x)$，$C_-(x) = \circledast B_+(x)$ (这里 $B_-(x)$ 及 $B_+(x)$ 同系 4.4 中). 则

$$s_-^*(C_+(x) \cap \tilde{\mathscr{D}}) > -\infty,\quad s_+^*(C_-(x) \cap \tilde{\mathscr{D}}) < \infty \tag{4.11}$$

对每一 $x\in\Lambda\cap M$；且存在一常数 $e_\Lambda\geqslant d_\Lambda$ 使得对每一 $x\in\Lambda\cap M$，

(i) 只要 $u\in C_+(x)$，$s<s_-^*(C_+(x)\cap\tilde{\mathscr{D}})$ 且 $T\geqslant e_\Lambda$，即有

$$\|\phi_{s-T}(u)\|\leqslant\|\phi_s(u)\|\exp(\eta_\Lambda T/2),$$

(ii) 只要 $u\in C_-(x)$，$s>s_+^*(C_-(x)\cap\tilde{\mathscr{D}})$ 且 $T\geqslant e_\Lambda$，即有

$$\|\phi_{s+T}(u)\|\leqslant\|\phi_s(u)\|\exp(\eta_\Lambda T/2);$$

并且 $\mathscr{D}_x=C_-(x)+C_+(x)$，$C_-(\phi_t(x))=\phi_t(C_-(x))$，$C_+(\phi_t(x))=\phi_t(C_+(x))$ 对每一 $x\in\Lambda\cap M$ 及每一 $t\in(-\infty,\infty)$。

证 任给 S 的一常点 $x\in\Lambda$。据定理 4.3 易看出 $C_+(x)\cap\tilde{\mathscr{D}}$ 及 $C_-(x)\cap\tilde{\mathscr{D}}$ 是 $\Pi(\Lambda)$ 中的闭子集，分别 $\subset\Pi_+(\Lambda)\cap\widehat{\Pi}(\Lambda)$ 及 $\Pi_-(\Lambda)\cap\widehat{\Pi}(\Lambda)$；于是应用引理 4.5 得式子 (4.11)。

对于 $\eta=\eta_\Lambda<0$ 及 $d=d_\Lambda>0$，取 $e_\Lambda=\xi(\eta,d)$ 满足引理 4.6 中要求。据 $s_-^*(C_+(x)\cap\tilde{\mathscr{D}})$ 的定义及定理 2.6 易看出对 $s<s_-^*(C_+(x)\cap\tilde{\mathscr{D}})-e_\Lambda$，$t'\geqslant 0$，$t\geqslant d_\Lambda$ 及 $t'+t<s_-^*(C_-(x)\cap\tilde{\mathscr{D}})-s$，

$$\|\Psi_{t'+t}(u)\|\geqslant\|\Psi_{t'}(u)\|\exp(-\eta_\Lambda t)\ 对所有\ u\in\Psi_s(C_+(x)),$$

$$\|\Psi_{t'+t}(u)\|\leqslant\|\Psi_{t'}(u)\|\exp(\eta_\Lambda t)\ 对所有\ u\in\Psi_s(B_-(x));$$

又据命题 2.1，$\mathscr{D}_{\phi_s(x)}=\Psi_s(B_-(x))\oplus\Psi_s(C_+(x))$。于是应用引理 4.6 即得这里 (i)。类似可看出 (ii)。从系 4.4 可推知这定理结论的余下部分。证完。

下面，我们考虑集合 $\{rS(x)\in\mathscr{C}\mid x\in M,\ r\in(-\infty,\infty)\}$ 在 $\mathscr{C}$ 中的闭包 K。任给 $u\in K$，我们将以 $\mathscr{F}(u)$ 表 M^* 在 $\sigma(u)$ 处所有与 u 正交的切向量组成的，$\mathscr{C}_{\sigma(u)}$ 中的子线性空间。若 $\sigma(u)\in M$ 且 $\|u\|\neq 0$，显然 $\mathscr{F}(u)=\mathscr{D}_{\sigma(u)}\subset\mathscr{D}^*$。从这个可进一步看出，只要 $u\in K$ 且 $\|u\|\neq 0$，即有 $\mathscr{F}(u)\subset\mathscr{D}^*$。还有，若 x_0 是 S 的一双曲奇点且 $u\in\mathscr{C}_{x_0}$，则据系 3.2，$u\in K$ 且 $\mathscr{F}(u)\subset\mathscr{D}^*$。

任给 $u_0\in K$，$\|u_0\|\neq 0$，以及数 $\eta<0$，$d>0$。我们将称 u_0 在区间 $(-T,T)$ 上是 (η,d)-正规的，其中 $0<T\leqslant\infty$，如

果 $\mathscr{F}(u_0)$ 有直和分解

$$\mathscr{F}(u_0)=\mathscr{F}_-(u_0)\oplus\mathscr{F}_+(u_0)$$

使得

$$\begin{gathered}\|\Psi_{s+d}(u)\|\leqslant\|\Psi_s(u)\|\exp(\eta d)\\ \text{对所有 } u\in\mathscr{F}_-(u_0)\text{ 及 } s\in(-T,T),\\ \|\Psi_{s-d}(u)\|\leqslant\|\Psi_s(u)\|\exp(\eta d)\end{gathered}\tag{4.12}$$

对所有 $u\in\mathscr{F}_+(u_0)$ 及 $s\in(-T,T)$。

引理 4.8 设 x_0 是 S 的一双曲奇点。命

$$\mathscr{C}_{x_0}=\mathscr{C}_{x_0-}\oplus\mathscr{C}_{x_0+}$$

同系 3.2 中。则对任给的数 $\eta<0$ 及 $d>0$，每一 $u_0\in\mathscr{C}_{x_0}-(\mathscr{C}_{x_0-}\cup\mathscr{C}_{x_0+})$ 都不能在 $(-\infty,\infty)$ 上是 (η,d)-正规的。

证 命 $B_+(x_0)$，$B_-(x_0)$ 为 $\mathscr{C}_{x_0}$ 中分别与 $\mathscr{C}_{x_0-}$，$\mathscr{C}_{x_0+}$ 正交的 n_+，n_- 维子线性空间（同上节末），其中 $n_-=\dim\mathscr{C}_{x_0-}$，$n_+=\dim\mathscr{C}_{x_0+}$。

要证明引理，设相反地，对某常数 $\eta<0$ 及 $d>0$ 来说，存在一 $u_0\in\mathscr{C}_{x_0}-(\mathscr{C}_{x_0-}\cup\mathscr{C}_{x_0+})$，它在 $(-\infty,\infty)$ 上对于 $\mathscr{F}(u_0)$ 的一直和分解 $\mathscr{F}(u_0)=\mathscr{F}_-(u_0)\oplus\mathscr{F}_+(u_0)$，满足(4.12)。我们将先证明

$$\mathscr{F}_+(u_0)\subset B_+(x_0),\quad \mathscr{F}_-(u_0)\subset B_-(x_0).$$

任给一 $\bar{u}\in\mathscr{C}_{x_0}-B_+(x_0)$。显然 $\|\bar{u}\|\neq 0$。可取 M^* 在 x_0 处的一正规 n- 标架 β 使 $\mathrm{proj}_n\beta=\bar{u}/\|\bar{u}\|$，并考虑线性化方程组$(R_\beta)$

$$\frac{dy}{dt}=yR_\beta(t)^{tr},\ -\infty<t<\infty,\ y=(y^1,y^2,\cdots,y^n)\in E^n$$

（见[1，§1]）。命

$$E_-=\left\{y=(y^1,y^2,\cdots,y^n)\in E^n\ \middle|\ \sum_{k=1}^n y^k\mathrm{proj}_k\beta\in\mathscr{C}_{x_0-}\right\},$$

$$E_+=\left\{y=(y^1,y^2,\cdots,y^n)\in E^n\ \middle|\ \sum_{k=1}^n y^k\mathrm{proj}_k\beta\in\mathscr{C}_{x_0+}\right\}.$$

则因 $\bar{u}\in\mathscr{C}_{x_0}-B_+(x_0)$ 蕴涵 $\mathrm{proj}_n\beta$ 不与 $\mathscr{C}_{x_0-}$ 正交，E_- 不包含在 E^n 的超平面 $y^n=0$ 内.又因对每一 $u\in\mathscr{C}_{x_0}$，$\Phi_t(u)$ 对正规 n-标架 $\chi_t^\#(\beta)$ $(-\infty<t<\infty)$ 来说的坐标是 (R_β) 的一解(见[1，§1])，故据系 3.2-(ii)，方程组 (R_β) 的解 $y(t,v)$ $(-\infty<t<\infty)$，$y(0,v)=v$，满足与(3.3)，(3.4)相类似的不等式

$$\|y(s+t,v)\|\leqslant\|y(s,v)\|\exp(\eta_1 t)$$

$$\text{对所有 } (s,v)\in(-\infty,\infty)\times E_- \text{ 及 } t\geqslant d_1,$$

$$\|y(s,v)\|\leqslant\|y(s+t,v)\|\exp(\eta_1 t)$$

$$\text{对所有 } (s,v)\in(-\infty,\infty)\times E_+ \text{ 及 } t\geqslant d_1,$$

其中 $\eta_1<0$ 及 $d_1>0$。但 $R_\beta(t)^{tr}$ 是三角式方阵，其对角线以上的系数都是 0，第 n 个对角线系数是 $\omega_n(\chi_t^\#(\beta))$，且 $R_\beta(t)^{tr}$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上连续且有界(见[1，命题 1.4])。于是因 E_- 不包含在超平面 $y^n=0$ 内，我们可应用[1，引理 3.5]得出结论

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\int_0^t\bar{\omega}\left(\tilde{\Phi}_s\left(\frac{\bar{u}}{\|\bar{u}\|}\right)\right)ds=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\int_0^t\omega_n(\chi_s^\#(\beta))ds<0.$$

从而据命题 2.3 及 2.2 及 $\mathscr{F}_+(u_0)$ 的性质，$\bar{u}$ 不 $\in\mathscr{F}_+(u_0)$。这证明 $\mathscr{F}_+(u_0)\subset B_+(x_0)$。类似可证 $\mathscr{F}_-(u_0)\subset B_-(x_0)$。

因 $n_-+n_+=n$ 而 $\dim\mathscr{F}_-(u_0)+\dim\mathscr{F}_+(u_0)=n-1$，所以 $\mathscr{F}_+(u_0)\subset B_+(x_0)$ 及 $\mathscr{F}_-(u_0)\subset B_-(x_0)$ 蕴涵这两个等式

$$\mathscr{F}_+(u_0)=B_+(x_0),\quad \mathscr{F}_-(u_0)=B_-(x_0)$$

中恰有一个成立。但 u_0 与 $\mathscr{F}(u_0)=\mathscr{F}_-(u_0)\oplus\mathscr{F}_+(u_0)$ 正交。所以这里前一等式成立将蕴涵 $u_0\in\mathscr{C}_{x_0-}$，后一等式成立将蕴涵 $u_0\in\mathscr{C}_{x_0+}$，这都与所设 $u_0\in\mathscr{C}_{x_0}-(\mathscr{C}_{x_0-}\cup\mathscr{C}_{x_0+})$ 相矛盾。这矛盾完成引理的证明。

引理 4.9 设 $x_0\in M^*$ 是 S 的一双曲奇点，W 是 x_0 的一个在 M^* 中的领域。任给 $\eta<0$ 及 $d>0$。于是 x_0 有一个在 M^* 中的邻域 $V\subset W$，且有一数 $\xi>0$ 具有性质：只要 x 是 S 的一常点 $\in V$，且 $\phi_{T_-}(x)$ 及 $\phi_{T_+}(x)\in M^*-W$ 对于某数 $T_-<0$ 及 $T_+>0$，即有一点 $x'=\phi_{T_0}(x)$，$T_-\leqslant T_0\leqslant T_+$，使得 $S(x')$ 不

能在 $(-\xi,\xi)$ 上是 (η,d)- 正规的.

证 设不存在 x_0 的邻域 $V\subset W$ 及数 $\xi>0$ 具有所述性质. 则 S 有一序列的常点 $\{x_k\}$ 满足下述 (a), (b), (c):

(a) $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$.

(b) $\phi_{T_{k-}}(x_k)$ 及 $\phi_{T_{k+}}(x_k)\in M^n - W$ 对某数 $T_{k-}<0$ 及 $T_{k+}>0$.

(c) 若 $t\in\langle T_{k-},T_{k+}\rangle$, 则 $S(\phi_t(x_k))$ 在 $(-k,k)$ 上是 (η, d)- 正规的,即 $\mathscr{D}_{\phi_t(x_k)}$ 有直和分解

$$\mathscr{D}_{\phi_t(x_k)} = \mathscr{F}_-(S(\phi_t(x_k)))\oplus\mathscr{F}_+(S(\phi_t(x_k))),$$
$$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,$$

使得

$$\begin{aligned}&\|\Psi_{s+d}(u)\|\leqslant\|\Psi_s(u)\|\exp(\eta d)\\ &\quad\text{对所有 } u\in\mathscr{F}_-(S(\phi_t(x_k)))\text{ 及 } s\in(-k,k),\\ &\|\Psi_{s-d}(u)\|\leqslant\|\Psi_s(u)\|\exp(\eta d)\\ &\quad\text{对所有 } u\in\mathscr{F}_+(S(\phi_t(x_k)))\text{ 及 } s\in(-k,k).\end{aligned}\tag{4.13}$$

x_0 是 S 的一双曲奇点,因而也是一孤立奇点. 故可取 M^n 中一个以 x_0 为内点的闭子集 $F\subset W$, 使得 F 不含有除 x_0 以外的, S 的任何奇点. 命 H_0 及 H_1 分别为 F 的内集及边缘集. 于是从 H_1 的紧致性及 S 的连续性,我们有

$$m=\inf_{x\in H_1}\|S(x)\|>0.$$

我们不妨设 $x_k\in H_0(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$. 从 (b), S 的半轨线 $\{\phi_t(x_k)|t\in\langle 0,\infty)\}$ 及 $\{\phi_t(x_k)|t\in(-\infty,0\rangle\}$ 都须与 H_1 相交. 对我们的目的来说,易看出不妨设

$$\phi_{T_{k-}}(x_k)\text{ 及 }\phi_{T_{k+}}(x_k)\in H_1\text{ 且 }\{\phi_t(x_k)|t\in\langle T_{k-},T_{k+}\rangle\}\subset F.$$

我们可取一 $t_k\in\langle T_{k-},T_{k+}\rangle$ 使

$$\|S(\phi_{t_k}(x_k))\| = \inf_{t\in\langle T_{k-},T_{k+}\rangle}\|S(\phi_t(x_k))\|.$$

记 $\bar{x}_k=\phi_{t_k}(x_k)$. 则 $\bar{x}_k$ 是 S 的常点 $\in F$. 从 F 的紧致性, 可设 $\{\bar{x}_k\}$ 是收敛序列, 收敛到一点 $\bar{x}_0\in F$. 据 (a) 及 S 的连续性, $\lim\limits_{k\to\infty}\|S(x_k)\|=0$, 从而 $\lim\limits_{k\to\infty}\|S(\bar{x}_k)\|=0=\|S(\bar{x}_0)\|$, 即 $\bar{x}_0$ 是 S

的一奇点 $\in F$.但 F 不含有除 x_0 以外，S 的任何奇点．故 $\bar{x}_0 = x_0$.

考虑 M^n 的切球丛 $\tilde{\mathscr{C}} = \{u \in \mathscr{C} \mid \|u\| = 1\}$. 简记 $\bar{v}_k = S(\bar{x}_k)/\|S(\bar{x}_k)\| \in \tilde{\mathscr{C}}$. 从 $\tilde{\mathscr{C}}$ 的紧致性. $\{\bar{v}_k\}$ 有子序列收敛到一 $\bar{v}_0 \in \tilde{\mathscr{C}}$. 不妨设这子序列即为 $\{\bar{v}_k\}$. 因 $x_0 = \lim_{k\to\infty}\bar{x}_k$, 故 $\bar{v}_0 \in \mathscr{C}_{x_0}$. 我们于是考虑直和分解

$$\mathscr{D}_{\bar{x}_k} = \mathscr{F}_-(S(\bar{x}_k)) \oplus \mathscr{F}_+(S(\bar{x}_k)),\ k = 1, 2, 3, \cdots.$$

用取子序列的法子，我们不妨设

$$\dim \mathscr{F}_-(S(\bar{x}_k)) = \text{恒值 } p,\ \text{从而}$$

$$\dim \mathscr{F}_+(S(\bar{x}_k)) = n - 1 - p \ \text{对}\ k = 1, 2, 3, \cdots.$$

因 $\lim_{k\to\infty}\bar{v}_k = \bar{v}_0$, 易看出 $\mathscr{F}(\bar{v}_0)$ 中有一 p 维子线性空间 $\mathscr{F}_-(\bar{v}_0)$, 对其中每一 u, $\mathscr{D}^*$ 中都有一序列 $\{u_k\}$ 收敛到 u 且 $u_k \in \mathscr{F}_-(S(\bar{x}_k))$. 于是据(4.13)及单参数变换群 $\Psi_t(-\infty < t < \infty)$ 的连续性等，$\mathscr{F}_-(\bar{v}_0)$ 具有性质

$$\|\Psi_{s+d}(u)\| \leqslant \|\Psi_s(u)\| \exp(\eta d)$$

$$\text{对所有}\ u \in \mathscr{F}_-(\bar{v}_0)\ \text{及}\ s \in (-\infty, \infty).$$

类似可看出 $\mathscr{F}(\bar{v}_0)$ 中有一 $n-1-p$ 维子线性空间 $\mathscr{F}_+(\bar{v}_0)$ 具有性质

$\|\Psi_{s-d}(u)\| \leqslant \|\Psi_s(u)\| \exp(\eta d)$ 对所有 $u \in \mathscr{F}_+(\bar{v}_0)$ 及 $s \in (-\infty, \infty)$ 显然 $\mathscr{F}_-(\bar{v}_0) \cap \mathscr{F}_+(\bar{v}_0) = (0)$, 因而有直和分解

$$\mathscr{F}(\bar{v}_0) = \mathscr{F}_-(\bar{v}_0) \oplus \mathscr{F}_+(\bar{v}_0).$$

这证明 $\bar{v}_0 \in \mathscr{C}_{x_0}$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上是 (η, d)- 正规的.

我们说 $\bar{v}_0 \in \mathscr{C}_{x_0} - (\mathscr{C}_{x_0-} \cup \mathscr{C}_{x_0+})$. 事实上，据 $\bar{x}_k$ 的定义，我们有

$$\phi_{t_{k-}}(\bar{x}_k) = \phi_{T_{k-}}(x_k)\ \text{及}\ \phi_{t_{k+}}(\bar{x}_k) = \phi_{T_{k+}}(x_k)$$

对于某数 $t_{k-} \leqslant 0$ 及 $t_{k+} \geqslant 0$. 又据前面所述，$\phi_{t_{k-}}(\bar{x}_k)$ 及 $\phi_{t_{k+}}(\bar{x}_k) \in H_{1\varepsilon}$ 由是

$$\|S(\phi_{t_{k-}}(\bar{x}_k))\| \geqslant m > 0,\ \|S(\phi_{t_{k+}}(\bar{x}_k))\| \geqslant m,$$

$$k = 1, 2, 3, \cdots.$$

但 $\lim_{k\to\infty}\|S(\bar{x}_k)\| = 0$, 且

$$\|S(\phi_t(\bar{x}_k))\| = \|S(\bar{x}_k)\| \int_0^t \omega_1(\chi_s^{\#}(\bar{v}_k))ds,$$

其中 $\omega_1(u)$ 是$\mathscr{C}$上一连续且有界的函数，而 $\chi_t^{\#}(-\infty < t < \infty)$ 是 $\mathscr{C}$ 上一单参数变换群，由 $\chi_t^{\#}(u) = \Phi_t(u)/\|\Phi_t(u)\|$，$u \in \mathscr{C}$，定义(看 [1，命题 1.3][1])．故必有

$$\lim_{k\to\infty} t_{k-} = -\infty, \quad \lim_{k\to\infty} t_{k+} = \infty.$$

于是因 $\lim_{k\to\infty} \bar{v}_k = \bar{v}_0$，且据 $\bar{x}_k$ 的定义有

$$\|\Phi_t(\bar{v}_k)\| = \frac{\|S(\phi_t(\bar{x}_k))\|}{\|S(\bar{x}_k)\|} \geqslant 1 \quad 对 \quad t \in (t_{k-}, t_{k+}),$$

$$k = 1, 2, 3, \cdots,$$

故据$\mathscr{C}$上变换群 $\Phi_t(-\infty < t < \infty)$ 的连续性，

$$\|\Phi_t(\bar{v}_0)\| \geqslant \|\bar{v}_0\| = 1 \quad 对所有 \quad t \in (-\infty, \infty).$$

这结合系 3.2-(ii) 证明断语 $\bar{v}_0 \in \mathscr{C}_{x_0} - (\mathscr{C}_{x_0-} \cup \mathscr{C}_{x_0+})$．但上面已证 $\bar{v}_0$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上是 (η, d)-正规的．这样，我们就得出与引理 4.8 相矛盾的结论．这证明引理 4.9．

定理 4.10 设 A 是 S 的一正常集．命 $\bar{x}$ 为 S 的一常点 $\in A$．则

(i) 轨线 $P_{\bar{x}} = \{\phi_t(\bar{x}) | t \in (-\infty, \infty)\}$ 的 ω-极限集合或不含有 S 的奇点，或仅由 S 的一双曲奇点组成．

(ii) 同样地，轨线 $P_{\bar{x}}$ 的 α-极限集合或不含有 S 的奇点，或仅由 S 的一双曲奇点组成．

证 记 $\Gamma_{\bar{x}}$ 为 $P_{\bar{x}}$ 的 ω- 极限集合．显然 $\Gamma_{\bar{x}} \subset A$．假设 $\Gamma_{\bar{x}}$ 含有 S 的一奇点 x_0．则 x_0 不 $\in I(S) \cup Ob(S)$．故据定理 3.1，x_0 是 S 的一双曲奇点．

对于 $\bar{x} \in M$，考虑 $\mathscr{D}_{\bar{x}}$ 的子线性空间 $B_+(\bar{x})$ 及 $C_-(\bar{x})$ (给出同系 4.4 及定理 4.7) 中．简记 $s_0 = s_+^*(C_-(\bar{x}) \cap \tilde{\mathscr{D}})$． 据定理

1) 文 [1] 中用记号 $\chi_t^{\#}$ ($-\infty<t<\infty$) 表示 M^n 的正规 l-标架丛上由 S 自然导出的单参数变换群．当 $l=1$ 时，这标架丛即是 $\tilde{\mathscr{C}}$．

4.3，$C_-(\bar{x})\cap\mathscr{D}$ 是 $\Pi(\Lambda)$ 中一闭子集 $\subset\Pi_-(\Lambda)\cap\widehat{\Pi}(\Lambda)$；再据引理 4.5，$s_0<\infty$。于是从定理 2.6，系 2.2 及 2.3，我们有

$$
\begin{aligned}
&\|\Psi_{s+d_\Lambda}(u)\|\leqslant\|\Psi_s(u)\|\exp(\eta_\Lambda d_\Lambda)\ \text{对所有}\\
&u\in C_-(\bar{x})\ \text{及}\ s\geqslant s_0,\\
&\|\Psi_{s-d_\Lambda}(u)\|\leqslant\|\Psi_s(u)\|\exp(\eta_\Lambda d_\Lambda)\ \text{对所有}\\
&u\in B_+(\bar{x})\ \text{及}\ s\in(-\infty,\infty).
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

又 $\mathscr{D}_{\bar{x}}=B_+(\bar{x})\oplus C_-(\bar{x})$，从而据命题 2.1 有直和分解

$$
\mathscr{D}_{\phi_t(\bar{x})}=\Psi_t(B_+(\bar{x}))\oplus\Psi_t(C_-(\bar{x}))\ \text{对任一}\ t\in(-\infty,\infty).
\tag{4.15}
$$

现在，假设 $\Gamma_{\bar{x}}$ 还含有一点 $x_1\neq x_0$。我们可取 x_0 的一个在 M^n 中的邻域 W，其闭包不含 $\bar{x}$ 及 x_1。据引理 4.9，可取 x_0 的一个在 M^n 中的邻域 $V\subset W$ 及一数 $\xi>0$ 具有对于 $\eta_\Lambda<0$ 及 $d_\Lambda>0$ 来说的这引理中所述的性质。于是因 x_0 及 x_1 都是轨线 $P_{\bar{x}}$ 的 ω-极限点，存在点

$$
\begin{aligned}
y_0&=\phi_{t_0}(\bar{x})\in M^n-W,\\
y_1&=\phi_{t_1}(y_0)\in V,\\
y_2&=\phi_{t_2}(y_1)\in M^n-W
\end{aligned}
$$

其中 $t_0\geqslant s_0+\xi+d_\Lambda$，$t_1>0$，$t_2>0$。从而据这引理，轨弧 $\{\phi_t(y_0)\mid t\in\langle 0,t_1+t_2\rangle\}$ 上有点 $\bar{y}$ 使得 $S(\bar{y})$ 在$(-\xi,\xi)$上不是(η_Λ,d_Λ)-正规的。但这与(4.14)及(4.15)相矛盾.这证明(i)。类似可证(ii)。定理 4.10 证完。

定理 4.11 设 Λ 是 S 的一正常集。命 $\bar{x}$ 为 S 的一常点 $\in\Lambda$。则

(i) 若轨线 $P_{\bar{x}}=\{\phi_t(\bar{x})\mid t\in(-\infty,\infty)\}$ 的 ω-极限集合含有 S 的一奇点 x_0，则存在数 $\eta_{\bar{x}}<0$ 及 $d_{\bar{x}}>0$ 使得

$$
\|S(\phi_{s+T}(\bar{x}))\|\leqslant\|S(\phi_s(\bar{x}))\|\exp(\eta_{\bar{x}}T)\ \text{对所有}\ s\geqslant 0\ \text{及}\ T\geqslant d_{\bar{x}},
$$

(ii) 若轨线 $P_{\bar{x}}$ 的 α-极限集合含有 S 的一奇点 x_0'，则存在数 $\eta_{\bar{x}}'<0$ 及 $d_{\bar{x}}'>0$ 使得

$$
\|S(\phi_{s-T}(x))\|\leqslant\|S(\phi_s(\bar{x}))\|\exp(\eta_{\bar{x}}'T)\ \text{对所有}\ s\leqslant 0\ \text{及}\ T\geqslant d_{\bar{x}}'.
$$

证 设 $P_{\bar{x}}$ 的 ω-极限集合 $\Gamma_{\bar{x}}$ 含有 S 的一奇点 x_0. 据上述定理，$\Gamma_{\bar{x}}$ 仅由 x_0 组成，且 x_0 是 S 的一双曲奇点.

命 $\mathscr{C}_{x_0}=\mathscr{C}_{x_0-}\oplus\mathscr{C}_{x_0+}$ 同系 3.2 中. 考虑 M^n 的单位切球从 $\tilde{\mathscr{C}}$,

$\tilde{\mathscr{C}}_{x_0}=\mathscr{C}_{x_0}\cap\tilde{\mathscr{C}}$, $\tilde{\mathscr{C}}_{x_0-}=\mathscr{C}_{x_0-}\cap\tilde{\mathscr{C}}$, $\tilde{\mathscr{C}}_{x_0+}=\mathscr{C}_{x_0+}\cap\tilde{\mathscr{C}}$,

及 $\tilde{\mathscr{C}}$ 上由 $\chi_t^{\#}(u)=\Phi_t(u)/\|\Phi_t(u)\|$, $u\in\tilde{\mathscr{C}}$, 给出的单参数变换群 $\chi_t^{\#}(-\infty<t<\infty)$. 记 $\bar{u}=S(\bar{x})/\|S(\bar{x})\|\in\tilde{\mathscr{C}}$. 于是因 $\sigma\chi_t^{\#}=\chi_t^{\#}\sigma$: $M^n\to M^n$, 且 $\Gamma_{\bar{x}}$ 仅由 x_0 组成，$\tilde{\mathscr{C}}$上的轨线 $\{\chi_t^{\#}(\bar{x})\ t\in(-\infty,\infty)\}$ 的 ω- 极限集合 $\Delta_{\bar{u}}$ 包含在 $\tilde{\mathscr{C}}_{x_0}$ 内.

我们说 $\Delta_{\bar{u}}\cap(\tilde{\mathscr{C}}_{x_0}-(\tilde{\mathscr{C}}_{x_0-}\cup\tilde{\mathscr{C}}_{x_0+})=0$. 事实上，设相反地，存在一序列 $\{\chi_{t_k}^{\#}(\bar{u})\}$ 收敛到 $u_0\in\tilde{\mathscr{C}}_{x_0}-(\tilde{\mathscr{C}}_{x_0-}\cup\tilde{\mathscr{C}}_{x_0+})$, 其中 $\lim\limits_{k\to\infty}t_k=\infty$. 考虑 $B_+(\bar{x})$ 及 $C_-(\bar{x})$ 同定理 4.10 证明中，我们仍有 (4.14) 及 (4.15). 于是因 $\chi_t^{\#}(\bar{u})=S(\phi_t(\bar{x}))/\|S(\phi_t(\bar{x}))\|$ 而 $\mathscr{D}_{\phi_t(x)}$ 为 $\mathscr{C}_{\phi_t(x)}$ 中与 $S(\phi_t(\bar{x}))$ 正交的 $n-1$ 维子线性空间，从 $\mathscr{D}^*$ 上单参数变换群 $\Psi_t(-\infty<t<\infty)$ 的连续性，易看出 $\mathscr{F}(u_0)$ 有直和分解 $\mathscr{F}(u_0)=\mathscr{F}_-(u_0)\oplus\mathscr{F}_+(u_0)$ 具有性质

$$\|\Psi_{s+d_A}(u)\|\leqslant\|\Psi_s(u)\|\exp(\eta_A d_A)$$
$$\text{对所有 } u\in\mathscr{F}_-(u_0) \text{ 及 } s\in(-\infty,\infty),$$
$$\|\Psi_{s-d_A}(u)\|\leqslant\|\Psi_s(u)\|\exp(\eta_A d_A)$$
$$\text{对所有 } u\in\mathscr{F}_+(u_0) \text{ 及 } s\in(-\infty,\infty),$$

即 $u_0\in\mathscr{C}_{x_0}-(\mathscr{C}_{x_0-}\cup\mathscr{C}_{x_0+})$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上是 (η_A,d_A)-正规的. 但这与引理 4.8 矛盾. 这证明断语，从而有

$$\Delta_{\bar{u}}\subset\tilde{\mathscr{C}}_{x_0-}\cup\tilde{\mathscr{C}}_{x_0+}.$$

显然 $\tilde{\mathscr{C}}_{x_0-}$ 及 $\tilde{\mathscr{C}}_{x_0+}$ 是 $\tilde{\mathscr{C}}_{x_0}$ 中互不相交的闭子集. 于是从 $\mathscr{C}$ 上单参数变换群 $\Phi_t(-\infty<t<\infty)$ 的连续性及$\tilde{\mathscr{C}}$的紧致性，并据系 3.2, 我们可取$\tilde{\mathscr{C}}$中的开子集 V_- 及 V_+ 使

$$\tilde{\mathscr{C}}_{x_0-}\subset V_-,\ \tilde{\mathscr{C}}_{x_0+}\subset V_+,\ V_-\cap V_+=0,$$

且使得，$\|\Phi_{d_A}(u)\|<\exp(\eta_A d_A/2)$ 对所有 $u\in V_-$, 但 $\|\Phi_{d_A}(u)\|>\exp(-\eta_A d_A/2)$ 对所有 $u\in V_+$. 又因 $\Delta_{\bar{u}}\subset\tilde{\mathscr{C}}_{x_0-}\cup\tilde{\mathscr{C}}_{x_0+}$, 故存在 $\bar{s}\geqslant 0$ 使得半轨线

$$Q_{(\bar{u},\bar{s})}=\{\chi_t^{\#}(\bar{u})\mid t\geqslant\bar{s}\}\subset V_-\cup V_+.$$

但这半轨线是连通的。所以必有

$$Q_{(\bar{u},\bar{s})}\subset V_- \text{ 或 } Q_{(\bar{u},\bar{s})}\subset V_+.$$

于是若 $Q_{(\bar{u},\bar{s})}\subset V_+$，则

$$\frac{\|\Phi_{\bar{s}+kd_A}(\bar{u})\|}{\|\Phi_{\bar{s}}(\bar{u})\|}=\|\Phi_{kd_A}(\chi_{\bar{s}}^{\#}(\bar{u}))\|>\exp(-k\eta_A d_A/2)，\text{即}$$

$$\|S(\phi_{\bar{s}+kd_A}(\bar{x}))\|>\|S(\phi_{\bar{s}}(\bar{x}))\|\exp(-k\eta_A d_A/2)\geqq\|S(\phi_{\bar{s}}(\bar{x}))\|,$$
$$k=1,2,3,\cdots.$$

但另一方面，由于 $P_{\bar{x}}$ 的 ω- 极限集合仅由奇点 x_0 组成，我们必有 $\lim\limits_{t\to\infty}\|S(\phi_t(\bar{x}))\|=0$。这是一矛盾，它证明

$$Q_{(\bar{u},\bar{s})}\subset V_-,$$

因而对任一 $s\geqslant\bar{s}$，

$$\frac{\|\Phi_{s+kd_A}(\bar{u})\|}{\|\Phi_s(\bar{u})\|}<\exp(k\eta_A d_A/2),$$

即

$$\|S(\phi_{s+kd_A}(\bar{x}))\|<\|S(\phi_s(\bar{x}))\|\exp(k\eta_A d_A/2),$$
$$k=1,2,3,\cdots.$$

于是从$\mathscr{C}$上变换群 $\Phi_t(-\infty<t<\infty)$ 的连续性及$\bar{\mathscr{C}}$的紧致性，易看出满足 (i) 中要求的 $\eta_{\bar{x}}$ 及 $d_{\bar{x}}$ 的存在。类似可证 (ii)。定理 4.11 证完。

对任一 $x\in M^*$，记

$$F_-(x)=\{u\in\mathscr{C}_x\mid\lim_{t\to\infty}\|\Phi_t(u)\|=0\},$$
$$F_+(x)=\{u\in\mathscr{C}_x\mid\lim_{t\to-\infty}\|\Phi_t(u)\|=0\}. \tag{4.16}$$

显然，这些都是 $\mathscr{C}_x$ 的子线性空间且

$$\Phi_t(F_-(x))=F_-(\phi_t(x)),\ \Phi_t(F_+(x))=F_+(\phi_t(x))$$
$$\text{对任一 } t\in(-\infty,\infty).$$

又记 $\{S(x)\}$ 为由 $S(x)$ 所产生的 $\mathscr{C}_x$ 中的子线性空间。显然 $\dim\{S(x)\}=1$ 或 0 按 x 为 S 的常点或奇点而定。若 x_0 是 S 的一双曲奇点，从系 3.2-(ii) 有

$$F_-(x_0)=\mathscr{C}_{x_0-},F_+(x_0)=\mathscr{C}_{x_0+}.$$

定理 4.12 设 Λ 是 S 的一正常集，命 $\bar{x}$ 为 S 的一常点 $\in \Lambda$. 则

(i) $\mathscr{C}_{\bar{x}} = F_-(\bar{x}) + F_+(\bar{x}) + \{S(\bar{x})\}$.

(ii) $\{S(\bar{x})\} \oplus C_-(\bar{x}) = F_-(\bar{x})$ 或 $= \{S(\bar{x})\} \oplus F_-(\bar{x})$ 按轨线 $P_{\bar{x}} = \{\phi_t(\bar{x}) | t \in (-\infty, \infty)\}$ 的 ω- 极限集合是否含有 S 的奇点而定; $\{S(\bar{x})\} \oplus C_+(x) = F_+(\bar{x})$ 或 $= \{S(\bar{x})\} \oplus F_+(\bar{x})$ 按 $P_{\bar{x}}$ 的 α- 极限集合是否含有 S 的奇点而定(这里 $C_-(\bar{x})$ 及 $C_+(\bar{x})$ 同定理 4.7 中,它们都 $\subset \mathscr{D}_{\bar{x}}$, 也都与 $S(\bar{x})$ 正交).

(iii) 存在数 $\zeta_{\bar{x}} < 0$ 及 $T_{\bar{x}} > 0$ 使得

$\|\Phi_{s+t}(u)\| \leqslant \|\Phi_s(u)\| \exp(\zeta_{\bar{x}} t)$ 对所有 $u \in F_-(\bar{x})$, $s \geqslant 0$ 及 $t \geqslant T_{\bar{x}}$,

$\|\Phi_{s-t}(u)\| \leqslant \|\Phi_s(u)\| \exp(\zeta_{\bar{x}} t)$ 对所有 $u \in F_+(\bar{x})$, $s \leqslant 0$ 及 $t \geqslant T_{\bar{x}}$.

证 记 $p = \dim C_-(\bar{x})$. 我们可取 M^n 在 x 处的一正规 n- 标架 β 使

$$\mathrm{proj}_1\beta = S(x)/\|S(x)\|, \quad \mathrm{proj}_{k+1}\beta \in C_-(\bar{x}) \text{ 对 } 1 \leqslant k \leqslant p.$$

则 $\mathrm{proj}_1 \chi_t^{\#}(\beta) = S(\phi_t(x))/\|S(\phi_t(x))\|$, $\mathrm{proj}_{k+1} \chi_t^{\#}(\beta) \in C_-(\phi_t(\bar{x}))$ 对 $1 \leqslant k \leqslant p$. 考虑 S 以 β 为基的线性化方程组 (R_β) (见[1, §1])它可写作

$$\frac{dy}{dt} = yR_\beta(t)^{tr} = y\begin{pmatrix} \bar{Q}_\beta(t) & 0 \\ \cdot & Q'_\beta(t) \end{pmatrix}$$

$$= y\begin{pmatrix} \omega_1(\chi_t^{\#}(\beta)) & 0 & 0 \\ r_\beta(t) & Q_\beta(t) & 0 \\ \cdot & \cdot & Q'_\beta(t) \end{pmatrix},$$

$$-\infty < t < \infty, \; y \in E^n, \tag{R_β}$$

其中 $\bar{Q}_\beta(t)$ 是 $p+1$ 阶方阵. 我们有: $\bar{Q}_\beta(t)$ 是三角式方阵, 对角线以上的系数都是 0, 对角线系数顺次是

$$\mathrm{diag}_k \bar{Q}_\beta(t) = \omega_k(\chi_t^{\#}(\beta)), \; k = 1, 2, \cdots, p+1,$$

$\bar{Q}_\beta(t)$ 对 $t \in (-\infty, \infty)$ 连续且在 $(-\infty, \infty)$ 上有界(据[1, 命题 1.4]). 我们于是考虑方程组

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = \bar{z}\bar{Q}_\beta(t), \; -\infty < t < \infty, \; \bar{z} \in E^{p+1}, \tag{4.17}$$

$$\frac{dz}{dt} = zQ_{\beta}(t), \quad -\infty < t < \infty, \quad z \in E^p. \tag{4.18}$$

记

$$\bar{z}(t,v) = (\bar{z}^1(t,v), \bar{z}^2(t,v), \cdots, \bar{z}^{p+1}(t,v)),$$
$$-\infty < t < \infty,$$
$$z(t,v) = (z^1(t,w), z^2(t,w), \cdots, z^p(t,w)),$$
$$-\infty < t < \infty$$

分别为(4.17),(4.18)的解使 $\bar{z}(0,v) = v = (v^1, v^2, \cdots, v^{p+1})$, $z(0,w) = w = (w^1, w^2, \cdots, w^p)$. 于是,因对任一 $u \in \mathscr{C}_{\bar{x}}$, $\Phi_t(u)$ 对于正规 n-标架 $\chi_t^{\#}(\beta)$ 来说的坐标, $-\infty < t < \infty$, 是 (R_β) 的一解(见[1, §1]),我们有

$$\Phi_t(\bar{u}_v) = \sum_{k=1}^{p+1} \bar{z}^k(t,v)\mathrm{proj}_k \chi_t^{\#}(\beta) \in \{S(\phi_t(\bar{x}))\}$$
$$\oplus C_-(\Phi_t(\bar{x})), \tag{4.19}$$

$$\Phi_t(u_w) = \sum_{k=1}^{p} z^k(t,w)\mathrm{proj}_{k+1}\chi_t^{\#}(\beta) \in C_-(\phi_t(\bar{x})), \tag{4.20}$$

其中 $\bar{u}_v = \sum_{k=1}^{p+1} v^k \mathrm{proj}_k \beta$, $u_w = \sum_{k=1}^{p} w^k \mathrm{proj}_{k+1}\beta$. 从而据定理 4.7-(ii) 及这里(4.20),并应用[1, 引理 3.5]到方程组(4.18),我们首先可得出结论:存在数 $\xi_{\bar{x}} < 0$ 及 $C_{\bar{x}} > 0$ 使得

$$\frac{1}{t}\int_0^t \omega_k(\chi_{s+t'}^{\#}(\beta))dt' < \xi_{\bar{x}} \text{ 对所有 } s \geqslant 0 \text{ 及 } t \geqslant C_{\bar{x}},$$

$$k = 2, 3, \cdots, p+1. \tag{4.21}$$

现在,假设 $P_{\bar{x}}$ 的 ω- 极限集合 $\Gamma_{\bar{x}}$ 含有 S 的一奇点. 据定理 4.11 及[1, 命题 1.3]我们有

$$\frac{1}{t}\int_0^t \omega_1(\chi_{s+t'}^{\#}(\beta))dt' < \eta_{\bar{x}} < 0 \text{ 对所有 } s \geqslant 0 \text{ 及 } t \geqslant d_{\bar{x}}.$$

于是结合(4.21)及(4.19),并应用[1,引理 3.5]到方程组(4.17),我们就看出:存在数 $\zeta_{\bar{x}-} < 0$ 及 $T_{\bar{x}-} > 0$ 使得

$$\|\Phi_{s+t}(u)\| \leqslant \|\Phi_s(u)\| \exp(\zeta_{\bar{x}-}t)$$

对所有 $u \in \{S(x)\} \oplus C_-(x)$ 及 $s \geqslant 0$, $t \geqslant T_{\bar{x}-}$。

从这式子显然有 $\{S(\bar{x})\} \oplus C_-(\bar{x}) \subset F_-(\bar{x})$。但 $\mathscr{C}_{\bar{x}} = \{S(\bar{x})\} \oplus C_-(\bar{x}) \oplus B_-(\bar{x})$。由是据命题 2.2-(ii) 及 $B_-(\bar{x})$ 的定义（见系 4.4）必有 $F_-(\bar{x}) \cap B_-(\bar{x}) = (0)$。故 $F_-(\bar{x}) = \{S(\bar{x})\} \oplus C_-(\bar{x})$。

其次，设 $\Gamma_{\bar{x}}$ 不含有 S 的奇点。则因 $E_{\bar{x}} = \{\phi_t(\bar{x}) | t \in \langle 0, \infty)\} \cup \Gamma_{\bar{x}}$ 是一紧致集 $\subset \Lambda$，从 S 的连续性，

$$0 < \inf_{x \in E_{\bar{x}}} \|S(x)\| \leqslant \sup_{x \in E_{\bar{x}}} \|S(x)\| < \infty,$$

这蕴涵 $-\infty < \inf\limits_{t \in \langle 0, \infty)} \log \|S(x)\| \leqslant \sup\limits_{t \in \langle 0, \infty)} \log \|S(x)\| < \infty$，由是

$$\sup_{t \in \langle 0, \infty)} \left| \int_0^t \omega_1(\chi_{t'}^{\#}(\beta)) dt' \right| < \infty.$$

因而可取一数 $c'_{\bar{x}} \geqslant c_{\bar{x}}$ 使

$$\frac{1}{t} \int_0^t \left(\omega_1(\chi_{s+t'}^{\#}(\beta)) - \frac{2\xi_{\bar{x}}}{3} \right) dt' > -\frac{\xi_{\bar{x}}}{3}$$

对所有 $s \geqslant 0$ 及 $t \geqslant c'_{\bar{x}}$。

又据 (4.21) 显然有

$$\frac{1}{t} \int_0^t \left(\omega_k(\chi_{s+t'}^{\#}(\beta)) - \frac{2\xi_{\bar{x}}}{3} \right) dt' < \frac{\xi_{\bar{x}}}{3}$$

对所有 $s \geqslant 0$ 及 $t \geqslant c'_{\bar{x}}$, $k = 2, 3, \cdots, p+1$。

所以，若考虑方程组

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = \bar{z}\left(\bar{Q}_\beta(t) - \frac{2\xi_{\bar{x}}}{3} \right), \quad -\infty < t < \infty, \ \bar{z} \in E^{p+1},$$

以代替 (4.17)（这里方程组的解取形式 $\bar{z}(t, v)\exp(-2\xi_{\bar{x}}/3)$），则据 (4.19)，并应用 [1，引理 3.5]，可得出结论：$\{S(\bar{x})\} \oplus C_-(\bar{x})$ 有一子线性空间 $F'_-(\bar{x})$，$\dim F'_-(x) = p$，且存在数 $\zeta'_{\bar{x}-} < 0$ 及 $T_{\bar{x}-} > 0$ 使得

$$\|\Phi_{s+t}(u)\| \exp\left(\frac{-2\xi_{\bar{x}}}{3} \right) \leqslant \|\Phi_s(u)\| \exp(\zeta'_{\bar{x}-}t)$$

对所有 $u \in F'_-(\bar{x})$ 及 $s \geqslant 0$, $t \geqslant T_{\bar{x}-}$,

由是

$$\|\Phi_{s+t}(u)\|\leqslant\|\Phi_s(u)\|\exp(\zeta_{\bar{x}-}t)$$

对所有 $u\in F'_-(\bar{x})$ 及 $s\geqslant 0$, $t\geqslant T_{\bar{x}-}$,

其中 $\zeta_{\bar{x}-}=\zeta'_{\bar{x}-}+2\xi_{\bar{x}}/3<0$。显然 $F'_-(\bar{x})\subset F_-(\bar{x})$;如上段末所证,我们仍有 $F_-(\bar{x})\subset\{S(\bar{x})\}\oplus C_-(\bar{x})$。但 $S(\bar{x})$ 不 $\in F_-(\bar{x})$(因 $\lim\limits_{t\to\infty}\|S(\phi_t(\bar{x}))\|>0$)。于是易看出 $F'_-(\bar{x})=F_-(\bar{x})$,从而 $\{S(\bar{x})\}\oplus C_-(\bar{x})=\{S(\bar{x})\}\oplus F_-(\bar{x})$。

类似可证:存在数 $\zeta_{\bar{x}+}<0$ 及 $T_{\bar{x}+}>0$ 使得

$$\|\Phi_{s-t}(u)\|\leqslant\|\Phi_s(u)\|\exp(\zeta_{\bar{x}+}t)$$

对所有 $u\in F_+(\bar{x})$ 及 $s\leqslant 0$, $t\geqslant T_{\bar{x}+}$,

且 $\{S(\bar{x})\}\oplus C_+(\bar{x})=F_+(\bar{x})$ 或 $=\{S(\bar{x})\}\oplus F_-(\bar{x})$ 按 $P_{\bar{x}}$ 是否含有 S 的奇点而定. 取 $\zeta_{\bar{x}}=\mathrm{Max}\{\zeta_{\bar{x}-},\ \zeta_{\bar{x}+}\}$ 及$T_{\bar{x}}=\max\{T_{\bar{x}-},T_{\bar{x}+}\}$ 即完成定理 4.12-(ii) 及 (iii) 的证明。(i) 也成立,因 $\mathscr{C}_{\bar{x}}=\{S(\bar{x})\}\oplus(C_-(\bar{x})+C_+(\bar{x}))=\{S(\bar{x})\}+F_-(\bar{x})+F_+(\bar{x})$。定理 4.12 证完。

对任一 $x\in M$,记

$$D_-(x)=\{u\in\mathscr{D}_x\mid\lim_{t\to\infty}\|\phi_t(u)\|=0\},$$

$$D_+(x)=\{u\in\mathscr{D}_x\mid\lim_{t\to-\infty}\|\phi_t(u)\|=0\}. \tag{4.22}$$

显然这些都是 $\mathscr{D}_x$ 的子线性空间,且

$$\phi_t(D_-(x))=D_-(\phi_t(x)),\ \phi_t(D_+(x))=D_+(\phi_t(x)),$$

对任一 $t\in(-\infty,\infty)$。

据命题 2.2-(iii),定理 2.6,系 4.4 及定理 4.7 易检验:若Λ是 S 的正常集,则

$$D_-(x)=C_-(x),\ D_+(x)=C_+(x),\ 对\ x\in\Lambda\cap M。 \tag{4.23}$$

系 4.13 对于 M^* 中在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变的闭子集 Λ,下面三个条件等价:

(i) Λ 是 S 的正常集。

(ii) S 的每一属于Λ的奇点都是双曲的,且对 S 的每一常点

$\in \Lambda$，我们有 $\mathscr{D}_x = D_-(x) + D_+(x)$.

(iii) 对每一 $x \in \Lambda$，我们有 $\mathscr{C}_x = F_-(x) + F_+(x) + \{S(x)\}$.

证 设 (i) 成立. 则有 (4.23). 由是据系 3.3 及定理 4.7，(ii) 成立. 其逆，设 (ii) 成立. 则据定理 3.1，S 的每一在 Λ 内的奇点不 $\in I(S) \cup Ob(S)$. 又 S 的每一在 Λ 内的常点也不 $\in Ob(S)$，从而不 $\in I(S) \cup Ob(S)$. 这是因为：对任给的 $u \in \mathscr{D}_x$，$x \in M$，(ii) 蕴涵存在 $\bar{u} \in D_-(x) \cup D_+(x)$ 使 $\bar{u} - u \in \circledast u$；由是据命题 2.2-(ii)，这两个极限式 $\lim\limits_{t \to \infty} \|\Psi_t(u)\| = 0$ 及 $\lim\limits_{t \to -\infty} \|\Psi_t(u)\| = 0$ 中至少有一个成立.

设 (i) 成立. 则据定理 4.12，系 3.3 及系 3.2-(ii)，(iii) 成立. 其逆，设 (iii) 成立. 则因任一 $x \in I(S)$ 蕴涵 Φ_t 对所有 $t \in (-\infty, \infty)$ 在 $\mathscr{C}_x$ 上都是恒同变换，故 $\Lambda \cap I(S) = 0$. 又对任给的 $u \in \mathscr{D}^*$，(iii) 蕴涵存在 $\bar{u} \in F_-(\sigma(u)) \cup F_+(\sigma(u))$ 使 $\bar{u} - u$ 与 u 正交；由是据命题 2.2-(ii)，这两个极限式 $\lim\limits_{t \to \infty} \|\Psi_t(u)\| = 0$ 及 $\lim\limits_{t \to -\infty} \|\Phi_t(u)\| = 0$ 中仍至少有一个成立. 故也有 $\Lambda \cap Ob(S) = 0$. 系 4.13 证完.

§5. 正常集的线性理论(续)

仍如同前节，考虑 M^n 中任一个给定的，在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变的闭子集 Λ. 在 Λ 是 S 的正常集这情况下，对于 S 的奇点或常点 $x \in \Lambda$，考虑分别给在 §3 末及系 4.4 中的，$\mathscr{C}_x$ 的子线性空间 $B_-(x)$，$B_+(x)$.

设 Λ 是 S 的一正常集. 我们将可以看出 Λ 具有较清楚的构造模型. 为此，对任一 $x \in \Lambda$ 记

$$\mathrm{gr}(x) = n - \dim B_-(x) - \dim B_+(x),$$

称为 x 的梯数. 据 (3.10) 及系 4.4-(iii)，显然 $0 \leqslant \mathrm{gr}(x) \leqslant n$，且 $\mathrm{gr}(x) = 0$ 当且仅当 x 是 S 的一奇点. 对任一 $x \in \Lambda$，三联数组

$$(\mathrm{gr}(x),\ \dim B_-(x),\ \dim B_+(x))$$

将称为 x 的梯型. 若 $x\in\Lambda$ 的梯型为 (p, q, r), 则 $p+q+r=n$. 对任意的整数 $p\geqslant 0$, $q\geqslant 0$, $r\geqslant 0$, $p+q+r=n$, 记

$$\Lambda^p_{q,r}=\{x\in\Lambda \mid x \text{ 的梯型 }=(p,q,r)\},$$

$$\Lambda^p=\bigcup_{\substack{(p',q,r)\\ p'\leqslant p}}\Lambda^{p'}_{q,r},$$

$$F(\Lambda^p_{q,r})=\bigcup_{p'<p,\,q\leqslant q',\,r\leqslant r'}\Lambda^{p'}_{q',r'}.$$

于是 Λ 分解成互不相交的诸 $\Lambda^p_{q,r}$ 的集合和.

定理 5.1 设 Λ 是 S 的一正常集. 命 Λ^p, $\Lambda^p_{q,r}$ 等给出如上. 则在序列

$$0=\Lambda^{-1}\subset\Lambda^0\subset\Lambda^1\subset\cdots\subset\Lambda^n=\Lambda$$

中,我们有

(i) 每一 Λ^p 都是 Λ 中一闭子集,每一 Λ^p 以及每一 $\Lambda^p_{q,r}$ 都在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变.

(ii) $\Lambda^{p+1}-\Lambda^p=\bigcup_{q,r}\Lambda^{p+1}_{q,r}$, 且每一 $\Lambda^{p+1}_{q,r}$ 在 $\Lambda^{p+1}-\Lambda^p$ 中开.

(iii) 每一 $\Lambda^{p+1}_{q,r}$ 在 Λ^{p+1} 中的边缘集包含在 $F(\Lambda^{p+1}_{q,r})$ 内(因而也包含在 Λ^p 内).

证 考虑 $\Lambda^{p+1}_{q,r}(p+1\geqslant 0)$ 中一序列 $\{x_k\}$, 它收敛到 $x\in\Lambda$. 我们证 $x\in\Lambda^{p+1}$. 若 x 是 S 的奇点,则 $x\in\Lambda^0$, 因而也 $\in\Lambda^{p+1}$. 设 x 是常点. 据系 3.3, S 所有 $\in\Lambda$ 的奇点都是双曲的,因而 Λ 至多只含有 S 的有限个数的奇点. 因此, 可设每一 x_k 都是 S 的常点, 由是 $p+1>0$, 考虑

$B_-(x)$, $B_+(x)$; $B_-(x_k)$, $B_+(x_k)$, $k=1, 2, 3, \cdots$.

$B_-(x)\cap\mathscr{D}$ 是 $\mathscr{D}_x$ 中一个球(其维数 $=\dim B_-(x)-1$), $\subset\Pi_-(\Lambda)$; 同样, $B_-(x_k)\cap\mathscr{D}$ 是 $\mathscr{D}_{x_k}$ 中一个球 $\subset\Pi_-(\Lambda)$. 因 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x$, 故从变换群 $\Psi_t(-\infty<t<\infty)$ 的连续性及 $B_-(x)$, $B_-(x_k)$ 的定义(见系 4.4), 易看出集合序列 $\{B_-(x_k)\cap\mathscr{D}\}$ 上收

敛到 $B_-(x)\cap\mathscr{D}$[1]，因而 $\dim B_-(x)\geqslant\dim B_-(x_k)=q$. 同样可看出 $\dim B_+(x)\geqslant\dim B_+(x_k)=r$. 所以 $x\in$ 某一 $\Lambda^{p'}_{q',r'}$ 其中 $p'\leqslant p+1$, $q'\geqslant q$, $r'\geqslant r$, 从而 $x\in\Lambda^{p+1}$. 于是易看出每一 Λ^{p+1} 在 Λ 中闭 $(p+1\geqslant 0)$.

在上面证明中，也可看出 $\Lambda^{p+1}_{q,r}$ 在 $\Lambda^{p+1}-\Lambda^p$ 中闭；于是因 Λ^{p+1} 是有限个数互不相交的 $\Lambda^{p+1}_{p,r}$ 的集合和，$\Lambda^p_{q,r}$ 也在 $\Lambda^{p+1}-\Lambda^p$ 中开，这给出 (ii). 也易看出 (iii).

若 $p>0$, 则 $\Lambda^p_{q,r}$ 由 S 的一些常点组成；从系 4.4 即看出 $\Lambda^p_{q,r}$ 在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变. 若 $p=0$, 则 $\Lambda^0_{q,r}$ 仅由 S 的一些奇点组成；据 § 3 末所述，这样的不变性也成立. 定理证完.

定理 5.2 设 Λ 是 S 的一正常集. 命 $\Lambda^p_{q,r}$ 给出如上. 则对任给的一点 $x\in\Lambda^p_{q,r}$, $p>0$, 轨线 $\{\phi_t(x)|t\in(-\infty,\infty)\}$ 的 ω- 极限集合包含在 $\Lambda^1_{p+q-1,r}\cup\Lambda^0_{p+q,r}$ 内；它的 α- 极限集合包含在 $\Lambda^1_{q,p+r-1}\cup\Lambda^0_{q,p+r}$ 内.

证 因 $p>0$, x 是 S 的一常点 $\in\Lambda^p_{q,r}$. 设 $x_0=\lim\limits_{k\to\infty}\phi_{t_k}(x)$, $\lim\limits_{k\to\infty}t_k=\infty$. 先设 x_0 是 S 的一常点. 则据定理 4.3 及系 4.4, $B_+(x)\cap\mathscr{D}\subset\Pi_+(\Lambda)$, 且 $C_-(x)\cap\mathscr{D}=(\circledast B_+(x))\cap\mathscr{D}$ 是一紧致集 $\subset\widehat{\Pi}(\Lambda)\cup\Pi_-(\Lambda)$; 由是据定理 2.6 及 $\mathscr{D}$ 上单参数变换群 $\tilde{\Psi}_t$ $(-\infty<t<\infty)$ 及 $\tilde{\omega}(u)$ 的连续性，$\mathscr{D}_{x_0}$ 中有子线性空间 $\bar{B}_-(x_0)$ 及 $\bar{B}_+(x_0)$, $\dim\bar{B}_-(x_0)=\dim C_-(x_0)=n-1-r$, $\dim\bar{B}_+(x_0)=\dim B_+(x_0)=r$, 且 $\{t_k\}$ 有一子序列，使得 $\Pi(\Lambda)$ 中的集合序列 $\{\tilde{\Psi}_{t_k}(C_-(x)\cap\mathscr{D})\}$ 及 $\{\tilde{\Psi}_{t_k}(B_-(x)\cap\mathscr{D})\}$ 的相应子序列分别上收敛到 $\bar{B}_-(x_0)\cap\mathscr{D}$ 及 $\bar{B}_+(x_0)\cap\mathscr{D}$, 从而 $\bar{B}_-(x_0)\subset B_-(x_0)$, $\bar{B}_+(x_0)\subset B_+(x_0)$. 但 $\dim\bar{B}_-(x_0)+\dim B_+(x_0)\leqslant n-1$. 故 $\bar{B}_-(x_0)=B_-(x_0)$, $\bar{B}_+(x_0)=B_+(x_0)$. 这给出 $x_0\in\Lambda^1_{p+q-1,r}$.

其次，设 x_0 是 S 的一奇点. 则 x_0 是一双曲奇点. 考虑 $F_-(x)=$

---

1) 在一紧致可度量空间中，一集合序列 $\{H_k\}$ 叫作上收敛到一闭子集 H, 如果对 H 的每一邻域 U, 存在一 k' 使得只要 $k>k'$, 即有 $H_k\subset U$.

$\{S(x)\}\oplus C_-(x)$(看定理 4.12)．我们可取$\{t_k\}$的一子序列使得M^*的单位切球丛$\mathscr{C}$中的集合序列$\{\Phi_{t_k}(F_-(x))\cap\mathscr{C}\}$及$\{\Psi_{t_k}(B_+(x))\cap\mathscr{D}\}$的相应子序列分别上收敛到$\bar{F}_-(x_0)\cap\mathscr{C}$及$\bar{B}_+(x_0)\cap\mathscr{D}$，其中$\bar{F}_-(x_0)$及$\bar{B}_+(x_0)$都是$\mathscr{C}_{x_0}$中的子线性空间，$\dim\bar{F}_-(x_0)=\dim F_-(x)=n-r$，$\dim\bar{B}_+(x_0)=\dim B_+(x)=r$．易看出$\Phi_t(F_-(x))$与$\Psi_t(B_+(x))$正交,因而$\bar{F}_-(x_0)$与$\bar{B}_+(x_0)$正交；由是$\mathscr{C}_{x_0}=\bar{F}_-(x_0)\oplus\bar{B}_+(x_0)$．又据定理 4.12，系 3.2-(ii)，定理 2.6，变换群$\Phi_t(-\infty<t<\infty)$及$\Psi_t(-\infty<t<\infty)$的连续性，有$\bar{F}_-(x_0)\subset\mathscr{C}_{x_0-}$，且$\bar{B}_+(x_0)\cap\mathscr{D}\subset\Pi_+(\Lambda)$．由是可应用命题 2.2-(ii)导出$\bar{F}_-(x_0)=\mathscr{C}_{x_0-}$，因而$\bar{B}_+(x_0)=B_+(x_0)$．这给出$x_0\in\Lambda^0_{p+q,r}$．这样，我们就证明了轨线$\{\phi_t(x)\,|\,t\in(-\infty,\infty)\}$的$\omega$-极限集合包含在$\Lambda^1_{p+q-1,r}\cup\Lambda^0_{p+q,r}$内．类似可证它的$\alpha$-极限集合包含在$\Lambda^1_{q,p+r-1}\cup\Lambda^0_{q,p+r}$内．定理证完．

结合定理 4.10，我们有

系 5.3 设Λ是S的一正常集．任给$x\in\Lambda^p_{q,r}$，$p>0$．则

(i) 轨线$P_x=\{\phi_t(x)\,|\,t\in(-\infty,\infty)\}$的$\omega$-极限集合$\Gamma_x$包含在$\Lambda^0_{p+q,r}$或$\Lambda^1_{p+q-1,r}$内,按$\Gamma_x$是否含有$S$的奇点而定．

(ii) P_x的α-极限集合Γ'_x包含在$\Lambda^0_{q,p+r}$或$\Lambda^1_{q,p+r-1}$内，按Γ'_x是否含有S的奇点而定．

系 5.4 设Λ是S的一正常集．则

(i) 若对于一点$x\in\Lambda\cap M$，轨线$\{\phi_t(x)\,|\,t\in(-\infty,\infty)\}$的$\omega$-极限集合$\Gamma_x\subset\Lambda^0_{q,r}$，而它的$\alpha$-极限集合$\Gamma'_x\subset\Lambda^0_{q',r'}$，则$\Lambda^0_{q,r}\cap\Lambda^0_{q',r'}=0$．

(ii) S没有这样的轨线,它经过一常点$\in\Lambda$，且它的ω-极限集合及α-极限集合含有S的同一奇点．

证 设对于一点$x\in\Lambda^p_{q_0,r_0}$，$p>0$，我们有Γ_x及Γ'_x都$\subset\Lambda^0_{q,r}$(对于某q及r)．则据上述系，$q=p+q_0$且$q=q_0$．但这不可能．这给出(i)．从(i)即得(ii)．

系 5.5 设P是S的一周期轨道．则P是双曲的[1]当且仅当

1) 如通常，S的一周期轨道叫作双曲的，如果它所有特征指数的绝对值都$\neq 1$．

$P\cap Ob(S)=0$.

证 命$T>0$为P的周期. 任给$x\in P$. 设P是双曲的. 则有直和分解 $\mathscr{D}_x=\mathscr{D}_{x-}\oplus\mathscr{D}_{x+}$ 在线性变换 $\phi_T|\mathscr{D}_x:\mathscr{D}_x\to\mathscr{D}_x$下不变,使得

$\lim\limits_{k\to\infty}\|\phi_{T^k}(u)\|=0$ 对所有 $u\in\mathscr{D}_{x-}$, $\lim\limits_{k\to-\infty}\|\phi_{T^k}(u)\|=0$ 对所有 $u\in\mathscr{D}_{x+}$. 由是据P的紧致性及变换群 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 的连续性,并应用系 4.13-(ii) 即看出 $P\cap Ob(S)=0$. 其逆, 设 $P\cap Ob(S)=0$. 则据系 5.3, $\Lambda=P$ 的 ω- 极限集合 $\subset\Lambda^1$, 从而 $\Lambda^1=P$. 这给出 $\mathscr{D}_x=B_+(x)\oplus B_-(x)=C_-(x)\oplus C_+(x)$. 由是据定理 4.7, P是一双曲周期轨道. 证完.

设 x_0 是S的一双曲奇点. 考虑方程组

$$\frac{dy}{dt}=yA^{tr},\quad y\in E^n, \tag{5.1}$$

其中A为S在x_0处(在一局部坐标系下)的 Jacobi 方阵, 它的所有特征根实部都 $\neq 0$. 用 Grobman-Hartman 定理,可取E^n在原点 0 处的一有界邻域 W_1, M^n 在x_0处的一邻域W_0及一拓扑变换

$$h:W_1\to W_0,\quad h(W_1)=W_0, \tag{5.2}$$

它保相, 即若命 $y(t,w)$, $-\infty<t<\infty$, 为(5.1)的解使 $y(0,w)=w$, 则 $h(y(t,w))=\phi_t(h(w))$ 对于 $w\in W_1$ 及 $y(t,w)\in W_1$.

定理 5.6 设Λ是S的一正常集, x_0是S的一奇点$\in\Lambda$. 则x_0在 M^n 中有任意小的邻域V具有性质:

(i) 若 $x\in\Lambda\cap V$ 且对于某一 $s>0$, $\phi_s(x)\in M^n-V$, 则正半轨线 $\{\phi_t(x)|t\in\langle s,\infty)\}$ 不再与V相交.

(ii) 若 $x\in\Lambda\cap V$ 且对于某一 $s<0$, $\phi_s(x)\in M^n-V$, 则负半轨线 $\{\phi_t(x)|t\in(-\infty,s\rangle\}$ 不再与V相交.

证 据系 3.3, x_0是双曲奇点. 考虑方程组(5.1)及拓扑变换 $h:W_1\to W_0$ 同(5.2). 为方便,换坐标系后,可设A取分块形式

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix},$$

其中 A_j 是 q_j 阶方阵，A_1 所有特征根实部都 <0，而 A_2 所有特征根实部都 >0. 把任一 $y\in E^n$ 写成 $y=(pr_1(y),\ pr_2(y))$，$pr_j(y)\in E^{q_j}$。于是对 (5.1) 的解 $y(t,w)$ ($y(0,w)=w$)，我们有

$$pr_jy(t,w)=(pr_jw)\exp(tA_j),\ j=1,2.$$

对任给的 $\xi>0$ 及 $\delta>0$，记

$$H_1(\xi)=\{y\in E^n\,|\,\|pr_1y\|=\xi,\ pr_2y=0\},$$
$$H_2(\xi)=\{y\in E^n\,|\,\|pr_2y\|=\xi,\ pr_1y=0\},$$
$$D_1(\xi)=\{y(t,w)\in E^n\,|\,w\in H_1(\xi),t>0\},$$
$$D_2(\xi)=\{y(t,w)\in E^n\,|\,w\in H_2(\xi),\ t<0\},$$
$$E_1(\xi,\delta)=\{y\in E^n\,|\,\|pr_1y\|=\xi,\ \|pr_2y\|<\delta\},$$
$$E_2(\xi,\delta)=\{y\in E^n\,|\,\|pr_2y\|=\xi,\ \|pr_1y\|<\delta\},$$
$$G_1(\xi,\delta)=\{y(t,w)\in E^n\,|\,w\in E_1(\xi,\delta),\ t>0\},$$
$$G_2(\xi,\delta)=\{y(t,w)\in E^n\,|\,w\in E_2(\xi,\delta),\ t<0\};$$

易看出

$$G(\xi,\delta)=(0)\cup D_1(\xi)\cup D_2(\xi)\cup[G_1(\xi,\delta)\cap G_2(\xi,\delta)]$$

是 E^n 中原点 O 的一邻域。考虑 x_0 在 M^n 中一任给的邻域 W。显然，我们可取 $\bar\xi>0$ 及 $\bar\delta>0$ 使得 h 将 $G(\bar\xi,\bar\delta)$ 在 E^n 中的闭包映至 $W_0\cap W$ 内. 特别地，

$$h(H_1(\bar\xi)\cup H_2(\bar\xi))\subset h(E_1(\bar\xi,\bar\delta)\cup E_2(\bar\xi,\bar\delta))\subset W_0\cap W.$$

显然，$h(E_1(\bar\xi,\bar\delta)\cup E_2(\bar\xi,\bar\delta))$中的点都是 S 的常点.

我们说，当 $\bar\delta_+\in(0,\bar\delta)$ 充分小时，$V_+=h(G(\bar\xi,\bar\delta_+))$ 具有定理叙述中的性质 (i). 事实上，设相反地，这论断不成立. 则据拓扑变换 h 的保相性质及 $G(\bar\xi,\bar\delta)$ 的构造法，存在 W_0 中一序列的点 $\{x_k\}$ 及两个数序列 $\{s_k\}$，$\{t_k\}$ 满足

$$\phi_{s_k}(x_k)\in\Lambda\cap h\left(E_2\left(\bar\xi,\ \frac{\bar\delta}{k}\right)\right),$$

$$\phi_{t_k}(x_k)\in\Lambda\cap h\left(E_1\left(\bar\xi,\ \frac{\bar\delta}{k}\right)\right),$$

$$t_k > s_k > 0,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots.$$

由是据 $H_1(\xi)$ 及 $H_2(\xi)$ 的紧致性，序列 $\{\phi_{s_k}(x_k)\}$，$\{\phi_{t_k}(x_k)\}$ 中有收敛的子序列分别收敛到 $\Lambda \cap h(H_2(\xi))$，$\Lambda \cap h(H_1(\xi))$ 中的点，并且为方便，不妨设 $\{\phi_{s_k}(x_k)\}$ 及 $\{\phi_{t_k}(x_k)\}$ 自身是收敛的，且

$$\lim_{k\to\infty} \phi_{s_k}(x_k) = \bar{x} = h(\bar{w}) \in \Lambda,\quad \bar{w} \in H_2(\xi), \tag{5.3}$$

$$\lim_{k\to\infty} \phi_{t_k}(x_k) = \bar{x}' = h(\bar{w}') \in \Lambda,\quad \bar{w}' \in H_1(\xi). \tag{5.4}$$

但方阵 A_2 的所有特征根实部都 > 0，因而对于 $\bar{w} \in H_2(\xi)$，$\lim\limits_{t\to-\infty} y(t, \bar{w}) = 0$；由是轨线 $\{\phi_t(\bar{x}) | t \in (-\infty,\ \infty)\}$ 的 α-极限集合仅由 x_0 组成．这以及系 5.3-(ii) 给出

$$\dim B_-(\bar{x}) = \dim B_-(x_0) = n - q_2 = q_1.$$

类似可看出

$$\dim B_+(\bar{x}') = \dim B_+(x_0) = q_2.$$

据系 4.4，定理 2.6-(v)，命题 2.2-(i) 及命题 2.3 我们有

$$\|\Psi_{s-t}(u)\| \geqslant \|\Psi_s(u)\| \exp(-t\eta_\Lambda)$$

对所有 $u \in B_-(\bar{x})$，$s \geqslant 0$ 及 $t \geqslant d_\Lambda$，

$$\|\Psi_{s+t}(u)\| \geqslant \|\Psi_s(u)\| \exp(-t\eta_\Lambda)$$

对所有 $u \in B_+(\bar{x}')$，$s \geqslant 0$ 及 $t \geqslant d_\Lambda$.

于是据 (5.3)，(5.4) 及 $\mathscr{D}$ 上单参数变换群 $\tilde{\Psi}_t(-\infty < t < \infty)$ 的连续性，存在充分大的 $k = k_*$ 使得对于 $x_* = \phi_{s_{k_*}}(x_{k_*})$ 及 $x'_* = \phi_{t_{k_*}}(x_{k_*})$，$\mathscr{D}_{x_*}$ 中有子线性空间 B_* 且 $\mathscr{D}'_{x_*}$ 中有子线性空间 B'_* 满足要求

$$\dim B_* = \dim B_-(\bar{x}) = q_1,\quad \dim B'_* = \dim B_+(\bar{x}') = q_2,$$

$$\|\Psi_{-d_\Lambda}(u)\| \geqslant \|u\| \exp(-d_\Lambda \eta_\Lambda / 2) \text{ 对所有 } u \in B_*,$$

$$\|\Psi_{d_\Lambda}(u)\| \geqslant \|u\| \exp(-d_\Lambda \eta_\Lambda / 2) \text{ 对所有 } u \in B'_*.$$

但据命题 2.1，对于 $t_* = t_{k_*} - s_{k_*}$，$\Psi_{t_*}(B_*)$ 也是 $\mathscr{D}'_{x_*}$ 中一 q_1 维子线性空间．于是因

$$q_1 + q_2 = n > \dim \mathscr{D}'_{x_*} = n - 1,$$

必有一 $u_* \in B'_*$，$\|u_*\| = 1$，使得 $\Psi_{-t_*}(u_*) \in B_*$．换句话说，我

们有 $u_* \in \mathscr{D}'_{x_*}$，$\|u_*\| = 1$，使得

$$\|\Psi_{d_\Lambda}(u_*)\| \geqslant \|u_*\| \exp(-d_\Lambda \eta_\Lambda/2)$$

且

$$\|\Psi_{-d_\Lambda - t_*}(u_*)\| \geqslant \|\Psi_{-t_*}(u_*)\| \exp(-d_\Lambda \eta_\Lambda/2),$$

其中 $t_* = t_{k_*} - s_{k_*} > 0$。但这将引出与定理 2.6-(v) 相矛盾的结论。这矛盾证明我们的断语。

类似可证，当 $\bar{\delta}_- \in (0,\bar{\delta})$ 充分小时，$V_- = h(G(\xi,\delta_-))$ 具有定理叙述中的性质 (ii)。所以可取充分小的 $\delta_0 \in (0,\delta)$ 使 $V = h(G(\xi,\delta_0))$ 满足定理结论中要求。定理 5.6 证完。

对于 M^* 中在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变的闭子集 Λ，记 Ω_Λ 为 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 限制在 Λ 上时的非游荡集。显然 Ω_Λ 包含 S 所有属于 Λ 的奇点。

系 5.7 设 Λ 是 S 的一正常集。则 S 的每一属于 Λ 的奇点都是 Ω_Λ 的一孤立点。

证 设 x_0 是 S 的一奇点 $\in \Lambda$。则 x_0 是一双曲奇点。考虑拓扑变换 h: $W_1 \to W_0$ 同(5.2)中。据 h 的保相性及 W_1 的有界性，易看出 W_0 不含有 S 除 x_0 以外的任一整条轨线。又取 x_0 在 M^* 中的一邻域 V，它的闭包 H 包含在 W_0 内，且它具有定理 5.6 所述的性质 (i) 及 (ii)。

于是，若 $x_1 \in V \cap \Lambda$，$x_1 \neq x_0$，则或存在一 $s_+ > 0$ 使 $\phi_{s_+}(x_1) \in M^* - H$，或存在一 $s_- < 0$ 使 $\phi_{s_-}(x_1) \in M^* - H$。用定理 5.6-(i) 及 (ii) 及变换群 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 的连续性，可看出 x_1 不 $\in \Omega_\Lambda$。证完。

下面定理补充定理 4.7。

定理 5.8 设 Λ 是 S 的一正常集。任给 $x \in \Lambda^1$。则

(i) 我们有极限式

$$\lim_{t \to -\infty} (t + s_+^*(C_-(\phi_t(x)) \cap \mathscr{D})) = -\infty,$$

$$\lim_{t \to \infty} (t + s_-^*(C_+(\phi_t(x)) \cap \mathscr{D})) = \infty.$$

(ii) $\mathscr{D}_x = C_-(x) \oplus C_+(x)$ 且

$$\|\phi_{s+t}(u)\| \leqslant \|\phi_s(u)\|\exp(\eta_A t/2)$$

对所有 $u\in C_-(x)$ 及 $s\in(-\infty,\infty)$, $t\geqslant e_A$,

$$\|\phi_{s-t}(u)\| \leqslant \|\phi_s(u)\|\exp(\eta_A t/2)$$

对所有 $u\in C_+(x)$ 及 $s\in(-\infty,\infty)$, $t\geqslant e_A$.

证 据定理 4.7，这里 (ii) 可直接从 $x\in A^1$ 这假设及 (i) 导出. 只余证 (i)。

因 $x\in A^1$，故 $\dim(C_-(x)\cap C_+(x))=0$，由是 $C_-(x)\cap\mathscr{D}$ 与 $C_+(x)\cap\mathscr{D}$ 是 $\mathscr{D}_x$ 中不相交的紧致子集. 这蕴涵存在一数 $\lambda_x>0$, $\lambda_x<1$，使得

$|\langle u_1,u_2\rangle|\leqslant\lambda_x$ 对所有 $u_1\in C_-(x)\cap\mathscr{D}$ 及 $u_2\in C_+(x)\cap\mathscr{D}$.

所以任一 $u\in C_-(x)\cap\mathscr{D}$ 可表成 $u=u'+u''$，其中 $u'\in B_-(x)$，$u''\in C_+(x)$，满足 $1\geqslant\|u'\|\geqslant\lambda_x^*=(1-\lambda_x^2)^{\frac{1}{2}}>0$. 从而应用命题 2.2-(iii) 及定理 2.6，我们有

$$\|\phi_{-t}(u)\|\geqslant\|\Psi_{-t}(u')\|\geqslant\|u'\|\exp(-\eta_A t)\geqslant\lambda_x^*\exp(-\eta_A t)$$

$$\text{对所有 } u\in C_-(x)\cap\mathscr{D}\text{ 及 } t\geqslant d_A, \tag{5.5}$$

其中 $\eta_A<0$.

设相反地，定理中第一个极限式不成立. 则据 (4.7) 易看出，存在一数 $\bar{s}_0$，及两个序列的数 $\{t_k\}$ 及 $\{\xi_k\}$，以及 $C_-(x)\cap\mathscr{D}$ 中的序列 $\{u_k\}$ 满足

$$\lim_{k\to\infty}t_k=-\infty,\quad t_k+\xi_k>\bar{s}_0,\quad \tilde{\Psi}_{\xi_k}(\bar{u}_k)\in\Pi^*(A),$$

其中

$$\bar{u}_k=\phi_{t_k}(u_k)/\|\phi_{t_k}(u_k)\|\in C_-(\phi_{t_k}(x))\cap\mathscr{D},$$
$$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots.$$

又据变换群 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 的连续性及 $C_-(x)\cap\mathscr{D}$ 的紧致性，可取一数 $\bar{m}>0$ 使 $\|\phi_{\bar{s}_0}(u)\|\leqslant\bar{m}$ 对所有 $u\in C^-(x)\cap\mathscr{D}$. 于是应用命题 2.2-(iii) 及定理 2.6，对于充分大的 k 我们有

$$\frac{\|\phi_{\bar{s}_0}(u_k)\|}{\|\phi_{t_k}(u_k)\|}=\|\phi_{\bar{s}_0-t_k}(\bar{u}_k)\|\geqslant\|\Psi_{t-t_k}(\bar{u}_k)\|$$

$$\geqslant\exp(-\eta_A(\bar{s}_0-t_k)),$$

因而 $\|\psi_{t_k}(u_k)\| \leqslant \|\psi_{s_0}(u_0)\| \exp(\eta_\Lambda(\bar{s}_0 - t_k)) \leqslant \bar{m} \exp(\eta_\Lambda(\bar{s}_0 - t_k))$. 这以及 $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = -\infty$ 将引出与(5.5)相矛盾的结论. 这证明第一个极限式. 类似可证第二个极限式. 定理证完.

设 Λ 为 S 的一正常集. 命 Ω_Λ^* 为 S 所有具有下述性质的常点 $x \in \Lambda^1$ 作成的集合,即,轨线 $\{\phi_t(x) | t \in (-\infty, \infty)\}$的 ω- 极限集合及 α- 极限集合都不含有 S 的奇点. 显然 Ω_Λ^* 在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变.

定理 5.9 设 Λ 为 S 的一正常集. 则

(i) Ω_Λ^* 是 Λ 中一闭子集,且对每一 $x \in \Omega_\Lambda^*$, $\mathscr{C}_x = F_-(x) \oplus F_+(x) \oplus \{S(x)\}$.

(ii) 存在数 $\lambda_\Lambda > 0$ 及 $\mu_\Lambda < 0$ 使得对每一 $x \in \Omega_\Lambda^*$,

$$\|\Phi_t(u)\| \leqslant \lambda_\Lambda \|u\| \exp(\mu_\Lambda t) \text{ 对所有 } u \in F_-(x) \text{ 及 } t \geqslant 0,$$
$$\|\Phi_{-t}(u)\| \leqslant \lambda_\Lambda \|u\| \exp(\mu_\Lambda t) \text{ 对所有 } u \in F_+(x) \text{ 及 } t \geqslant 0; \tag{5.6}$$

S 在 Ω_Λ^* 上具有双曲型构造.

证 据 Ω_Λ^* 的定义及定理 4.12, 对每一 $x \in \Omega_\Lambda^*$ 我们有 $\mathscr{D}_x = B_-(x) \oplus B_+(x) = C_-(x) \oplus C_+(x)$, 由是 $\mathscr{C}_x = F_-(x) \oplus F_+(x) \oplus \{S(x)\}$. 据系 5.7 可取 Λ^0 在 M^n 中一邻域W使 $W \cap \Omega_\Lambda = \Lambda^0$. 于是因过每一 $x \in \Omega_\Lambda^*$ 的轨线 $\{\phi_t(x) | t \in (-\infty, \infty)\}$ 的 ω 及 α-极限集合都 $\subset \Omega_\Lambda - \Lambda^0$, 用引理 4.9, 系 4.4, 定理 2.6 及定理 5.1, 易看出 Ω_Λ^* 在 Λ 中闭.

我们将指出,对于 $x \in \Omega_\Lambda^*$ 来说,给在定理 4.12-(iii) 中的数 ζ_x 及 T_x 可如是取使得它们仅由 Λ 确定. 由是据变换群 $\Phi_t: \mathscr{C} \to \mathscr{C}(-\infty < t < \infty)$ 的连续性及球丛$\mathscr{C}$的紧致性, 我们可立即看出这里 (5.6) 成立对于某 $\lambda_\Lambda > 0$ 及 $\mu_\Lambda < 0$.

为此,对每一 $x \in \Omega_\Lambda^*$ 取 M^n 在 x 处的一正规 n-标架 β_x 使 $\mathrm{proj}_1 \beta_x = S(x)/\|S(x)\|$, 且 $\mathrm{proj}_{k+1}\beta_x \in C_-(x)$ 对 $1 \leqslant k \leqslant \dim C_-(x)$, 并对每一这样的 $\beta = \beta_x$ 考虑方程组(4.17)及(4.18). 因 Ω_Λ^* 在 Λ 中闭,且不含有 S 的奇点,所以

$$0 < \inf_{x \in \Omega_A^*} \|S(x)\| \leqslant \sup_{x \in \Omega_A^*} \|S(x)\| < \infty,$$

从而有

$$\sup_{x \in \Omega_A^*, t \in (-\infty, \infty)} \left| \int_0^t \omega_1(\chi_{t'}^{\#}(\beta_x)) dt' \right| < \infty.$$

又 $\|\mathrm{proj}_{k+1} \chi_{s+t}^{\#}(\beta_x)\| \leqslant \|\Phi_t(\mathrm{proj}_{k+1} \chi_s^{\#}(\beta_x))\|$ (见 [1, 命题 1.1]), $1 \leqq k \leqslant \dim C_-(x)$, 所以据定理 5.8-(ii) 有

$$\sup_{\substack{x \in \Omega_A^*, 1 \leqslant k \leqslant \dim C_-(x) \\ s \in (-\infty, \infty), t \geqslant c_A}} \frac{1}{t} \int_0^t \omega_{k+1}(\chi_{s+t'}^{\#}(\beta_x))\, dt' \leqslant \frac{\eta_A}{2},$$

并且 $R_\gamma(t)$ 作为 (t, γ) 的方阵函数,在 $(-\infty, \infty) \times \mathscr{F}_{\#}^{\#}$ 上有界(见 [1, 命题 1.4]). 我们于是用 4.12-(iii) 证明中同样方式,并引用 [1, 引理 3.6], 可得出结论: 存在数 $\zeta_{A-} < 0$ 及 $T_{A-} > 0$ 使得 $\|\Phi_{s+t}(u)\| \leqslant \|\Phi_s(u)\| \exp(\zeta_{A-} t)$ 对所有 $u \in F_-(x)$, $x \in \Omega_A^*$, $s \geqslant 0$ 及 $t \geqslant T_{A-}$. 同样可证, 存在数 $\zeta_{A+} < 0$ 及 $T_{A+} > 0$ 使得 $\|\Phi_{s-t}(u)\| \leqslant \|\Phi_s(u)\| \exp(\zeta_{A+} t)$ 对所有 $u \in F_+(x)$, $x \in \Omega_A^*$, $s \geqslant 0$ 及 $t \geqslant T_{s+}$. 这样就可看出满足 (5.6) 中要求的 $\lambda_A > 0$ 及 $\mu_A < 0$ 的存在. 又 $\Phi_t(F_-(x)) = F_-(\phi_t(x))$ 及 $\Phi_t(F_+(x)) = F_+(\phi_t(x))$ 恒成立. 故 S 在 Ω_A^* 上有双曲型构造. 证完.

注 要使 S 在 M^* 中一不含有奇点的闭子集 F 上有双曲型构造,照目前一般文献中仍经常见到的说法(比如 [2] 中所引述的那样),除开部分丛 $\mathscr{C} | F$ 须有直和分解,它在 $\Phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变,且满足像这里 (5.6) 一类的不等式以外, 还要求这直和分解是丛分解. 但实际上,丛分解是其他条件的自然结论,也极易推证. 不妨仍取这里的 Ω_A^* 为例. 据定理 5.1, Ω_A^* 分成彼此互不相交且都在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变诸闭子集 $\Omega_A^*(q, r) = \Omega_A^* \cap \Lambda_{q,r}^1$ 的集合和. 考虑一任给的 $\Omega_A^*(q, r)$. 明显地, 对所有 $x \in \Omega_A^*(q, r)$, $\mathscr{C}_x$ 中的子线性空间 $F_-(x)$ 及 $F_+(x)$ 都分别具有相同的维数 q 与 r. 考虑部分丛 $\mathscr{C} | \Omega_A^*(q, r)$ 的直和分解

$\mathscr{C} | \Omega_A^*(q, r) = \mathscr{C}_-(q, r) \oplus \mathscr{C}_+(q, r) \oplus \mathscr{C}_0(q, r)$, 其中

$$\mathscr{C}_-(q,r)=\bigcup_{x\in\Omega_\Lambda^*(q,r)} F_-(x),\ \mathscr{C}_+(q,r)=\bigcup_{x\in\Omega_\Lambda^*(q,r)} F_+(x),$$

$$\mathscr{C}_0(q,r)=\bigcup_{x\in\Omega_\Lambda^*(q,r)}\{S(x)\}.$$

显然这分解在 $\Phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变. 要看出这是一丛分解,只须证明,一任给的 $x_0\in\Omega_\Lambda^*(q,r)$ 都有在 $\Omega_\Lambda^*(q,r)$ 中的邻域 U_- 及 U_+,其上分别有到 q- 标架从 $\mathscr{U}_q$ 及 r- 标架从 $\mathscr{U}_r$ 的截面

$$f_-:U_-\to\mathscr{U}_q,\ f_+:U_+\to\mathscr{U}_r$$

使得 $\mathrm{proj}_k f_-(x)\in F_-(x)$ 对 $1\leqslant k\leqslant q$, $\mathrm{proj}_k f_+(x)\in F_+(x)$ 对 $1\leqslant k\leqslant r$. 为此,考虑以 M^n 为底空间的 Grassmann 从 $\mathfrak{C}^q$, 这从在任一点 $x\in M^n$ 处的纤维是由 $\mathscr{C}_x$ 中所有 q 维子线性空间构成的 Grassmann 流形. M^n 在任一点 x 处的一 q- 标架张开 $\mathscr{C}_x$ 中一 q 维子线性空间;这给出一个从映射: $\mathscr{U}_q\to\mathfrak{C}^q$, 它有局部截面(见 [10]).另一方面,由于(5.6)并据 $\mathscr{C}$ 上变换群 $\Phi_t(-\infty<t<\infty)$ 的连续性,易看出 $g_-(x)=F_-(x)$ 对 $x\in\Omega_\Lambda^*(q,r)$ 给出 $\Omega_\Lambda^*(q,r)$ 上一截面 $g_-:\Omega_\Lambda^*(q,r)\to\mathfrak{C}^q$. 从这些易验证所需局部截面 f_- 的存在. 类似可看出所需局部截面 f_+ 的存在.

现在,我们顺便可给出关于双曲型构造的形式较简单的等价条件.

系 5.10 对于 M^n 中在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变的闭子集 Λ, 我们有:

(i) S 在 Λ 上有双曲型构造当且仅当

$$\mathscr{C}_x=F_-(x)\oplus F_+(x)\oplus\{S(x)\}\ \text{对每一}\ x\in\Lambda, \tag{5.7}$$

且在这情况下,Λ 分解成互不相交的闭子集 Λ^0 及 Ω_Λ^* 的集合和;

(ii) 在 Λ 不含有 S 的奇点这情况下, S 在 Λ 上有双曲型构造当且仅当

$$\mathscr{D}_x=D_-(x)\oplus D_+(x),\ \text{对每一}\ x\in\Lambda. \tag{5.8}$$

证 若 S 在 Λ 上具有双曲型构造,显然(5.7)成立(见 [2,

§1]）. 其逆，设(5.7)成立. 则据系 4.13, $\Lambda\cap(I(S)\cup Ob(S))=0$，从而 S 的每一属于 Λ 的奇点都是双曲的；又据定理 4.12-(ii)，过任一常点 $\bar{x}\in\Lambda$ 的轨线的 ω- 极限集合及 α- 极限集合都不含有 S 的奇点，并且 $\mathscr{C}_{\bar{x}}=C_-(\bar{x})\oplus C_+(\bar{x})\oplus\{S(\bar{x})\}$ 由是 $\mathscr{D}_{\bar{x}}=C_-(\bar{x})\oplus C_+(\bar{x})$. 这后者蕴涵 $\bar{x}\in\Lambda^1$. 故 $\bar{x}\in\Omega^*_\Lambda$. 用定理 5.9 即看出 S 在 Λ 上有双曲型构造.

现证 (ii). 设 Λ 不含有 S 的奇点. 若 S 在 Λ 上有双曲型构造，则如上段所证，有 $\mathscr{D}_x=C_-(x)\oplus C_+(x)$ 对 $x\in\Lambda$，结合 (4.23) 给出 (5.8). 其逆，设 (5.8) 成立. 则据系 4.13 $\Lambda\cap(I(S)\cup Ob(S))=0$，从而有 (4.23). 这以及 (5.8) 给出 $\Lambda\subset\Lambda^1-\Lambda^2$. 由是 $\Lambda=\Omega^*_\Lambda$. 据定理 5.9, S 在 Λ 上有双曲型构造. 证完.

如通常，S 将称为一 Anosov 系统，如果它在 M^n 上有双曲型构造. 故从系 5.10 可得

系 5.11 S 是 M^n 上一 Anosov 系统当且仅当

$$\mathscr{C}_x=F_-(x)\oplus F_+(x)\oplus\{S(x)\} \text{ 对每一 } x\in M^n.$$

末了，对于 M^n 中在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变的闭子集 Λ，仍考虑 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 限制在 Λ 上时的非游荡集 Ω_Λ.

定理 5.12 设 Λ 为 S 的一正常集. 则 S 在 Ω_Λ 上有双曲型构造，且存在数 $\eta_\Lambda<0$ 及 $\bar{d}_\Lambda>0$ 以及 Λ 中一个不含有 S 的奇点的闭子集 $\bar{F}_\Lambda\supset\Omega_\Lambda-\Lambda^0$ 使得：

只要 x 是 S 的一常点 $\in\Omega_\Lambda$, $G_-(x)$ 及 $G_+(x)$ 分别是 $C_-(x)\cap\widetilde{\mathscr{D}}$ 及 $C_+(x)\cap\widetilde{\mathscr{D}}$ 在 $\widetilde{\mathscr{D}}$ 中的邻域，且 s_0 是一数 $\geqslant\bar{d}_\Lambda$，即有一经过一点 $y\in\bar{F}_\Lambda$ 的轨弧

$$\{\phi_t(y)\mid t\in\langle 0,s_1\rangle\}\subset\bar{F}_\Lambda \text{ 对一 } s_1\in(s_0,\infty),$$

满足要求

(i) $\mathscr{D}_y$ 有直和分解 $\mathscr{D}_y=N_-(y)\oplus N_+(y)$，且

$$N_-(y)\cap\widetilde{\mathscr{D}}\subset G_-(x),\quad \phi_{s_1}(N_-(y))\cap\widetilde{\mathscr{D}}\subset G_-(x),$$
$$N_+(y)\cap\widetilde{\mathscr{D}}\subset G_+(x),\quad \phi_{s_1}(N_+(y)\cap\widetilde{\mathscr{D}}\subset G_+(x);$$

(ii) 对任给的 $s\geqslant 0$, $t\geqslant\bar{d}_\Lambda$ 及 $s+t\leqslant s_1$ 我们有

$$\|\phi_{s+t}(u)\|\leqslant\|\phi_s(u)\|\exp(\eta_\Lambda t) \quad \text{对所有 } u\in N_-(y),$$

$$\|\phi_{s+t}(u)\| \geqslant \|\phi_s(u)\|\exp(-\eta_A t) \text{ 对所有 } u \in N_+(y)。$$

证 取 $\bar{\eta}_A = \eta_A/4$。又取 $\bar{d}_A = \xi(\eta_A/2, d_A)$ 给出同引理 4.6 中(对于 $\eta = \eta_A/2$ 及 $d = d_A$)。要给出$\bar{F}_A$,我们考虑 $\bar{\Omega}_A = \Omega_A - A^0$。由于 A^0 中每一点都是 Ω_A 的一孤立点(系 5.7),故 $\bar{\Omega}_A$ 是 A 中一闭子集不含有 S 的奇点,且在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变.我们于是取 $\bar{\Omega}_A$ 在 M^* 中的一邻域 U 使它的闭包 F 与 A^0 不相交.又 A^0 仅由 S 的一些双曲奇点组成,因而仅含有有限个数的点 x_1, $x_2, \cdots, x_p$。据引理 4.9,每一 x_i 都有一个在 M^* 中的邻域 $V_i \subset M^* - F$ 且有一数 $\xi_i > 0$ 具有性质:只要 x_0 是 S 的一常点 $\in V_i$,且 $\phi_{T_-}(x_0)$ 及 $\phi_{T_+}(x_0) \in F$ 对于某 $T_- < 0$ 及 $T_+ > 0$,即有一点 $x_0' = \phi_{T_0}(x_0)$,$T_- \leqslant T_0 \leqslant T_+$,使得 $S(x_0')$ 不能在 $(-\xi_i, \xi_i)$ 上是 $(\eta_A/2, d_A)$-正规的。于是命

$$\bar{F}_A = A - \bigcup_{i=1,2,\cdots,p} V_i.$$

显然,$\bar{F}_A$ 是 A 中一闭子集不含有 S 的奇点,且$\supset A \cap F \supset A \cap U \supset \bar{\Omega}_A$。又记

$$\xi = \max\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_p\}.$$

我们将证明 $\bar{\Omega}_A \subset \Omega_A^*$,从而据定理 5.9,$S$ 在 $\bar{\Omega}_A$ 上有双曲构造。于是因 A^0 由 S 所有在 A 内的奇点组成,而每个这样的奇点都是双曲的,S 在 Ω_A 上也就有双曲构造。

为此,任给 $x \in \bar{\Omega}_A$。考虑 $\mathscr{D}_x$ 中的子线性空间 $B_-(x)$ 及 $B_+(x)$。因 $B_-(x) \cap B_+(x) = (0)$,可取 $\mathscr{D}_x$ 中一子线性空间 $\bar{B}_-(x) \supset B_-(x)$ 使

$$\mathscr{D}_x = B_+(x) \oplus \bar{B}_-(x).$$

于是据系 4.4 及定理 4.3,$\bar{B}_-(x) \cap \hat{\mathscr{D}}$ 是 $\Pi(A)$ 中一闭子集 $\subset \Pi_-(A) \cup \widehat{\Pi}(A)$,从而据引理 4.5,我们有

$$s^* = s_*^*(\bar{B}_-(x) \cap \hat{\mathscr{D}}) < \infty.$$

又据非游荡点的性质,我们可取 A 中一序列的点 $\{x_k\}$ 及一数序列 $\{t_k\}$,$t_k > 0$,使

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x = \lim_{k\to\infty}\phi_{t_k}(x_k),\quad \lim_{k\to\infty} t_k = \infty.$$

简记 $y_k = \phi_{t_k}(x_k)$. 显然可设

$$x_k \text{ 及 } y_k \in \Lambda\cap U,\quad k = 1, 2, 3 \cdots.$$

由是这些 x_k 及 y_k 都是 S 的常点.

因 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$，我们可取 $\mathscr{D}_{x_k}$ 中一子线性空间 $\bar{B}_-(x_k)$，其维数 $=\dim\bar{B}_-(x)$，且$\mathscr{D}$中集合序列 $\{\bar{B}_-(x_k)\cap\mathscr{D}\}$ 上收敛到 $\bar{B}_-(x)\cap\mathscr{D}$. 于是据 s_Λ^* 的定义 (4.7) 及定理 2.6-(iii)，易看出 $s_\Lambda^*(\bar{B}_-(x_k)\cap\mathscr{D}) < d_\Lambda + \max\{0,s^*\}$ 对充分大的 k. 不妨设这不等式对所有 $k = 1, 2, 3, \cdots$ 都成立。于是据定理 2.6-(v),

$$\|\Psi_{s+t}(u)\| \leqslant \|\Psi_s(u)\|\exp(\eta_\Lambda t) \text{ 对所有}$$

$$u\in\Psi_{d_\Lambda+\max\{0,s^*\}}(\bar{B}_-(x_k)),\ s\geqslant 0 \text{ 及}$$

$$t\geqslant d_\Lambda,\ k = 1, 2, 3, \cdots \tag{5.9}$$

又从 $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = x$，易看出 $\mathscr{D}_x$ 中有一子线性空间 $\bar{\bar{B}}_-(x)$，其维数 $=\dim\bar{B}_-(x)$，使得集合序列 $\{\Psi_{t_k}(\bar{B}_-(x_k))\cap\mathscr{D}\}$ 有子序列上收敛到 $\bar{\bar{B}}_-(x)\cap\mathscr{D}$. 于是因 $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = \infty$，据$\mathscr{D}$上单参数变换群 $\Psi_t(-\infty < t < \infty)$ 的连续性及 (5.9) 并应用定理 2.6，我们看出 $\bar{\bar{B}}_-(x)\subset B_-(x)$，因而 $\dim\bar{B}_-(x) \leqslant \dim B_-(x)$. 又 $\bar{B}_-(x)\supset B_-(x)$ 蕴涵 $\dim\bar{B}_-(x)\geqslant\dim B_-(x)$. 所以 $\bar{B}_-(x) = B_-(x)$，从而

$$\mathscr{D}_x = B_+(x)\oplus B_-(x),$$

亦即 $x\in\Lambda^1-\Lambda^0$. 但 $x\in\bar{\Omega}_\Lambda$，而 $\bar{\Omega}_\Lambda$ 是Λ中一闭子集，不含有 S 的奇点，且在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变. 故轨线 $\{\phi_t(x)\mid t\in(-\infty, \infty)\}$ 的 ω-极限集合及 α-极限也都不含有 S 的奇点，由是 $x\in\Omega_\Lambda^*$. 这证明 $\bar{\Omega}_\Lambda\subset\Omega_\Lambda^*$.

任给 $\xi\in(-\infty,0)$. 在上段证明中，既然有 $\bar{B}_-(x) = B_-(x)$，我们也就有 $s^* = -\infty$ (参看 (4.7) 式). 但 $\{\bar{B}_-(x_k)\cap\mathscr{D}\}$ 上收敛到 $\bar{B}_-(x)\cap\mathscr{D}$. 故从变换群 $\Psi_t(-\infty < t < \infty)$ 的连续性及$\mathscr{D}$的紧致性，并应用定理 2.6，我们也可看出，当 k 充分大时，

$$\|\Psi_{s+t}(u)\| \leqslant \|\Psi_s(u)\|\exp(\eta_\Lambda t/2) \text{ 对所有}$$

$$u \in \bar{B}_-(x_k),\ s \geqslant \xi \text{ 及 } t \geqslant d_A. \tag{5.10}$$

又在上段证明中，$\bar{\bar{B}}_-(x) \subset B_-(x) = \bar{B}_-(x)$ 及 $\dim\bar{\bar{B}}_-(x) = \dim\bar{B}_-(x)$ 蕴涵 $\bar{\bar{B}}_-(x) = B_-(x)$。于是我们容易推导出这样的结论：对每一 $k = 1, 2, 3, \cdots$，可取 $\mathscr{D}_{x_k}$ 中一子线性空间 $\bar{B}_-(x_k)$，其维数 $= \dim B_-(x)$，使得在$\tilde{\mathscr{D}}$中，集合序列 $\{\bar{B}_-(x_k) \cap \tilde{\mathscr{D}}\}$ 及 $\{\Psi_{t_k}(\bar{B}_-(x_k)) \cap \tilde{\mathscr{D}}\}$ 都上收敛到 $B_-(x) \cap \tilde{\mathscr{D}}$，且使得 (5.10) 成立对于充分大的 k。

类似地我们也可证明：对每一 $k = 1, 2, 3, \cdots$，可取 $\mathscr{D}_{y_k}$ 中一子线性空间 $\bar{B}_+(y_k)$，其维数 $= \dim B_+(x)$，使得在$\tilde{\mathscr{D}}$中，集合序列 $\{\bar{B}_+(y_k) \cap \tilde{\mathscr{D}}\}$ 及 $\{\Psi_{-t_k}(\bar{B}_+(y_k)) \cap \tilde{\mathscr{D}}\}$ 都上收敛到 $B_+(x) \cap \tilde{\mathscr{D}}$，且使得当 k 充分大时，

$$\|\Psi_{s+t}(u)\| \leqslant \|\Psi_s(u)\| \exp(\eta_A t/2)$$

$$\text{对所有 } u \in \bar{B}_+(y_k),\ s \leqslant -\xi \text{ 及 } t \leqslant -d_A. \tag{5.11}$$

从所取 $\bar{B}_-(x_k)$ 及 $\bar{B}_+(y_k)$ 的性质，显然有

$$\mathscr{D}_{x_k} = \bar{B}_-(x_k) \oplus \Psi_{-t_k}(\bar{B}_+(y_k))$$

对充分大的 k。对每一 $k = 1, 2, 3, \cdots$，命

$$N_+(x_k) = ⊛\bar{B}_-(x_k),\ N_-(x_k) = ⊛\Psi_{-t_k}(\bar{B}_+(y_k)).$$

则在$\tilde{\mathscr{D}}$中，集合序列 $\{N_-(x_k) \cap \tilde{\mathscr{D}}\}$ 及 $\{N_+(x_k) \cap \tilde{\mathscr{D}}\}$ 分别上收敛到 $C_-(x) \cap \tilde{\mathscr{D}}$ 及 $C_+(x) \cap \tilde{\mathscr{D}}$，集合序列 $\{\phi_{t_k}(N_-(x_k)) \cap \tilde{\mathscr{D}}\}$ 及 $\{\phi_{t_k}(N_+(x_k) \cap \tilde{\mathscr{D}}\}$ 也分别上收敛到 $C_-(x) \cap \tilde{\mathscr{D}}$ 及 $C_+(x) \cap \tilde{\mathscr{D}}$。并且，因 $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = \infty$，据 (5.10) 及 (5.11)，并应用引理 4.6，对于 $\eta_A = \eta_A/4$ 及 $\tilde{d}_A = \xi(\eta_A/2, d_A)$，我们有：当 k 充分大时，

$$\|\phi_{s+t}(u)\| \leqslant \|\phi_s(u)\| \exp(\eta_A t)$$

$$\text{对所有 } u \in N_-(x_k),\ s \geqslant 0,\ t \geqslant \tilde{d}_A \text{ 及 } s + t \leqslant t_k,$$

$$\|\phi_{s+t}(u)\| \geqslant \|\phi_s(u)\| \exp(-\eta_A t)$$

$$\text{对所有 } u \in N_+(x_k),\ s \geqslant 0,\ t \geqslant \tilde{d}_A \text{ 及 } s + t \leqslant t_k.$$

我们说，当 k 充分大时，轨弧

$$P(x_k) = \{\phi_t(x_k) \mid t \in \langle 0, t_k \rangle\} \subset \bar{F}_A.$$

事实上，若相反地，$P(x_k)$ 与某一 V_i 相交于一点 $\phi_{s_k}(x_k)$，$s_k \in$

$\langle 0, t_k \rangle$，则因 x_k 及 y_k 都 $\in \Lambda \cap U \subset F$，据 V_i 的作法我们有 $s'_k \in \langle 0, t_k \rangle$ 使得 $S(\phi^{s'_k}(x_k))$ 不能在 $(-\xi_i, \xi_i)$ 上是 $(\eta_\Lambda/2, d_\Lambda)$- 正规的. 可是，另一方面，据 (5.10) 及 (5.11)（于是中取 $\xi = -d_\Lambda - \xi$），我们又看出对于充分大的 k，$S(\phi^{s'_k}(x_k))$ 在 $(-\xi_i, \xi_i)$ 上是 $(\eta_\Lambda/2, d_\Lambda)$-正规的. 这是一矛盾. 这证断语.

现在，根据这些 $N_-(x_k)$，$N_+(x_k)$ 及 $P(x_k)$ 的性质易完成定理 5.12 的证明.

附记 在本文投稿后，作者获知 R. Mañé 在 Geometry and Topology, Lecture Notes in Math., 597 (1977), 389—394 中，有关于强匀断蕴涵公理 A 这事实在微拓变换这特款下的一个证明. 另外，对于常微系统这一般情况下的这事实，以及一个进一步较广泛的结果，我们也已证明在北京大学学报(自然科学)，1979，第 1 期，17—18 页中.

参 考 文 献

[1] 廖山涛，典范方程组，数学学报，**17** (1974)，100—109；175—196；270—295（即本书第二章）.

[2] 廖山涛，阻碍集与强匀断条件，数学学报，**19** (1976)，203—209（即本书第三章）.

[3] В. В. 涅梅茨基及 В. В. 斯捷巴诺夫，微分方程定性论，下册，科学出版社，1959.

[4] Newhouse, S., On simple arcs between structurally stable flows, Dynamical Systems-Warwick 1974, Lecture Notes in Math., 468, Springer-Verlag, 1975, 209—233.

[5] Robbin, J., A structural stability theorem, *Ann. of Math.*, **94** (1971), 447—493.

[6] Robbin, J., Topological conjugacy and structural stability for discrete dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 78(1972), 923—952.

[7] Robinson, C., Structural stability of vector fields, *Ann. of Math.*, (2), **99** (1974), 154—175.

[8] Robinson, C., Structural stability for C^1 flows, Dynamical Systems-Warwick 1974, Lecture Notes in Math., 468, Springer-Verlag, 1975, 262—277.

[9] Smale, S., Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747—817.

[10] Steenrod, N., The Topology of Fibre Bundles, Princeton, 1951.

第五章　关于稳定性推测

§1. 引言和主要结果的叙述

设 M^n 为一 n 维紧致的 C^∞ Riemann 流形，$\mathrm{Diff}^1(M^n)$ 为 M^n 上所有 C^1 微分同胚作成的空间，赋以 C^1 拓扑．一给定的 $f\in \mathrm{Diff}^1(M^n)$ 称为结构稳定的，若 $\mathrm{Diff}^1(M^n)$ 中在 f 附近的每个 g 都等价于 f；f 称为 Ω- 稳定的，若对于 f 附近的每个 g，$g|\Omega(g)$ 等价于 $f|\Omega(f)$，这里 $\Omega(f)$ 表示 f 的非游荡集．离散的微分动力学理论的一个主要问题是寻求结构稳定和 Ω- 稳定的微分同胚的特征．解决这个问题通常是困难的．Smale 曾在多年前推测，$f\in \mathrm{Diff}^1(M^n)$ 为 Ω- 稳定的一个必要且充分的条件是 f 满足公理 A 及无环性条件，而 f 为结构稳定的一个必要且充分的条件是 f 满足公理 A 及强横截性[1)]条件．此后，两个充分性部分分别由 Smale[19] 和 Robbin-Robinson[14,15] 证得．但在 $\dim M^n \geqslant 2$ 时的必要性部分，即所谓稳定性推测，仍未解决；直到最近，Mañé[8] 才对 $\dim M^2=2$ 情形在非游荡集 $\Omega(f)$ 恰等于 M^2 这一附加条件下证得其必要性．

本文的一个主要目的是对 $\dim M^n=2$（在没有 $\Omega(f)=M^2$ 这个假定下）证明稳定性推测．我们的主要结果如下：

定理1.1　设 $f\in \mathrm{Diff}^1(M^2)$．则 f 为 Ω-稳定的必要条件是 f 满足公理 A 及无环性，而 f 为结构稳定的必要条件是 f 满足公理 A 及强横截性．

定理1.2　$f\in \mathrm{Diff}^1(M^2)$ 为 Ω- 稳定的必要且充分条件是 $f\in \mathscr{F}^*(M^2)$．

这里 $\mathscr{F}^*(M^n)$ 表示具有下述性质的所有微分同胚 $g\in$

1）"横截"与"匀断"（后者，例如，见第三章）为同义词．

$\mathrm{Diff}^1(M^n)$ 作成的集合，即存在 g 的一邻域 G 使得 $h\in G$ 的所有周期点都是双曲的（或等价地，每一 $h\in G$ 都至多只有可数个周期点）。若 $f\in\mathscr{F}^*(M^n)$，则 f 的周期点在 $\Omega(f)$ 中稠密[8]。

若微分同胚 $f\in\mathrm{Diff}^1(M^2)$ 用 $\mathrm{Diff}^1(M^1)$ 中的微分同胚来代替，定理 1.2 仍然成立. 事实上，对于 $f\in\mathrm{Diff}^1(M^1)$ 运用[11，第 1 章]中的论证来证明 $f\in\mathscr{F}^*(M^1)$ 当且仅当 f 为结构稳定，且又，当且仅当 f 为 Ω-稳定，这是件平凡的事情. 因而，[8，第383页]中提到的问题在 $\dim M^n\leqslant 2$ 情形有了肯定的答覆，而 [5，第 318 页]中提到的一个推测，对于微分同胚的类似说法也得到验证.

定理 1.1 和 1.2 的证明将在 §6 中给出，部分借助于通常的、由微分同胚到向量场作扭扩的办法来推得. 本章实际上希望对于向量场在较有限制的情况下建立一些类似的结果.

§ 2. 常微系统族 $\mathscr{X}^*(M^n)$

为以后方便起见，我们先回忆 [5] 中的一个结果. 设对于一给定的 $n\geqslant 2$，

$$\mathscr{X}=\mathscr{X}(M^n)$$

为 M^n 上所有 C^1 切向量场（即常微系统）X 作成的集合，赋以 C^1 模 $\|X\|_1$. 又设

$$\mathscr{X}^*=\mathscr{X}^*(M^n)$$

为所有这样的 $X\in\mathscr{X}$ 作成的集合，即存在 X 的一个邻域 U 使得每个 $Y\in U$ 的所有奇点和所有（异于奇点的）周期轨道都是双曲的（或等价地，U 中每个 Y 只有有限个奇点和至多可数个周期轨道）. 我们已在 [5] 中就 $\mathscr{X}^*$ 类作了研究.

考虑一任给的 $S\in\mathscr{X}$. 则 S 诱导一 C^1 单参数变换群 ϕ_t: $M^n\to M^n(-\infty<t<\infty)$，进而在 M^n 的切丛 $\mathscr{C}$ 上诱导一单参数变换群

$$\Phi_t=d\phi_t:\mathscr{C}\to\mathscr{C},\quad -\infty<t<\infty.$$

用 $\mathscr{P}_0$ 和 $\mathscr{P}$ 分别表示 S 的所有奇点集及 S 的所有周期轨道的并集. 记

$$M = M^n - \mathscr{P}_0.$$

考虑 S 的共轭丛

$$\mathscr{D} = \bigcup_{x\in M}\mathscr{D}_x,$$

它是以M为底空间的丛，其在 $x\in M$ 上的纤维 $\mathscr{D}_x$ 由 x 处所有与 $S(x)$ 正交的切向量组成。对任一 $(t,u)\in(-\infty,\infty)\times\mathscr{D}_x$，取 $\phi_t(u)$ 为 $\Phi_t(u)$ 在 $\mathscr{D}_{\phi_t(x)}$ 上的正交投影。 它给出一单参数变换群

$$\phi_t:\mathscr{D}\to\mathscr{D}(-\infty<t<\infty).$$

ϕ_t 把 $\mathscr{D}_x$ 线性地映到 $\mathscr{D}_{\phi_t(x)}$ 上[3,31]

对任给的 $x\in\mathscr{P}$，记

$$\begin{aligned} D_-(x) &= \{u\in\mathscr{D}_x \mid \lim_{t\to\infty}\|\phi_t(u)\| = 0\},\\ D_+(x) &= \{u\in\mathscr{D}_x \mid \lim_{t\to-\infty}\|\phi_t(u)\| = 0\}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

它们是 $\mathscr{D}_x$ 的线性子空间,且

$$\phi_t(D_-(x)) = D_-(\phi_t(x)),\phi_t(D_+(x)) = D_+(\phi_t(x)).$$

又对任给 $x\in\mathscr{P}$ 和 $0\leqslant t<\infty$，记

$$\eta_-(t,x) = \begin{cases}\sup\limits_{u\in D_-(x),\|u\|=1}\log\|\phi_t(u)\|, & 若\ \dim D_-(x)\geqslant 1,\\ -\infty, & 若\ \dim D_-(x) = 0;\end{cases}$$

$$\eta_+(t,x) = \begin{cases}\inf\limits_{u\in D_+(x),\|u\|=1}\log\|\phi_t(u)\|, & 若\ \dim D_+(x)\geqslant 1,\\ \infty, & 若\ \dim D_+(x) = 0.\end{cases}$$

显然,当 $S\in\mathscr{R}^*$ 时 $\mathscr{D}_x = D_-(x)\oplus D_+(x)$.

下面的结论可在[5]中找到。

定理 2.1 存在 $\mathscr{R}^*$ 的一开覆盖 $\mathscr{B}$，及对于每个 $H\in\mathscr{B}$ 相应地存在数 $\eta_H>0$ 和 $T_H>0$，使得若 $V\in\mathscr{B}$ 及 $S\in V$.则

(i_*)当 x 是 S 的一周期轨上一点及 $T_V\leqslant t<\infty$ 时，我们有

$$\frac{1}{t}(\eta_+(t,x)-\eta_-(t,x))\geqslant 2\eta_V; \tag{2.2}$$

(ii_*) 当 P 是 S 的一条以 T_0 为周期的周期轨道，$x\in P$，且

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_l = T_0$$

为 $\langle 0,T\rangle$ 的一分割满足

$$t_k - t_{k-1} \geqslant T_V,\ k = 1, 2, \cdots, l$$

时,我们有

$$\frac{1}{T_0}\sum_{k=1}^{l}\eta_-(t_k - t_{k-1}, \phi_{t_{k-1}}(x)) \leqslant -\eta_V \tag{2.3}$$

及

$$\frac{1}{T_0}\sum_{k=1}^{l}\eta_+(t_k - t_{k-1}, \phi_{t_{k-1}}(x)) \geqslant \eta_V. \tag{2.4}$$

推论 2.2 设 $V \in \mathscr{B}$ 及 $S \in V$. 则存在一正数 $\bar{\eta} \leqslant \eta_V$ 使得当 P 是 S 的一周期为 T 的周期轨道时, P 的每一特征指数的绝对值 $\leqslant \exp(-\bar{\eta}T)$ 或 $\geqslant \exp(\bar{\eta}T)$.

§3. 可缩周期轨道

简记 Ω 为 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 的非游荡集,又记

$$\Omega_0 = \Omega - \mathscr{P}_0.$$

在本节我们要证明下面的定理.

定理 3.1 设 $S \in \mathscr{R}^*$, 且设 Ω_0 在 M^n 中闭. 则 S 仅有有限个正可缩或负可缩周期轨道.

在 $S \in \mathscr{R}^*$ 情形,任何这样的可缩周期轨道 P 都可描叙成性质: $\dim D_+(x) = 0$ 或 $\dim D_-(x) = 0$ 对 $x \in P$, 因而 P 在通常意义下正向或负向渐近稳定.

我们将运用 [2] 中的一个(稍加改进的)定理来证明上面的定理. 先从 [3, §1] 回忆单参数变换群 Φ_t, χ_t 和 $\chi_t^{\#}(-\infty < t < \infty)$, 它们分别由 S 在 M^n 的 n- 标架丛 $\mathscr{U}_n$, 正交 n-标架丛 $\mathscr{F}_n$ 和正规 n-标架丛 $\mathscr{F}_n^{\#}$ 上诱导.

事实上,对任意 $(t,\gamma) = (t, u_1, \cdots, u_n) \in (-\infty,\infty) \times \mathscr{U}_n$, 命

$$\Phi_t(\gamma) = (\Phi_t(u_1),\ \Phi_t(u_2),\ \cdots,\ \Phi_t(u_n)) \in \mathscr{U}_n.$$

它给出一单参数变换群

$$\Phi_t: \mathscr{U}_n \to \mathscr{U}_n,\ -\infty < t < \infty.$$

设 $\pi: \mathscr{U}_n \to \mathscr{F}_n$ 为由通常的 Gram-Schmidt 正交化手续得到的映射，且对任一 $(t, \gamma) \in (-\infty, \infty) \times \mathscr{F}_n$，命 $\chi_t(\gamma) = \pi\Phi_t(\gamma) \in \mathscr{F}_n$。这给出一单参数变换群

$$\chi_t: \mathscr{F}_n \to \mathscr{F}_n, \quad -\infty < t < \infty.$$

设 $\pi^{\#}: \mathscr{F}_n \to \mathscr{F}_n^{\#}$ 为由

$$\pi^{\#}(u_1, u_2, \cdots, u_n) = \left(\frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|}, \cdots, \frac{u_n}{\|u_n\|}\right)$$

确定的映射，且对任一 $(t,\gamma) \in (-\infty,\infty) \times \mathscr{F}_n^{\#}$，命 $\chi_t^{\#}(\gamma) = \pi^{\#}\chi_t(\gamma)$。这给出一单参数变换群

$$\chi_t^{\#}: \mathscr{F}_n^{\#} \to \mathscr{F}_n^{\#}, -\infty < t < \infty.$$

对于任一 $\gamma = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \in \mathscr{U}_n$，记 $\mathrm{proj}_k\gamma = u_k$，$k = 1, 2, \cdots, n$. 对于任一 $\gamma \in \mathscr{F}_n$，$\|\mathrm{proj}_k\chi_t(t)\|$ 对 t 连续可微，我们命

$$\omega_k(\gamma) = \left.\frac{d\|\mathrm{proj}_k(\chi_k(\gamma))\|}{dt}\right|_0, k = 1, 2, \cdots, n.$$

(见 [3, § 1]). 这些是 $\mathscr{F}_n$ 上的连续函数。又对任一

$$(t,\gamma) \in (-\infty,\infty) \times \mathscr{F}_n^{\#},$$

我们有

$$\log\|\mathrm{proj}_k\chi_t(\gamma)\| = \int_0^t \omega_k(\chi_s^{\#}(\gamma))ds,$$

$$k = 1, 2, \cdots, n. \tag{3.1}$$

我们再考虑从

$$\mathscr{E} = \cup_{x\in M}\mathscr{E}_x,$$

它具有底 M，且在 x 上的纤维 $\mathscr{E}_x$ 由 M^* 在 x 处所有满足 $\langle S(x), u_k\rangle = 0$（对 $k = 1, 2, \cdots, n-1$)的正规$(n-1)$-标架 $\gamma = (u_1, u_2, \cdots, u_{n-1})$ 组成。对 $\gamma \in \mathscr{E}_x$，$x \in M$，命 $\iota^*(\gamma) = (S(x)/\|S(x)\|, \gamma)$。这给出一嵌入

$$\iota^*: \mathscr{E} \to \mathscr{F}_n^{\#}.$$

因 $\Phi_t(S(x)) = S(\phi_t(x))$（见 [3, § 1]），故关系 $\iota^*\Theta_t(\gamma) =$

$\chi_t^{\#}\iota^*(\gamma)$ 确定一单参数变换群

$$\Theta_t:\ \mathscr{E}\to\mathscr{E},\quad -\infty<t<\infty.$$

对任一 $T\in(0,\infty)$，我们记

$$\xi_T(x)=\frac{1}{T}\sup_{u\in\mathscr{B}_x,\|u\|=1}\log\|\phi_T(u)\|,$$

$$\xi_{-T}(x)=\frac{1}{T}\sup_{u\in\mathscr{B}_x,\|u\|=1}\log\|\phi_{-T}(u)\|,\qquad x\in M.$$

它们是M上的连续函数。由(3.1)及 $\Theta_t(-\infty<t<\infty)$ 的构造，我们容易验证

$$\frac{1}{T}\int_0^T\omega_{k+1}(\iota^*\Theta_t(\gamma))dt\leqslant\xi_T(x)\tag{3.2}$$

对 $\gamma\in\mathscr{E}_x$，$x\in M$，$k=1,2,\cdots,n-1$。

引理 3.2 设F为 M^* 的一闭子集，它在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变且包含在M中。设对某个 $T\in(0,\infty)$，在F上存在一个在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变的正规化测度 μ，使得

$$\int_F\xi_T(x)d\mu<0\ \text{或}\ \int_F\xi_{-T}(x)d\mu<0.\tag{3.3}$$

则F包含 S 的一周期轨道，它按(3.3)中第一式成立或第二式成立为正可缩或负可缩。

证 我们考虑(3.3)中第一个不等式成立时的情形（第二个可通过在第一式中考虑用 $-S$ 代替 S 得)。进而，因

$$\int_F\xi_T(x)d\mu=\int_{U_T}\mu(dx)\int_F\xi_T(y)\mu_x(dy)$$

其中 U_T 表示所有使单个测度 μ_x 对于 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 可通的准正则点 $x\in F$ 作成的集（见[9，第四章]），由是至少存在一点 $x_0\in U_T$ 使

$$\int_F\xi_T(y)\mu_{x_0}(dy)<0,$$

故不失一般性，我们可假定在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下μ自身可通。设 $\tau:\mathscr{E}\to M$ 为丛投射。显然，$\tau^{-1}(F)$为紧致且在 $\Theta_t(-\infty<t<\infty)$下不变。于是按[2，第14页]，在 $\tau^{-1}(F)$上存在一

正规化测度 μ'，它在 $\Theta_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变且可遁，并使得

$$\int_{\tau^{-1}(F)} \xi_T(\tau(\gamma))d\mu' = \int_F \xi_T(x)d\mu < 0.$$

故由(3.2)及 μ' 的不变性质知

$$0 > \int_{\tau^{-1}(F)} \frac{1}{T}\int_0^T \omega_{k+1}(\iota^*\Theta_t(\gamma))dt\,d\mu'$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T dt\int_{\tau^{-1}(F)} \omega_{k+1}(\iota^*\Theta_t(\gamma))d\mu'$$

$$= \int_{\tau^{-1}(F)} \omega_{k+1}(\iota^*(\gamma))d\mu',$$

$$k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1.$$

于是，通过把[2,第2页]中的一个定理改进为 C^1 向量场情形(见[3，§2]中的一个脚注)，我们可得出结论：存在 S 的一个含于 F 中的周期轨道 P。而且，通过该定理(见[2,第10页])证明中的推理并运用[2,第7页]中的一个推论，这个周期轨道实际上是正可缩的。这就完成了证明。

定理3.1的证明 设若不然，存在 S 的无穷个不同的可缩轨道 P_1，P_2，P_3，$\cdots$。通过选择子序列并考虑在必要时用 $-S$ 代替 S，我们可假定所有的 P_i 都正可缩，且序列 $\{P_i\}$ 收敛于 M^* 的一个闭子集 F (即任给 $\varepsilon > 0$，存在 i_0 使得对所有的 $i > i_0$，F (关于 M^* 一给定的拓扑度量)的 ε- 邻域包含 P_i，且 P_i 的 ε- 邻域包含 F[1])。因每个 P_i 在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变，F 在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变。

对于每个 i，我们可取一个与 P_i 中点 a_i 相应的单个测度 μ_i (见[9，第六章])。通过在必要时取子序列，我们可假定在 M^* 所有正规化测度的空间(它在自然的意义(见[9，第六章])下紧致且可度量)中，序列 $\{\mu_i\}$ 收敛于 M^* 上的一个正规化测度 μ。因

1) 它实际上在 Hausdorff 意义下收敛(见[1，§28])。

每个 μ_i 在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变，μ 在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变。又因 $\{P_i\}$ 收敛于 F 且由定理假设，每个 $P_i\subset M^*$ 中闭集 Ω_0，故 F 为 $\Omega_0\subset M$ 的一个闭子集，μ 为 F 上一测度，且对任一 $T\in(0,\infty)$，

$$\lim_{i\to\infty}\int_{P_i}\xi_T(x)d\mu_i=\int_F\xi_T(x)d\mu. \tag{3.4}$$

但每个 μ_i 是与 $a_i\in P_i$ 相应的单个测度，我们有

$$\int_{P_i}\xi_T(x)d\mu_i=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\xi_T(\phi_T(a_i))dS. \tag{3.5}$$

我们来证明对于充分大的 i，(3.5) 的左边 $\leqslant-\tilde{\eta}/2$ 对某些数 $\tilde{\eta}>0$ 和 $T=\tilde{T}>0$。事实上，设 T_i 为 P_i 的周期。因由定理的假设有 $S\in\mathscr{K}^*$，对每个数 $T'>0$，S 只存在有限个周期 $\leqslant T'$ 的周期轨道(见 [5])，从而

$$\lim_{i\to\infty}T_i=\infty. \tag{3.6}$$

又由定理 2.1，存在数 $\tilde{T}>0$ 和 $\tilde{\eta}>0$ 使 (2.3) 成立。但现在每个 P_i 是正可缩的。故

$$\frac{\tilde{T}}{T_i}\left(\sum_{k=1}^{m_i}\xi_{\tilde{T}}(\phi_{(k-1)\tilde{T}}(x))+\xi_{\tilde{T}}(\phi_{m_i\tilde{T}}(x))\right)\leqslant-\tilde{\eta}$$

对任一 $x\in P_i$，

这里 m_i 是使 $T_i-m_i\tilde{T}\geqslant\tilde{T}$ 的最大正整数，由 (3.6) 知对于充分大的 i 它必存在。因而由 (3.6)，变换群 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 的连续性，$\Omega_0\subset M$ 的紧致性和 $P_i\subset\Omega_0$ 这事实，我们有

$$\frac{\tilde{T}}{m_i\tilde{T}}\left(\sum_{k=1}^{m_i}\xi_{\tilde{T}}(\phi_{(k-1)\tilde{T}}(x))\right)<-\frac{\tilde{\eta}}{2},$$

从而

$$\frac{1}{pm_i}\left(\sum_{k=1}^{m_i}\xi_{\tilde{T}}(\phi_{(k-1)\tilde{T}}(x))\right)<-\frac{\tilde{\eta}}{2},$$

$p=1,2,3,\cdots$，

对任一 $x\in P_i$ 和充分大的 i。于是

$$\frac{1}{pm_i\tilde{T}}\int_0^{pm_i\tilde{T}} \xi_{\tilde{T}}(\phi_s(a_i))ds$$

$$=\frac{1}{pm_i\tilde{T}}\sum_{k=0}^{pm_i-1}\int_{k\tilde{T}}^{(k+1)\tilde{T}} \xi_{\tilde{T}}(\phi_s(a_i))ds$$

$$=\frac{1}{\tilde{T}}\int_0^{\tilde{T}}\frac{1}{pm_i}\sum_{k=0}^{pm_i-1}\xi_{\tilde{T}}(\phi_{k\tilde{T}}(\phi_t(a_i)))dt$$

$$<-\frac{\eta}{2},\ p=1,\ 2,\ 3,\ \cdots.$$

今在 (3.5) 中取 $T=\tilde{T}$，我们容易看出

$$\int_{P_i}\xi_{\tilde{T}}(x)d\mu_i\leqslant-\frac{\eta}{2}\text{ 对充分大的 } i. \tag{3.7}$$

由 (3.4) 和 (3.7)，

$$\int_P \xi_{\tilde{T}}(x)d\mu<0.$$

故由引理 3.2，F 包含 S 的一个正可缩的周期轨道 P，从而它渐近稳定．但这不可能，因 S 的不同周期轨道作成的序列 $\{P_i\}$ 收敛于 $F\supset P$．由此我们得到矛盾．这完成定理 3.1 的证明．

§4. $S\in\mathscr{X}^*(M^3)$ 情形

在本节和下一节我们都假定 $\dim M^n=3$．这两节的目的是证明

定理 4.1 设 $S\in\mathscr{X}^*(M^3)$．又设 Ω_0 在 M^3 中为闭，且 $\mathscr{P}$ 在 Ω_0 中稠密．则 S 在 Ω 上具有双曲构造．

我们将通过一系列引理来证明．记

$$\mathscr{P}_1=\{x\in\mathscr{P}\mid\dim D_-(x)=0\text{ 或 }\dim D_+(x)=0\},$$

$$\Omega_1=\Omega_0-\mathscr{P}_1.$$

$\mathscr{P}_1$ 和 Ω_1 显然在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变． S 的共轭丛 $\mathscr{D}$ 可度量．简记

$$\bar{\mathscr{D}}=\{u\in\mathscr{D}\mid\|u\|=1\},\quad\bar{\mathscr{D}}_1=\bar{\mathscr{D}}\cap(\mathscr{D}\mid\Omega_1).$$

引理 4.2 在定理 4.1 的相同假定下，Ω_1 在 Ω_0 中为闭(从而

$\tilde{\mathscr{D}}_1$ 为紧致)，且对每个 $x\in\Omega_1$，$\mathscr{D}_x$ 有唯一的直和分解

$$\mathscr{D}_x = D_-(x)\oplus D_+(x),\quad \dim D_-(x) = 1 = \dim D_+(x),\tag{4.1}$$

使得

$$\frac{1}{t}(\log\|\phi_t(u)\| - \log\|\phi_t(v)\|) \geqslant 2\tilde{\eta}$$

且 (4.2)

$$\frac{1}{t}(\log\|\phi_{-t}(v)\| - \log\|\phi_{-t}(u)\|) \geqslant 2\tilde{\eta},\ \tilde{T}\leqslant t<\infty,$$

对 $u\in D_+(x)\cap\tilde{\mathscr{D}}$，$v\in D_-(x)\cap\tilde{\mathscr{D}}$，其中 $\tilde{\eta}>0$ 和 $\tilde{T}=T_s>0$ 由推论 2.2 和定理 2.1 中取 $V\in\mathscr{B}$ 和 $S\in V$ 给出。而且该分解还满足

(1) $\phi_t(\mathscr{D}_x) = D_-(\phi_t(x))\oplus D_+(\phi_t(x))$.

(2) 在 $x\in\mathscr{P}\cap\Omega_1$ 情形，$D_-(x)$ 和 $D_+(x)$ 与 (2.1) 中给出的相同。

(3) 该分解在下面意义上对 x 连续，即在 $\{x_i\}$ 为 Ω_1 中序列且收敛于 $x_0\in\Omega_1$ 情形，集序列 $\{D_-(x_i)\cap\tilde{\mathscr{D}}\}$ 和 $\{D_+(x_i)\cap\tilde{\mathscr{D}}\}$ 分别也收敛于 $D_-(x_0)\cap\tilde{\mathscr{D}}$ 和 $D_+(x_0)\cap\tilde{\mathscr{D}}$.

证 若 $x_0\in\mathscr{P}$ 为 Ω_1 的闭包点且在 S 的一周期轨道 P 上，则因 $\mathscr{P}$ 在 Ω_0 中稠密，存在任意接近于 x_0 的点，它们在 S 的异于 P 的周期轨道上。但这是不可能的，因由引理假定 P 可缩，从而渐近稳定。故 Ω_1 在 Ω_0 中闭。由此容易推出 $\tilde{\mathscr{D}}_1$ 为紧致。

考虑任一给定的 $x_0\in\Omega_1$。因 $\mathscr{P}$ 在 Ω_0 中稠密，我们可取 $\mathscr{P}$ 中收敛于 x_0 的点列 $\{x_i\}$。但由定理 3.1 易见 $\mathscr{P}_1$ 在 Ω_0 中闭.故因 $S\in\mathscr{K}^*(M^3)$，我们可假定 $\dim D_-(x_0) = 1 = \dim D_+(x_i)$ $(i=1,2,3,\cdots)$，因而，对于 $u_i\in D_+(x_i)\cap\tilde{\mathscr{D}}, v_i\in D_-(x_i)\cap\tilde{\mathscr{D}}$，由定理 2.1，对于 $\tilde{T}\leqslant t<\infty$，我们有

$$\frac{1}{t}(\log\|\phi_t(u_i)\| - \log\|\phi_t(v_i)\|) \geqslant 2\tilde{\eta},$$

且

$$\frac{1}{t}(\log\|\phi_{-t}(v_i)\| - \log\phi_{-t}(u_i)\|) \geqslant 2\bar{\eta}. \qquad (4.3)$$

但 $\bar{\mathscr{D}}_1$ 为紧致．因而，通过必要时选取子序列，我们可假定序列 $\{u_i\}$ 和 $\{v_i\}$ 分别收敛于 u_0 和 $v_0 \in \mathscr{D}_{x_0} \cap \bar{\mathscr{D}}$，从而若记 $D_-(x_0)$ 和 $D_-(x_0)$ 为分别由 u_0 和 v_0 生成的 $\mathscr{D}_{x_0}$ 的线性子空间，则由(4.3)及变换群 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 的连续性，我们得到对 $x = x_0$ 满足(4.2)的直和分解(4.1)。

我们断言这种分解是准一的．事实上，由(4.2)易验证

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\|\phi_t(v_0)\|}{\|\phi_t(u_0)\|} = 0 = \lim_{t\to\infty}\frac{\|\phi_{-t}(u_0)\|}{\|\phi_{-t}(v_0)\|}.$$

故对于 $w = \lambda u_0 + \mu v_0 = 0$，$\lambda$，$\mu \in (-\infty,\infty)$，我们有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\frac{\|\phi_t(w)\|}{\|\phi_t(u_0)\|}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\left(\log|\lambda| + \log\left\|\frac{\phi_t(u_0)}{\|\phi_t(u_0)\|} + \frac{\mu}{|\lambda|}\frac{\phi_t(u_0)}{\|\phi_t(u_0)\|}\right\|\right) = 0 \text{ 若 } \lambda \neq 0, \qquad (4.4)$$

及

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\frac{\|\phi_{-t}(w)\|}{\|\phi_{-t}(v_0)\|} = 0 \text{ 若 } \mu \neq 0. \qquad (4.5)$$

于是，如果有给定的 $\bar{u}$ 和 $\bar{v} \in \mathscr{D}_{x_0} \cap \bar{\mathscr{D}}$ 满足(4.2)对于 $u = \bar{u}$ 和 $v = \bar{v}$，则显然 $(\bar{u},\bar{v}) \neq (\pm v_0, \pm u_0)$，且必有 $(\bar{u},\bar{v}) = (\pm u_0, \pm v_0)$。因若不然，利用(4.4)和(4.5)式，可见下两式

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\frac{\|\phi_t(\bar{v})\|}{\|\phi_t(\bar{u})\|} = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\frac{\|\phi_{-t}(\bar{v})\|}{\|\phi_{-t}(\bar{u})\|} = 0$$

中至少有一式成立，此与(4.2)矛盾．这就证明了我们的断言．

由定理 2.1，若对任给 $s \in (-\infty,\infty)$，u_i 和 v_i 分别用 $\phi_s(u_i)$ 和 $\phi_s(v_i)$ 代换，则(4.3)仍然成立．于是由变换群 $\phi_t(-\infty <$

$t<\infty$）的连续性和分解（4.1）的唯一性，我们看到（i）成立．又由定理 2.1 及该分解的唯一性，（ii）成立．运用一些类似的推理及在紧致集 $\bar{\mathscr{D}}_1$ 中取适当收敛序列的办法，我们容易验证（iii）．这完成引理 4.2 的证明．

对任一 $(t,u)\in\bar{\mathscr{D}}$，我们记 $\phi_t^{\#}(u)=\phi_t(u)/\|\phi_t(u)\|$．这显然给出一单参数变换群

$$\phi_t^{\#}:\bar{\mathscr{D}}\to\bar{\mathscr{D}},\quad -\infty<t<\infty.$$

我们断言，对任一 $u\in\mathscr{D}$，$\|\phi_t(u)\|$ 对 t 连续可微．在 $u=0$ 时这是显然的，因 $\phi_t(0)=0$．若 $u\neq 0\in\mathscr{D}_x$，我们的断言易由 § 3 中的推理得出，只要考虑 M^3 的一正交 3-标架 γ，它满足 $\mathrm{proj}_1\gamma=S(x)$，$\mathrm{proj}_2\gamma=u$，使 $\mathrm{proj}_2\chi_t(\gamma)=\phi_t(u)$．简记

$$\varpi(u)=\left.\frac{d\|\phi_t(u)\|}{dt}\right|_{t=0}.$$

则如（3.1）中，我们有

$$\log\|\phi_t(u)\|=\int_0^t\varpi(\phi_s^{\#}(u))ds\ \text{对}\ u\in\bar{\mathscr{D}},\tag{4.6}$$

且由 § 2，我们看出 $\varpi(u)$ 对 $u\in\mathscr{D}$ 连续．又因 ϕ_t 为 $\mathscr{D}_x$ 到 $\mathscr{D}_{\varphi_t(x)}$ 的线性映射，我们有 $\varpi(u)=\varpi(-u)$．

现在我们来考虑引理 4.2 中给出的 $\mathscr{D}_x$ $(x\in\Omega_1)$ 的直和分解（它在定理 4.1 的同样假定下得到）．由分解的性质（i），易见

$$\phi_t^{\#}(D_-(x)\cap\bar{\mathscr{D}})=D_-(\phi_t(x))\cap\bar{\mathscr{D}},$$
$$\phi_t^{\#}(D_+(x)\cap\bar{\mathscr{D}})=D_+(\phi_t(x))\cap\bar{\mathscr{D}}$$

对 $(t,x)\in(-\infty,\infty)\times\Omega_1$．又若对每个 $x\in\Omega_1$ 记 $\zeta(x)=\varpi(u)$，其中 $u\in\bar{\mathscr{D}}\cap D_-(x)$，则因 $\varpi(-u)=\varpi(u)$ 及 $\dim D_-(x)=1$，$\zeta(x)$ 由 x 唯一确定．显然，$\zeta(\phi_t(x))=\varpi(\phi_t^{\#}(u))$ 及

$$\log\|\phi_t(u)\|=\int_0^t\zeta(\phi_s(x))ds$$

对 $u\in\bar{\mathscr{D}}\cap D_-(x)$．由分解（4.1）的性质（iii），$\zeta(x)$ 为 Ω_1 上的连续函数．

我们来考虑集合

$$\check{E}=\left\{x\in\Omega_1\,\middle|\,\int_0^t\zeta(\phi_s(x))ds\geqslant 0\ \text{对所有}\ t\in(-\infty,\infty)\right\}.$$

它显然是 Ω_1 的一闭子集。

引理 4.3 在定理 4.1 的同样假定下，设 $\check{E}$ 和 $\zeta(x)$ 如上给定.设 Π 为 Ω_1 的闭子集，它在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变，且满足 $\Pi\cap\check{E}=0$. 则存在数 $\eta_*>0$ 和 $d_*>0$ 使得

$$\int_0^T\zeta(\phi_t(x))dt<-T\eta_*\ \text{对所有}\ x\in\Pi\ \text{和}\ T\geqslant d_*.$$

证 首先，我们可运用 [4] 中的一个定理得出下列结论[1]:

Π 为 Π 中三个互不相交的子集 Π_-, Π_+ 和 $\hat{\Pi}$ 之并集，其中前两个都是 Π 中闭子集，它们都在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变，且满足

(1) 存在 Π 的一个包含在 $\hat{\Pi}$ 中的闭子集 Π_*，它是 $\hat{\Pi}$ 关于 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 的截面。这就是说，

$$\phi_*(t,x)=\phi_t(x)\ \text{对}\ (t,x)\in(-\infty,\infty)\times\Pi_*$$

定义从 $(-\infty,\infty)\times\Pi_*$ 到 $\hat{\Pi}$ 上的一个拓扑映射.

(2) 存在常数 $\eta_*>0$ 和 $d_*>0$ 使得

$$\int_0^T\zeta(\phi_t(x))dt<\begin{cases}-T\eta_* & \text{对所有}\ x\in\Pi_-\ \text{和}\ T\geqslant d_*,\\ T\eta_* & \text{对所有}\ x\in\Pi_+\ \text{和}\ T\leqslant -d_*,\end{cases}\tag{4.7}$$

$$\int_0^T\zeta(\phi_{s+t}(x))dt<\begin{cases}-T\eta_* & \text{对所有}\ x\in\Pi_*,\ s\geqslant 0\ \text{和}\ T\geqslant d_*,\\ T\eta_* & \text{对所有}\ x\in\Pi_*,\ s\leqslant 0\ \text{和}\ T\leqslant -d_*.\end{cases}\tag{4.8}$$

我们断言 $\Pi_+=0$. 事实上，由 (4.6) 和 (4.7),

$$\log\|\psi_t(v)\|>t\eta_*\ \text{对}\ v\in D_-(x)\cap\mathscr{D},\ x\in\Pi_+,\ t\geqslant d_*.$$

这连同 (4.2) 又给出

$$\log\|\psi_t(u)\|>t\eta_*\ \text{对}\ u\in D_+(x)\cap\mathscr{D},$$
$$x\in\Pi_+,\ t\geqslant\operatorname{Max}\{\tilde{T},d_*\}.$$

---

1) 又见本书第四章.

但由(4.2)，变换群 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 的连续性及 $\tilde{\mathscr{D}}_1$ 的紧致性，应有

$$\sup_{\substack{u\in D_+(x)\cap\tilde{\mathscr{D}}\\ v\in D_-(x)\cap\tilde{\mathscr{D}},x\in\Omega_1}}|\langle u,v\rangle|<1。$$

把这些合在一起，我们容易验证，存在数 $T\geqslant \mathrm{Max}\{\tilde{T},\ d_*\}$ 使得

$$\inf_{u\in\mathscr{D}_x\cap\tilde{\mathscr{D}},x\in\Pi_+}\log\|\phi_T(u)\|\geqslant\frac{1}{2}\eta_*,$$

或等价地，

$$\xi_{-T}(x)\leqslant-\frac{1}{2}\eta_*,\quad x\in\Pi_+,\tag{4.9}$$

这里 $\xi_{-T}(x)$ 如§3中给出。今设 $\Pi_+\neq 0$。则在 Π_+ 上必至少存在一个在 $\phi_t(-\infty<t\infty)$ 下不变的正规化测度 μ。于是，由(4.9)，我们利用引理 3.2 可得到 $\Pi_+(\subset\Omega_1)$ 包含 S 的一可缩周期轨道的结论。这与 Ω_1 定义相矛盾，我们的断言得证。

由(4.7)，(4.8)及函数 $\zeta(x)$ 和变换群 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 的连续性，我们看到，每个过 Π_* 中一点的 S 轨道的 α 极限集包含在 Π_+ 中。因 Ω_1 紧致且可度量，这样的 α 极限集非空。但现在 $\Pi_+=0$。故又有 $\Pi_*=0$。从而由 Π 的性质(1)得出 $\Pi=\Pi_-$。这证明了引理 4.3。

今考虑任一 $X\in\mathscr{X}(M^3)$。与 S 同样，X 也诱导出 M^3 上及其切丛 $\mathscr{C}$ 上的单参数变换群，我们分别记为 ϕ_{Xt}：$M^3\to M^3$ 和 $\Phi_{Xt}=d\phi_{Xt}$：$\mathscr{C}\to\mathscr{C}$。

设 $\mathscr{X}_0$ 为所有与 S 具有相同奇点的 $X\in\mathscr{X}(M^3)$ 的集合，与 S 同样，每个 $X\in\mathscr{X}_0$ 有其共轭丛，记作 $\mathscr{D}_X$，它以 M 为底空间且有 $X\in M$ 上的纤维 $\mathscr{D}_{Xx}$，X 自然诱导出一单参数变换群 $\psi_{Xt}:\mathscr{D}_X\to\mathscr{D}_X(-\infty<t<\infty)$，记

$$\Gamma=\{(X,s,w)\in\mathscr{X}_0\times(-\infty,\infty)\times\mathscr{C}\,|\,w\in\mathscr{D}_X\},$$

把它看成 $\mathscr{X}\times(-\infty,\infty)\times\mathscr{C}$(可度量化)的一个子空间，且设

$$H:\Gamma\to\mathscr{C}$$

由 $H(X,s,w)=\psi_{Xs}(w)$确定。则 H 在每个 $(S,t,u)\in\Gamma$[1] 处连续。

1) 参看廖山涛，北京大学学报(自然科学)，12(1966)，1—43.

若 $X \in \mathscr{X}^*(M^3)$ 且 x 为 X 的一周期轨上的点，则同 S 一样，$\mathscr{D}_{Xx}$ 可分解成

$$\mathscr{D}_{Xx} = D_{X-}(x) \oplus D_{X+}(x),$$

其中

$$D_{X-}(x) = \{u \in \mathscr{D}_{Xx} \mid \lim_{t\to\infty} \|\phi_{Xt}(u)\| = 0\},$$

$$D_{X+}(x) = \{u \in \mathscr{D}_{Xx} \mid \lim_{t\to-\infty} \|\phi_{Xt}(u)\| = 0\}.$$

引理 4.4 在定理 4.1 的相同假定下，设 Π 为在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变的 Ω_1 的非空闭子集，且设 $\bar{\eta} > 0$ 同引理 4.2 中。则存在 $v_* \in D_-(b_*) \cap \bar{\mathscr{D}}$，$b_* \in \Pi$，使得

$$\log \|\psi_t(v_*)\| = \int_0^t \zeta(\phi_s(b_*))ds \leqslant -t\bar{\eta} \text{ 对所有 } t \geqslant 0. \quad (4.10)$$

证 设 $a_* \in \Pi$ 为变换群 $\phi_t|\Pi(-\infty < t < \infty)$ 的一非游荡点，则对每个 $j = 1, 2, 3, \cdots$，存在 $X_j \in V \cap \mathscr{X}_0$，其中 $V \in \mathscr{B}$ 及 $S \in V$ 与引理 4.2 中所考虑的相同，并且存在

$$\text{arc}L_j = \{\phi_t(a_j) \mid t \in \langle t_j, t'_j \rangle\} \subset \Pi,\ 0 \leqslant t_j < t'_j < \infty,$$

及 L_j 到 X_j 一周期轨道 Q_j 中的映射 f_j，使得

$$\|X_j - S\|_1 < 1/j, \quad (4.11)$$

$$\text{dist}(x, f_j(x)) < 1/j,\ \text{对所有 } x \in L_j, f_j(L_j) = Q_j, \quad (4.12)$$

$$\text{dist}(a_*, \phi_{t_j}(a_j)) < 1/j,\ \text{dist}(a_*, \phi_{t'_j}(a_j)) < 1/j, \quad (4.13)$$

其中 dist(,) 表示 M^3 上事先指定的拓扑度量(见 [7])。简记

$$c_j = f_j(\phi_{t_j}(a_j)) \in Q_j,\ n_j = \dim D_{X_j-}(c_j).$$

在必要时取子序列，我们可以假定下三种情形之一将会出现：

(1) $n_j = 1$ 对所有 j，

(2) $n_j = 2$ 对所有 j，

(3) $n_j = 0$ 对所有 j，

设 T_j 为 Q_j 的周期，假定 $\lim\limits_{j\to\infty} T_j \neq \infty$。则由 (4.11)—(4.13)，$\{Q_j\}$ 的一个子序列收敛于 S 的一个周期轨道 $Q \subset \Pi \subset \Omega_1$，因而由 Ω_1 的定义，Q 不能是可缩的，即 $\dim D_-(x) = 1$ 对 $x \in Q$。故由推论 2.2 和引理 4.2，我们可找到 $v_* \in D_-(b_*) \cap \bar{\mathscr{D}}$，$b_* \in Q$，满

足(4.10). 下面我们假定 $\lim_{j\to\infty} T_j = \infty$。则对充分大的 j 有 $T_j \geqslant \tilde{T}$，其中 $\tilde{T} > 0$ 与引理 4.2 中所考虑的相同。于是将定理 2.1 用于 X_j 时，我们有

$$\log \|\phi_{X_jT_j}(v)\| \leqslant -T_j\tilde{\eta} \text{ 对充分大的 } j \text{ 及}$$
$$v \in D_{X_j-}(x'), \ \|v\| = 1, \ x \in Q_j. \tag{4.14}$$

在情形(1)，由(4.14)及 $\phi_{X_jT_j}(D_{X_j-}(x)) = D_{X_j-}(x)$ 我们可对充分大的 j 取 $b_j \in Q_j$ 使得

$$\log \|\phi_{X_jt}(v_j)\| \leqslant -\tilde{\eta}t \text{ 对 } v_j \in D_{X_j-}(b_j),$$
$$\|v_j\| = 1, \text{ 及所有 } t \geqslant 0.$$

我们再将定理 2.1 用于 X_j，得到

$$\frac{1}{t}(\log \|\phi_{X_jt}(u_j)\| - \log \|\phi_{X_jt}(v_j)\|) \geqslant 2\tilde{\eta}$$

及

$$\frac{1}{-s}(\log \|\phi_{X_js}(v_j)\| - \log \|\phi_{X_js}(u_j)\|) \geqslant 2\tilde{\eta}$$

对某个 $u_j \in D_{X_j+}(b_j)$, $v_j \in D_{X_j-}(b_j)$, $\|u_j\| = 1 = \|v_j\|$,

及所有 $t \geqslant \tilde{T}, s \leqslant -\tilde{T}$.

由于(4.11)，(4.12)及上面提到的H的连续性质，通过在必要时取子序列，可假定子序列 $\{b_j\}$ 收敛于一点 $b_* \in \Pi$. 且 $\{u_j\}$ 和$\{v_j\}$分别收敛于

$$u_* \text{ 和 } v_* \in \mathscr{D}_{b*} \cap \bar{\mathscr{D}},$$

使得有(4.10)，从而有(4.2)(对 $u = u_*$, $v = v_*$)。这里注意，由引理 4.2，v_* 必 $\in D_-(b_*) \cap \bar{\mathscr{D}}$. 总之，我们得到满足引理 4.4 结论中要求的 v_*。

我们说情形(2)不能出现。事实上，设若不然，$n_j = 0$ 对所有 j. 则如定理 3.1 证明中那样，我们现在也可看到

$$\int_{Q_j} \xi_{j\tilde{T}}(x)\, dv_j \leqslant -\frac{\tilde{\eta}}{2},$$

其中 v_j 是与 $c_j \in Q_j$ 相应的关于变换群 $\phi_{X_jt}(-\infty < t < \infty)$ 的单个测度，且

$$\xi_{j\tilde{T}}(x) = \frac{1}{\tilde{T}} \sup_{\substack{u \in \mathscr{D}X_{jx} \\ \|u\|=1}} \|\phi_{X_j\tilde{T}}(u)\|, \ x \in M.$$

又由(4.11)和(4.12)，及上面提到的H的连续性质，通过在必要时取子序列，我们可假定 $\{Q_j\}$ 收敛于Π的闭子集 C，并且在 M^3 的所有正规化测度作成的空间中 $\{\nu_j\}$ 收敛于 M^3 上的一个正规化测度 ν，$\nu(C)=1$。于是易见C和ν在$\phi_t(-\infty<t<\infty)$下不变，且

$$\int_C \xi_{\bar{T}}(x)\,d\nu=\lim_{j\to\infty}\int_{Q_j}\xi_{j\bar{T}}(x)\,d\nu_j\leqslant-\frac{\bar{\eta}}{2},$$

其中 $\xi_{\bar{T}}(x)$ 与§3中的相同。因而如定理3.1证明中那样，我们将在 $C(\subset\Omega_1)$ 中最后得到S的一个可缩周期轨道，但这与 Ω_1 的定义矛盾。

情形(3)也不可能出现，因为我们只要考虑用 $-S$ 和 $-X$ 代替S和 X，这种情形就归结为情形(2)。引理4.4的证明到此完成。

§5. "筛滤"引理和定理4.1的证明

我们现在来建立下面重要的"筛滤"引理，为了将来的某个目的，它叙述为更一般的情形。

引理5.1 设F为紧致度量空间，在上面给定一单参数变换群 $\theta_t(-\infty<t<\infty)$。设在$F$上存在一连续函数 $f(x)$，及存在数 $\eta>0$，满足(1)—(2)：

(1) 存在一点 $a_*\in F$ 使得

$$\int_0^t f(\theta_s(a_*))ds\geqslant 0 \text{ 对所有 } t\geqslant 0; \tag{5.1}$$

(2) 若 $a\in F$ 是任一点使

$$\int_0^t f(\theta_s(a))ds\geqslant\frac{-t\eta}{3} \text{ 对所有 } t\geqslant 0, \tag{5.2}$$

则轨道 $\{\theta_s(a)\,|\,s\in(-\infty,\infty)\}$ 的ω极限集包含一点b使得

$$\int_0^t f(\theta_s(b))ds\leqslant -t\eta \text{ 对所有 } t\geqslant 0. \tag{5.3}$$

在这些假定下，我们可对每一正整数对 (l,k)，取 $l+2$ 个数

$$0<t_l(0,k)<t_l(1,k)<\cdots<t_l(l,k)<\bar{t}_l(l,k)$$

使得下面 (5.4)—(5.7) 成立:

$$t_l(i,k)-t_l(i-1,k)\geqslant k \text{ 对 } i=1,2,\cdots,l; \quad (5.4)$$

$$\int_0^t f(\theta_{t_l(i-1,k)+s}(a_*))\,ds\leqslant\frac{-t\eta}{4}$$

和

$$\int_0^{-t} f(\theta_{t_l(i,k)+s}(a_*))ds\leqslant\frac{t\eta}{3} \quad (5.5)$$

对 $0\leqslant t\leqslant t_l(i,k)-t_l(i-1,k)$, $i=1,2,\cdots,l-1$;

$$\int_0^t f(\theta_{t_l}(l-1,k)+s(a_*)ds<\frac{-t\eta}{4}$$

对 $0\leqslant t<\bar{t}_l(l,k)-t_l(l-1,k)$,

但

$$\int_0^{\bar{t}_l(l,k)-t_l(l-1,k)} f(\theta_{t_l(l-1,k)+s}(a_*))ds$$

$$=\frac{-(\bar{t}_l(l,k)-t_l(l-1,k))}{4}\eta; \quad (5.6)$$

$$\int_0^t f(\theta_{t_l(l-1,k)+s}(a_*))\,ds\leqslant\frac{-t\eta}{3} \text{ 对}$$

$0\leqslant t\leqslant t_l(l,k)-t_l(l-1,k)$,

但

$$\int_0^{t_l(l,k)-t_l(l-1,k)} f(\theta_{t_l(l-1,k)+s}(a_*))ds$$

$$=\frac{-(t_l(l,k)-t_l(l-1,k))}{3}\eta, \quad (5.7)$$

证(对 l 施归纳法) (5.1) 蕴涵 (5.2). 因而 $\{\theta_s(a_*)|s\in(-\infty,\infty)\}$ 的 ω 极限集包含满足 (5.3) 的点 $b=b_0$. 于是由 $f(x)$ 和变换群 $\theta_t(-\infty<t<\infty)$ 的连续性,我们可在 b_0 附近取一点 $c_0=\theta_{t_1(0,k)}(a_*)$, $t_1(0,k)>0$. 使得

$$\int_0^t f(\theta_s(c_0))ds<-\frac{t\eta}{3} \quad \text{对 } 0\leqslant t<k.$$

但由 (5.1),

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(\theta_s(c_0))ds=0.$$

故有 $\bar{t}_1(1,k)>t_1(1,k)\geqslant t_1(0,k)+k$ 使得 (5.6) 和 (5.7) 成立.

这对于 $l=1$ 和每个 k 给出了所要的数 $t_l(i,k)$, $\bar{t}_l(l,k)$。

一般地,设对于给定的 l 和每个 k, 数 $t_l(i,k)$, $\bar{t}_l(l,k)$ 已经作出使之满足 (5.4)—(5.7) 的全部要求。然后,对每个 k 我们来证明存在充分大的 $j_k>k$ 使得在 $t_l(l,j_k)$ 和 $\bar{t}_l(l,j_k)$ 之间可插入某个 $t_{l+1}(l,k)<t_{l+1}(l+1,k)<\bar{t}_{l+1}(l+1,k)$ 满足用 $l+1$ 代换 l 后的 (5.6) 和 (5.7) 式,且还满足

$$t_{l+1}(l+1,k)-t_{l+1}(l,k)\geqslant k, \tag{5.8}$$

$$\int_0^{-t} f(\theta_{t_{l+1}(l,k)+s}(a_*))ds\leqslant\frac{t\eta}{3}$$

$$\text{对 } 0\leqslant t\leqslant t_{l+1}(l,k)-t_l(l-1,j_k). \tag{5.9}$$

只要证得这样的 j_k 存在,就很容易看出数组

$$t_{l+1}(i,k)=t_l(i,j_k)\text{ 对 } i=0,1,\cdots,l-1,$$

$$t_{l+1}(l,k),\ t_{l+1}(l+1,k),\ \bar{t}_{l+1}(l+1,k)$$

满足本引理关于对 $(l+1,k)$ 的结论中的要求。

为证明这样的 j_k 存在,设 $\tilde{t}_l(l,j)\in(t_l(l,j),\ \bar{t}_l(l,j))$ 使得

$$\int_0^{\tilde{t}_l(l,j)-t_l(l-1,j)} f(\theta_{t_l(l-1,j)+s}(a_*))ds=\frac{\tilde{t}_l(l,j)-t_l(l-1,j)}{3}\eta, \tag{5.10}$$

$$\int_0^t f(\theta_s(a_j))ds>-\frac{t\eta}{3}\text{ 对 } 0\leqslant t\leqslant s_j, \tag{5.11}$$

其中 $a_j=\theta_{t_l(l,j)}(a_*)$, $s_j=\bar{t}_l(l,j)-\tilde{t}_l(l,j)$. 这样的 $\tilde{t}_l(l,j)$ 的存在由 (5.6), (5.7) 和 $f(\theta_{t_l(l-1,j)+s}(a_*))$ 关于 s 的连续性推出。因由 (5.6), (5.10) 和 (5.4),

$$\begin{aligned}\int_0^{s_j} f(\theta_s(a_j))ds&=-\frac{\bar{t}_l(l,j)-t_l(l-1,j)}{4}\eta\\&\quad+\frac{\tilde{t}_l(l,j)-t_l(l-1,j)}{3}\eta\\&=\frac{-3s_j+\tilde{t}_l(l,j)-t_l(l-1,j)}{12}\eta\\&\geqslant\left(\frac{j}{12}-\frac{s_j}{4}\right)\eta,\end{aligned}$$

且 $f(x)$ 的连续性和 F 的紧致性蕴涵 $f(x)$ 在 F 上有界，我们有

$$\lim_{j\to\infty} s_j = \infty.$$

又由度量空间 F 的紧致性，通过在必要时取子序列，不失一般性，我们可假定 $\{a_j\}$ 收敛于点 $a\in F$。于是由 (5.11) 及函数 $f(x)$ 和变换群 $\theta_t(-\infty < t < \infty)$ 的连续性推出 (5.2) 成立，从而由 (2)，$\{\theta_s(a)\,|\,s\in(-\infty,\infty)\}$ 的 ω 极限点集包含满足 (5.3) 的点 b。于是用一些类似的推理，可取充分大的 $j_k > k$ 和 $0 < t_k < t_k + k < s_{j_k}$ 使得弧 $\{\phi_t(a_{j_k})\,|\,0\leqslant t\leqslant s_{j_k}\}$ 包含满足

$$\int_0^t f(\theta_s(c))ds \leqslant -\frac{t\eta}{2} \text{ 对 } 0\leqslant t\leqslant k \tag{5.12}$$

的点 $c = \phi_{t_k}(a_{j_k})$。我们容易看出

$$\begin{aligned}\bar{t}_l(l,j_k) &> t_k + k + \tilde{t}_l(l,j_k)\\ &> t_k + \tilde{t}_l(l,j_k) > \tilde{t}_l(l,j_k)\\ &\geqslant t_l(l,j_k) \geqslant t_l(l-1,j_k) + k.\end{aligned}$$

显然，我们总可取一数

$$t_{l+1}(l,k)\in\langle t_l(l,j_k),\ t_k + k + \tilde{t}_l(l,j_k)\rangle$$

使得

$$\begin{aligned}&\int_0^t f(\theta_{t_{l+1}(l,k)+s}(a_*))ds \leqslant \frac{-t\eta}{3}\\ &\text{对}\quad 0\leqslant t\leqslant t_k + k + \tilde{t}_l(l,j_k) - t_{l+1}(l,k).\end{aligned} \tag{5.13}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^{-t} f(\theta_{t_{l+1}(l,k)+s}(a_*))ds \leqslant \frac{t\eta}{3}\\ &\text{对}\quad 0\leqslant t\leqslant t_{l+1}(l,k) - t_l(l,j_k).\end{aligned} \tag{5.14}$$

而由 (5.12)，必有

$$t_{l+1}(l,k) \leqslant \tilde{t}_l(l,j_k) + t_k. \tag{5.15}$$

由 (5.6)，

$$\begin{aligned}&\int_0^{\bar{t}_l(l,j_k)-t_{l+1}(l,k)} f(\theta_{t_{l+1}(l,k)+s}(a_*))ds\\ &\quad > \frac{-(\bar{t}_l(l,j_k) - t_{l+1}(l,k))}{4}\eta,\end{aligned}$$

这连同 (5.13), (5.15) 及 $f(\theta_{t_{l+1}(l,k)+s}(a_*))$关于 s 的连续性给出两个数

$$t_{l+1}(l+1,k) < \bar{t}_{l+1}(l+1,k) \in \langle t_{l+1}(l,k)+k, \bar{t}_l(l,j_k)\rangle.$$

它们满足用 $l+1$ 替换 l 后的 (5.6) 和 (5.7) 式，且还满足 (5.8). 由 (5.7) 和 (5.14) 我们看到 (5.9) 也满足. 归纳法到此完成，引理 5.1 得证.

推论 5.2 在引理 5.1 的相同假定下，对于任意给定的数 $\delta > 0$ 和 $d > 0$，我们有点 $w \in F$ 和数 $T \geqslant d$ 使得

(1) w 和 $\theta_T(w)$ 的距离 $< \delta$,

(2) $\int_0^t f(\theta_s(w))ds \leqslant \frac{-t\eta}{4}$ 和 $\int_0^{-t} f(\theta_{T+s}(w))ds \leqslant \frac{t\eta}{3}$ 对于 $0 \leqslant t \leqslant T$;

特别地，

$$\int_0^T f(\theta_s(w))ds \geqslant -\frac{T\eta}{3}.$$

证 对于紧致度量空间 F，我们有整数 $l \geqslant 2$ 使得在 F 的任意 l 个点中至少存在两个点距离 $< \delta$. 取整数 $k \geqslant d$. 则我们如引理 5.1 中那样构造数 $t_{l+1}(i, k)$. 利用 (5.5) 我们看到对于某些 $0 \leqslant i_0 < i_1 < l$，点

$$w = \theta_{t_{l+1}(i_0,k)}(a_*),\ \theta_T(w)\quad (这里\ T = (i_1 - i_0)k)$$

满足本推论的要求.

引理 5.3 设 F 和 $\theta_t(-\infty < t < \infty)$ 与引理 5.1 中的相同. 若 $\theta_t(-\infty < t < \infty)$ 无不动点，则对于任意给定的数 $\bar{T} > 0$ 和 $\tau > 0$，有相应的数 $\varepsilon > 0$ 满足下述性质，即若 $\bar{T} \leqslant T < \infty$ 且 $g(t)$ 为 $\langle 0, T\rangle$ 上连续的严格增加函数，$g(0) = 0$，且若 a 和 b 使 $\theta_t(a)$ 和 $\theta_{g(t)}(b)$ 的距离 $< \varepsilon$ 对所有 $t \in \langle 0, T\rangle$，则

$$(1-\tau)T < g(T) < (1+\tau)T.$$

证 显然，我们可假定 $\bar{T}$ 很小使得 $\theta_t(-\infty < t < \infty)$ 无周期 $< 3\bar{T}$ 的周期轨道. 因 $\langle 0, T\rangle$ 能划分成长度在 $\bar{T}$ 和 $2\bar{T}$ 之间的子区间，本引理的结论成立只要当它在 $\bar{T} \leqslant T \leqslant 2\bar{T}$ 情形成

立，在这情形对于小常数 $\delta>0$，$\{\theta_t(a)|t\in\langle-\delta,T+\delta\rangle\}$ 总是一条简单弧。于是，易利用动力系统中的通常推理完成本项证明。

定理 4.1 的证明 在定理 4.1 的假定下，S 仅有有限个奇点，每个都是双曲的，并且由定理 3.1，S 仅有有限个可缩周期轨。所以剩下只要证明 S 在 Ω_1 上有双曲结构，我们来证 $\check{E}=\Omega_1\cap\check{E}=0$。则由引理 4.3，存在数 $\eta_1>0$ 和 $d_1>0$ 使得

$$\log\|\phi_t(v)\|=\int_0^t\varpi(\phi_s^{\#}(v))ds=\int_0^t\zeta(\phi_s(x))ds$$

$$\leqslant -t\eta_1 \quad 对\ v\in\bar{\mathscr{D}}\cap D_-(x),x\in\Omega_1\ 和\ t\geqslant d_1.$$

把这个结果用于 $-S$，我们将得到关于 $u\in\bar{\mathscr{D}}\cap D_+(x)$，$x\in\Omega_1$，的类似不等式，即存在数 $\eta_2>0$ 和 $d_2>0$ 使得

$$\log\|\phi_t(u)\|\geqslant t\eta_2 \quad 对\ u\in\bar{\mathscr{D}}\cap D_+(x)\ 及\ t\geqslant d_2.$$

这给出 S 在 Ω_1 上的双曲结构(见 [4])，而本定理得证。

因而只要证明 $\check{E}=0$。为此我们设在 M^3 及其切丛 $\mathscr{C}$ 上分别固定拓扑度量 ρ_0 和 ρ，且对任意 $K\subset\mathscr{C}$ 和任一数 $\lambda>0$，用 $U(K,\lambda)$ 表示 K 在 $\mathscr{C}$ 中的 λ 邻域。在定理 4.1 的假定下，由函数 $\zeta(x)$ 和变换群 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 的连续性及由 Ω_1 的紧致性，存在 $\varepsilon>0$ 和 $\tau>0$ 使得若 $\rho_0(x,y)<\varepsilon$ 对 $x,y\in\Omega_1$，且 $|t-t'|<\tau t$ 对 $\tilde{T}\leqslant t\leqslant 2\tilde{T}$，则

$$\left|\int_0^t\zeta(\phi_s(x))ds-\int_0^{t'}\zeta(\phi_s(y))ds\right|<\frac{t\bar{\eta}}{6},\tau\sup_{\omega\in\Omega}|\zeta(\omega)|<\frac{\bar{\eta}}{6},$$

这里 $\bar{\eta},\tilde{T}$ 如引理 4.2 中所给。我们可假定 $\tilde{T}\geqslant 1$ 且取 ε 很小使得引理 5.3 的结论对于 $F=\Omega_1$，$\theta_t=\phi_t$，$\bar{T}=\tilde{T}$，τ 成立。又，利用定理 3.1 和引理 4.2 我们可取 ε 很小使得 Ω_1 在 M^3 中的 ε 邻域不含 $\mathscr{P}_1$ 的点和 S 的奇点。我们将考虑在论文 [6] 意义下的所谓 $(\bar{\eta}/4,2\tilde{T};1)$ 准双曲轨弧。于是，由那篇论文中的主要定理，存在数 $\delta_*>0$ 和 $T_*\geqslant 2\tilde{T}$ 使得：若 S 有一轨弧

$$Q=\{\phi_t(a)|t\in\langle 0,T\rangle\}\subset\Omega_1,\ T_*\leqslant T<\infty, \tag{5.16}$$

它关于分解

$$\mathscr{D}_a=D_-(a)\oplus D_+(a)$$

为 $(\bar{\eta}/4,\ 2\widetilde{T};1)$ 准双曲的,使得

$$\phi_T(D_-(a))\cap\bar{\mathscr{D}}\subset U(D_-(a)\cap\bar{\mathscr{D}},\delta_*), \tag{5.17}$$

则存在 S 过点 b 的周期轨道 P, 及 $\langle 0,T\rangle$ 上连续的严格增加的函数 $h(t)$, $h(0)=0$, 使得

$$\phi_{h(T)}(b)=b,\rho_0(\phi_t(a),\phi_{h(t)}(b))<\varepsilon \text{ 对 } t\in\langle 0,T\rangle.$$

又由引理 4.2 和 Ω_1 的紧致性,存在 $\delta>0$ 使得对 x 和 $y\in\Omega_1$ 若 $\rho_0(x,y)<\delta$, 则 $D_-(y)\cap\bar{\mathscr{D}}\subset U(D_-(x)\cap\bar{\mathscr{D}},\delta_*)$.

现在相反地, 假定 $\check{E}\neq 0$. 我们将证明实际存在着上面的准双曲弧 Q. 事实上,设 $a_*\in\check{E}$, 则

$$\int_0^t(\phi_s(a_*))ds\geqslant 0 \text{ 对所有 } t\geqslant 0.$$

这连同引理 4.4 给出 Ω_1, $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 和 $\zeta(x)$ 分别为引理 5.1 中在 $\eta=\bar{\eta}$ 时考虑过的一种空间,变换群和函数. 于是由推论 5.2, 我们有点 $a\in\Omega_1$ 和数 $T\geqslant T_*$, 使得 $\rho_0(a,\phi_T(a))<\delta$, 因而 (5.17) 成立,且

$$\log\|\phi_t(v)\|=\int_0^t\zeta(\phi_s(a))ds\leqslant\frac{-t\bar{\eta}}{4} \text{ 对 } v\in D_-(a)\cap\bar{\mathscr{D}},$$
$$0\leqslant t\leqslant T, \tag{5.18}$$

$$\log\|\phi_{T-t}(v)\|\leqslant\frac{t\bar{\eta}}{3} \text{ 对 } v\in D_-(\phi_T(a))\cap\bar{\mathscr{D}},0\leqslant t\leqslant T, \tag{5.19}$$

$$\log\|\phi_T(v)\|=\int_0^T\zeta(\phi_s(a))ds\geqslant\frac{-T\bar{\eta}}{3} \text{ 对 } v\in D_-(a)\cap\bar{\mathscr{D}}. \tag{5.20}$$

由 (5.19) 和 (4.2), 我们有 $\log\|\phi_{T-t}(u)\|\leqslant-\frac{5t\bar{\eta}}{3}$ 对 $u\in D_+(\phi_T(a))\cap\bar{\mathscr{D}}$ 和 $\widetilde{T}\leqslant t\leqslant T$, 或等价地,

$$\log\|\phi_t(u)\|\geqslant\frac{5t\bar{\eta}}{3} \text{ 对 } u\in D_+(\phi_{T-t}(u))\cap\bar{\mathscr{D}},\ \widetilde{T}\leqslant t\leqslant T. \tag{5.21}$$

又由 (4.2) 和 $\widetilde{T}\geqslant 1$,

$$\log\|\phi_t(u)\|-\log\|\phi_t(v)\|\geqslant 2\bar{\eta} \text{ 对 } u\in D_+(\phi_t(a))\cap\bar{\mathscr{D}},$$

$v \in D_-(\phi_s(a)) \cap \mathscr{D}$ 及 $0 \leqslant s < s + \tilde{T} \leqslant s + t \leqslant s + 2\tilde{T} \leqslant T$.

$$(5.22)$$

把 (5.18), (5.21) 和 (5.22) 结合起来，于是我们得到 (5.16) 中那样的弧 Q，它关于 $\mathscr{D}_a = D_-(a) \oplus D_+(a)$ 为 $(\bar{\eta}/4,\ 2\tilde{T};1)$ 准双曲的，使得 (5.17) 成立，且易见 $\langle 0, T\rangle$ 有分割

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T,$$

使 $\tilde{T} \leqslant t_K - t_{K-1} < 2\tilde{T}$，满足准双曲性定义[6]中的要求。最后，存在 S 的周期轨道 P 和上一节描述的 $\langle 0, T\rangle$ 上的函数 $h(t)$。

由 Ω_1 在 M^3 中的 ε- 邻域的结构和函数 $h(t)$ 的性质，周期轨道 P 不能是可缩的，因而 $\subset \Omega_1$。设 T_0 为 P 的周期，由 $h(t)$ 的性质，$h(T) = pT$. 对某个整数 $p \geqslant 1$. 又由 ε 的选取和 $h(t)$ 的性质，我们有

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{h(T)}\int_0^{h(T)} \zeta(\phi_s(b))ds - \frac{1}{T}\int_0^T \zeta(\phi_s(a))ds\right| \\
&\leqslant \left|\left(\frac{1}{h(T)} - \frac{1}{T}\right)\int_0^{h(T)} \zeta(\phi_s(b))ds\right| \\
&\quad + \frac{1}{T}\left|\int_0^T \zeta(\phi_s(a))ds - \int_0^{h(T)} \zeta(\phi_s(b))ds\right| \\
&\leqslant \left|\frac{\tau}{h(T)}\int_0^{h(T)} \zeta(\phi_s(b))ds\right| \\
&\quad + \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{m-1}\left|\int_{t_{k-1}}^{t_k} \zeta(\phi_s(a))ds\right. \\
&\quad \left. - \int_{h(t_{k-1})}^{h(t_k)} \zeta(\phi_s(b))ds\right| \\
&\quad < \tau \sup_{w \in \Omega_1} |\zeta(w)| + \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{m-1}(t_k - t_{k-1})\bar{\eta}/6 \\
&\quad < \bar{\eta}/3.
\end{aligned}$$

这连同 (5.20) 给出

$$\frac{1}{h(T)}\int_0^{h(T)} \zeta(\phi_s(b))ds > -\frac{2\bar{\eta}}{3} > -\bar{\eta},$$

或等价地 $\frac{1}{PT_0}\log\|\phi_{PT_0}(v)\|>-\bar{\eta}$，从而 $\frac{1}{T_0}\log\|\phi_{T_0}(v)\|>-\bar{\eta}$ 对

$$v\in D_-(a)\cap\tilde{\mathscr{D}}.$$

但这与推论 2.2 矛盾。定理 4.1 的证明到此完成。

§6. 定理1.1 和1.2 的证明

在建立定理 4.1 之后，现在容易证明下面的定理。

定理 6.1 设 $S\in\mathscr{X}(M^3)$ 无奇点，则 S 为 Ω 稳定的必要且充分条件是 S 满足公理 A 和无环性条件。

证 这里的充分性部分以前由 Pugh-Shub[13] 给出。剩下只要证明必要性，设 S 是 Ω 稳定的。则 $S\in\mathscr{X}^*(M^3)$[5]，且利用封闭性引理（见[7，12]），我们容易看到 $\mathscr{P}$ 在 Ω 中稠密。但现在 S 无奇点。所以我们可应用定理 4.1 得出 S 在 Ω 上有双曲结构的结论。由此得出 S 满足公理 A. 故只要下面的引理得证，本定理的证明就完成。

引理 6.2 假定 $S\in\mathscr{X}^*(M^3)$ 无奇点，且满足公理 A. 则 S 满足无环性条件。

证 若不然，假定存在 S 的基本集的一个环 B_0，B_1，$\cdots$，B_m，$B_{m+1}(m\geqslant 1)$，$B_i\neq B_j$ 对 $0\leqslant i<j\leqslant m$，且 $B_0=B_{m+1}$，使得对每个 $0\leqslant i\leqslant m$，存在 $M^3-\Omega$ 中的点 b_i 属于 B_i 中一轨道的不稳定流形 W_i^u 和 B_{i+1} 中一轨道的稳定流形 W_i^s 的交集（见[13]）。我们可取向量 u_i 和 $v_i\in\mathscr{D}_{b_i}$ 分别与 W_i^u 和 W_i^s 相切，$\|u_i\|=1=\|v_i\|$。则

$$\lim_{t\to-\infty}\|\phi_t(u_i)\|=0,\quad \lim_{t\to\infty}\|\phi_t(v_i)\|=0. \tag{6.1}$$

易见 $b_i\neq b_j$ 对 $0\leqslant i<j\leqslant m$。为方便起见，还记 $b_{m+1}=b_0$。对每个 $0\leqslant i\leqslant m+1$，设 Q_i 和 R_i 分别为正半轨 $\{\phi_t(b_i)|t\in\langle 0,\infty)\}$ 和负半轨 $\{\phi_t(b_i)|t\in(-\infty,0\rangle\}$，且设

$$F_i=Q_i\cup B_{i+1}\cup R_{i+1}\ \text{对}\ 0\leqslant i\leqslant m,\quad F=\bigcup_{0\leqslant i\leqslant m}F_i.$$

则因 S 满足公理 A 且 S 的一基本集为拓扑传递的，故 F 为 M^3 在

$\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 不变的连通闭子集，且不含 S 的可缩周期轨道（由定理 3.1，这样的轨道数目有限），同时由稳定流形理论的论据，对每个 $i = 0, 1, \cdots, m$，我们总可在 F_i 的一个任意给定的邻域中找到 S 的轨弧 A_i，使得 A_i 的两个端点任意接近 b_i 和 b_{i+1}；特别是，当 S 在 F 上有双曲结构时，可找到轨弧 $A = \{\phi_t(a) | t \in \langle 0, T\rangle\}$，$T \geqslant 1$，使其两端点 a 和 $\phi_T(a)$ 任意接近于 b_0（关于得此结论所使用的技巧，例如见 [10, 13]）。但这种特别情形不能出现，因 $b_0 \in M^3 - \Omega$。在前一个一般情形，我们可对每个整数 $k > 0$ 把 S 扰动成系统 $X_k \in \mathscr{X}^*(M^3)$，使得 $\|S - X_k\|_1 < \frac{1}{k}$，且 X_k 在 F 的 $\frac{1}{k}$ 邻域中有周期轨 P_k，而所有点 $b_0, b_1, \cdots, b_m$ 在 P_k 的 $\frac{1}{k}$ 邻域中（就 M^3 上事先指定的拓扑度量来说）。

但若序列 $\{P_k\}$ 有无穷多项 P_k 为 X_k 的可缩周期轨道，则运用定理 2.1，并通过引理 4.4 证明中同样的方法（即取某个极限过程），我们将看到 F 包含 S 的一个可缩周期轨道。而正如上一节所证明，这是不可能的。因而，必有无穷多项 P_k 恰有一个绝对值 < 1 的特征指数，故再由引理 4.4 证明中的同样方法，我们看到，存在 $\bar{u}_i$ 和 $\bar{v}_i \in \mathscr{D}_{b_i}$，$\|\bar{u}_i\| = 1 = \|\bar{v}_i\|$，使得

$$\frac{1}{t}\left(\log\|\phi_t(\bar{u}_i)\| - \log\|\phi_t(\bar{v}_i)\|\right) \geqslant 2\tilde{\eta}$$

且

$$\frac{1}{t}\left(\log\|\phi_{-t}(\bar{v}_i)\| - \log\|\phi_{-t}(\bar{u}_i)\|\right) \geqslant 2\tilde{\eta} \text{ 对 } t \geqslant \tilde{T}, \tag{6.2}$$

其中 $\tilde{\eta} > 0$ 和 $\tilde{T} > 0$ 与 (4.2) 中的相同。

把 (6.1) 和 (6.2) 结合在一起，得到

$$\lim_{t\to\infty}\|\phi_t(\bar{v}_i)\| = 0,\quad \lim_{t\to-\infty}\|\phi_t(\bar{u}_i)\| = 0,\quad i = 0, 1, \cdots, m. \tag{6.3}$$

事实上，因 $\dim M^3 = 3$ 蕴涵 $\dim \mathscr{D}_{b_i} = 2$，我们可记 $v_i = \gamma_i \bar{u}_i +$

$s_i\tilde{v}_i$。若 $\gamma_i=0$，则 $v_i=\pm\tilde{v}_i$，且(6.3)中第一个等式显然成立，若 $\gamma_i\neq 0$，则由(6.1)和(6.2)，第一个等式仍成立，因

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\|\phi_t(\bar{v}_i)\|}{\|\phi_t(\bar{u}_i)\|}=0,$$

且

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to\infty}\log\frac{\|\phi_t(v_i)\|}{\|\phi_t(\bar{u}_i)\|}\\&=\log|\gamma_i|+\lim_{t\to\infty}\log\left\|\frac{\phi_t(\bar{u}_i)}{\|\phi_t(\bar{u}_i)\|}+\frac{s_i}{|\gamma_i|}\frac{\phi_t(\bar{v}_i)}{\|\phi_t(\bar{u}_i)\|}\right\|\\&=\log|\gamma_i|.\end{aligned}$$

类似地，我们可验证(6.3)中第二式。于是由(6.3)及 S 在 Ω 上的双曲结构，据[4]我们易见 S 在 F 上有双曲结构。但正如我们上面已证的，这不能出现。引理 6.2 由此得证。

定理 6.3 设 $S\in\mathscr{X}(M^3)$ 无奇点。则 S 为结构稳定的必要且充分条件是 S 满足公理 A 及强横截性条件。

证 充分性部分以前 Robinson[16] 就得到了。只要证明必要性，设 S 为结构稳定。则 S 也为 Ω- 稳定，因而由定理 6.1，S 满足公理 A。

现证明 S 满足强横截性条件。设若不然，存在一点 $b\in M^3-\Omega$，它在 S 的基本集 B_0 中轨道 P 的稳定流形 W^s 上，也在 S 的基本集 B_1 中轨道 Q 的不稳定流形 W^u 上，而 W^s 和 W^u 在 b 点非横截相交。我们必有 $B_0\neq B_1$，因 $b\in M^3-\Omega$（见[13，第 154 页]）。于是，通过 S 的任意小 C^1 扰动，我们可假定 P 和 Q 为 S 的周期轨道，P 和 Q 当然不可缩，从而 $\dim W^s=\dim W^u=2$。再通过 S 围绕点 b 的任意小 C^1 扰动，我们可进一步假定 $\dim(W^s\cap W^u)=2$。然而，利用 Kupka-Smale 定理(见[19，第 804 页])，这将导致与 S 的结构稳定性的矛盾。定理 6.3 因而得证。

我们现来证明本文的主要结果(见§1)。

定理 1.1 的证明 对于 $f\in \mathrm{Diff}^1(M^2)$ 的扭扩(见下面的附录)运用定理 6.1 和 6.3 中的必要条件、直接得出定理1.1的结论。

定理 1.2 的证明 本定理的条件是必要的，因 Ω- 稳定的 $f\in \mathrm{Diff}^1(M^2)$ 及进而 f 的任一共轭至多有可数个周期点. 为证明条件是充分的，我们首先注意到 $f\in \mathrm{Diff}^1(M^2)$ 的周期点在 $\Omega(f)$ 中稠密[8]. 考虑 f 在扭扩流形 M_f^3 上的扭扩向量场 S_f，则 S_f 的周期轨在 S_f 的非游荡集中稠密，且 $S_f\in \mathscr{X}^*(M_f^3)$ 无奇点. 于是由定理 4.1 和引理 6.2 得知 S_f 满足公理 A 和无环性条件. 进而把 [13] 中的结果用于向量场 S_f，且利用扭扩的性质，我们推得 f 是 Ω- 稳定的，这证明了定理 1.2.

附 录

我们说一下关于一给定 $f\in \mathrm{Diff}^1(M^n)$ 的扭扩流形（记作）M_f^{n+1} 的微分构造问题，因在这里有需要考虑之处，且至少在现在的文献中似还不太明显. M_f^{n+1} 通常为商流形 $((-\infty,\infty)\times M^n)/\sim$，其中 $\sim$ 是等价关系：对整数 k，$(t,x)\sim(t+k,f^{-k}(x))$，且对于 M^n 上的坐标邻域 U，$\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)\times U$ 和 $(0,\ 1)\times U$ 在取商后以自然的方式给出 M_f^{n+1} 上的地图册. f 的扭扩 S_f 是 M_f^{n+1} 上通过商映射由 $(-\infty,\infty)\times M^n$ 上的 $(d/dt,0)$ 诱导的向量场. 因而我们看到在 M_f^{n+1} 如此导出的微分结构仅为 C^1 类，从而 S_f 为 C^0 因 f 为 C^1.

然而 M_f^{n+1} 上的这个 C^1 结构包含一 C^∞ 结构，对此 S_f 是一 C^1 向量场. 而 M^n 为 M_f^{n+1} 的一 C^∞ 子流形（通过 x 和 $(0,x)$ 的叠合）. 这可如下证明，因 M^n 是紧致的，存在 $\delta>0$ 使得在任意 $x\in M^n$ 处指数映射 $\exp_x$ 为

$$\Gamma_x=\{\beta\in\pi^{-1}(x)\,|\,\|\beta\|<\delta\}$$

到 M^n 中的一个微分同胚，这里 π 表示 M^n 切丛的投射. 对任意 $y\in\exp_x\Gamma_x$，记 $\beta_y\in\Gamma_x$ 使 $y=\exp_x\beta_y$. 设 $\eta(t)$ 为 $(-\infty,\infty)$ 上取值 $\langle 0,1\rangle$ 中的一 C^∞ 实函数，使 $\eta(t)=0$ 对 $t<0$，$\eta(t)=1$ 对 $t>1$，且设 $f_0\in \mathrm{Diff}^\infty(M^n)$ 使 $f_0^{-1}f(x)\in\exp_x\Gamma_x$ 对所有 $x\in M^n$. 则当 $f_0^{-1}f$ 充分接近 $\mathrm{Diff}^1(M^n)$ 的恒同映射（在 C^1 拓扑下）

时，$\langle 0,1\rangle \times M^n$ 到自身上的一 C^1 微分同胚可由下式给定

$$\Delta(t,x)=(t,\exp_x(\eta(t)\beta_{f_0^{-1}f(x)}),$$

且它诱导出 M_f^{n+1} 到 $M_{f_0}^{n+1}$ 上的一 C^1 微分同胚，这里 $M_{f_0}^{n+1}$ 是一 C^∞ 类微分流形，因 f_0 为 C^∞。于是

$$d\Delta\left(\frac{d}{dt},\ 0\right)_x=\left(\frac{d}{dx},\ \frac{d\eta(t)}{dt}\beta_{f_0^{-1}f(x)}\right),$$

其中右边为 $\langle 0,1\rangle\times M^n$ 上一 C^1 向量场。由此得出 Δ^{-1} 把 $M_{f_0}^{n+1}$ 上的 C^∞ 结构带到 M_f^{n+1} 上满足我们全部要求的一个 C^∞ 结构中。我们这里的构造实际上是［17，第 399 页］在处理圆周上 C^1 微分同胚时给出的构造的推广。显然，可以对任意给定的微分同胚 $f\in \mathrm{Diff}^r(M^n)$，$r\geqslant 2$，作出类似的处理。

参 考 文 献

[1] Hausdorff, F., Mengenlehre, Berlin, 1927.

[2] 廖山涛，常微系统的一个诸态备经性质定理，中国科学，**1**(1973)，1—20.

[3] 廖山涛，典范方程组，数学学报，**17**(1974)，100—109；175—196；270—295（即本书第二章）.

[4] 廖山涛，阻碍集与强匀断条件，数学学报，**19**(1976)，203—209（即本书第三章）.

[5] 廖山涛，某类常微系统的一个基本性质，数学学报，**22**(1979)，316—343.

[6] 廖山涛，一个关于周期轨道存在的定理，北京大学学报（自然科学），(1)，(1979)，1—20.

[7] 廖山涛，一个推广的 C^1 封闭引理，北京大学学报（自然科学），(3)，(1979)，1—41；摘要见《科学通报》，(19)，(1979)，863—868.

[8] Mañé R., Contributions to the stability conjecture, *Topology*, **17**(1978) 383—396.

[9] Nemyckii, V. and Stepanov, V., Qualitative Theory of Differential, Equations, Princeton, 1960.

[10] Newhouse, S., Hyperbolic limit sets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **167** (1972), 125—150.

[11] Nitecki, Z., Differential Dynamics, M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1971.

[12] Pugh, C., An improved closing lemma and a general density theorem, *Amer. J. Math.*, **89**(1967), 1010—1021.

[13] Pugh, C. and Shub, M., The Ω-stability theorems for flows, *Inventiones Math.*, **11**(1970), 150—158.

[14] Robbin J., A structural stability theorem *Ann. of Math.* **94**(1971) 447—493.

[15] Robinson, C., Structural stability of C^1 diffeomorphisms, *J. Diff. Equations*, **22**(1976), 28—73.

[16] Robinson, C., Structural stability of C^1 flows, Dyuamical Systems-Warwick 1974, Lecture Notes in Math., 468, Springer-Verlag, 1975, 262—277.

[17] Schweitzer, P.,Counterexamples to Seifert conjecture and opening closed leaves of foliations, *Ann. of Math.*, **100**(1974), 386—400.

[18] Smale, S., Differential dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747—817.

[19] Smale, S., The Ω-stability theorem, Proc. Symp. Pure Math., Amer. Math. Soc., 14, 1970, 289—297.

第六章 阻碍集(II)

§1. 引言

在第三、四章中,我们介绍了有关常微系统的阻碍集,并探讨了所谓正常集的一些性质.现在这章的目的是双重的:(一)在阻碍集的基础上,介绍所谓极小歧变集;(二)探讨有关非游荡集是否有双曲构造这方面的一个问题.后一个问题目前十分重要,前者则是我们现在这工作的一个基本着眼点.现申述如下:

我们将普遍以 M^n 表一 n 维紧致的 C^∞ Riemann 流形,$n \geqslant 2$,并以 $\mathscr{X}$ 表 M^n 上所有 C^1 常微系统(即切向量场)作成的线性空间.后者赋以 C^1 模 $\|\cdot\|_1$ 后即成一 Banach 空间.取定 M^n 上一拓扑度量,其中任意点 x 及 y 的距离将记作 $\operatorname{dist}(x, y)$,并对 M^n 的子集 K 及 $\varepsilon > 0$,记 $U(K,\varepsilon)$ 为 K 在 M^n 中的 ε-邻域.如所知,若 $X \in \mathscr{X}$,则 X 导出 M^n 上一 C^1 单参变换群(将记作)

$$\phi_{Xt}: M^n \to M^n, -\infty < t < \infty,$$

从而在 M^n 的切空间丛

$$\mathscr{C} = \bigcup_{x \in M^n} \mathscr{C}_x$$

上导出一单参变换群

$$\Phi_{Xt} = d\phi_{Xt}: \mathscr{C} \to \mathscr{C}, -\infty < t < \infty,$$

其中 $\mathscr{C}_x$ 表 M^n 在 x 处的切空间.对于 $X \in \mathscr{X}$ 的一轨线 $Q = \{\phi_{Xt}(a) | t \in (-\infty, \infty)\}$,我们将以 $\operatorname{Ind}_X(Q)$ 表 $\mathscr{C}_a$ 中子线性空间

$$\{u \in \mathscr{C}_a | \lim_{t \to \infty} \|\Phi_{Xt}(u)\| = 0\}$$

的维数,并记

$$I_X(Q) = \operatorname{Ind}_{(-X)}(Q) - \operatorname{Ind}_X(Q).$$

易看出 $\operatorname{Ind}_X(Q)$ 与 $I_X(Q)$ 的确定与 Q 上的点 a 的选取无关.但

以后用到的，实际将只是Q是X的奇点或（异于奇点的）周期轨道这两种情况，并且主要涉及到的，还将是双曲奇点与双曲周期轨道这些情况（参看后面命题5.8证明）。当Q是X的双曲奇点时，显然

$$\mathrm{Ind}_{(-X)}(Q)=\frac{n+I_X(Q)}{2},\ \mathrm{Ind}_X(Q)=\frac{n-I_X(Q)}{2};\quad (1.1)$$

又当Q是X的双曲周期轨道时，

$$\mathrm{Ind}_{(-X)}(Q)=\frac{n-1+I_X(Q)}{2},\ \mathrm{Ind}_X(Q)=\frac{n-1-I_X(Q)}{2}. \quad (1.2)$$

故据周知的结果易看出在这所述的双曲式情况下，Q就X来说的稳定与非稳定流形的维数都是由$I_X(Q)$及M^n的维数确定了的。

本章主要考虑一给定的$S\in\mathscr{X}$，并简记

$$\phi_t=\phi_{St},\ \Phi_t=\Phi_{St}.$$

命Ω为S所有非游荡点作成的集合。如通常，$x\in\Omega$当且仅当对每一$\varepsilon>0$，都有一数$t_\varepsilon\geq 1$使$U(x,\varepsilon)\cap\phi_{t_\varepsilon}(U(x,\varepsilon))\neq 0$。非游荡集$\Omega$是$M^n$中一闭子集，在$\phi_t(-\infty<t<\infty)$下不变，它的拓扑结构一般很复杂。我们将采用下述

定义 S的一非游荡点a将叫作混杂的，如果对任结的$\varepsilon>0$，存在X_1及$X_2\in\mathscr{X}$使得X_i有奇点或周期轨道Q_i满足

(1) $\|X_i-S\|_1<\varepsilon$且$U(a,\varepsilon)$与Q_i相交，$i=1,2$；

(2) $I_{X_1}(Q_1)\neq I_{X_2}(Q_2)$。

我们提述一下，根据C^1封闭引理（[5,16]），恒存在满足这里(1)的X及它的奇点或周期轨道Q。

下面定理是本章的一个主要结果。

定理1.1 设$S\in\mathscr{X}$不具有混杂非游荡点。则S是Ω-稳定的。

换言之，在定理假设下，若$X\in\mathscr{X}$使$\|X-S\|_1$充分小，则有从Ω到X的非游荡集上的拓扑变换把S在Ω中的积分线映至X的

积分线。

考虑 M^n 中一闭子集 Λ，在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变。如通常，我们将称 S 在 Λ 上有双曲构造，如果部份丛 $\mathscr{C}|\Lambda$ 有直和分解

$$\mathscr{C}|\Lambda = \mathscr{F}_- \oplus \{S|\Lambda\} \oplus \mathscr{F}_+,$$

其中 $\{S|\Lambda\}$ 由 $S|\Lambda$ 产生，而 $\mathscr{F}_-$ 及 $\mathscr{F}_+$ 都在 $\Phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变，且存在数 $\lambda > 0$ 及 $\mu < 0$ 使得

$$\|\Phi_t(u)\| \leqslant \lambda\|u\|\exp(\mu t) \text{ 对所有 } u \in \mathscr{F}_- \text{ 及 } t \geqslant 0,$$

$$\|\Phi_{-t}(u)\| \leqslant \lambda\|u\|\exp(\mu t) \text{ 对所有 } u \in \mathscr{F}_+ \text{ 及 } t \geqslant 0.$$

本章还将给出

定理 1.2 设 $S \in \mathscr{R}$ 不具有混杂非游荡点。则 S 在 Ω 上有双曲构造。

至今为止，有关微分动力体系理论的仍待解决的主要问题中有一个是所谓 Ω-稳定性推测是否成立。这推测说，若 S 是 Ω-稳定的，则它满足公理 A 及无环性条件(关于这些名词，例如可参看[6]，这里不重述)。这推测的逆命题久已知是成立的 (Pugh-Shub [6]、Smale [7])。但这推测本身，除开闭曲面上微拓变换这特款外(见[2]及[17]；如所周知，微拓变换产生的离散动力体系，在许多问题上，通过扭扩的办法可作为常微系统的特款来考虑)，余均尚待验证。如所周知，就这目的来说，关键是要证明，若 S 是 Ω-稳定的，则 S 在 Ω 上有双曲构造。我们在定理 1.1 的证明过程中即可得出定理 1.2，然而这后一定理仍可注意，因为根据本章定理6.1将可以看出，Ω-稳定性推测等价于下述内容很不相同的推测，即若 S 是 Ω-稳定的，则 S 不具有混杂非游荡点。我们希望这等价性将有助于原问题的解决。定理 1.1 及 1.2 的证明将在 §5 末完成。

本章中我们将从阻碍集出发引进所谓极小歧变集作为探讨问题的工具。M^n 中一子集 Λ 将称为 S 的歧变集，如果 Λ 在 M^n 中闭，在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$下不变，且 Λ 与 S 的阻碍集 $Ob(S)$的交集非空。S 的一歧变集将称为极小的，如果它的每一真子集都不再是 S 的歧变集。我们将可以看出，关于极小歧变集的定理 3.6 及定理

5.7 在定理 1.1 及 1.2 的证明中，以及极小歧变集在关于 3 维流形上常微系统的定理 6.4 证明中，都起重要的作用。一般说来，极小歧变集的讨论在本章中占主要地位。

§2. 阻碍集与极小歧变集

为方便，我们将先简略回顾阻碍集。仍如同上节中，考虑一任给的 $S \in \mathscr{K}$，及它在 M^* 上导出的单参变换群 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 以及在 M^* 的切空间丛 $\mathscr{C}$ 上导出的单参变换群 $\Phi_t(-\infty < t < \infty)$。记 $\sigma:\mathscr{C} \to M^*$ 为丛投射，$\mathscr{C}_x = \sigma^{-1}(x)$ 对 $x \in M^*$。记 M 为 S 所有常点作成的集合，这是 M^* 中一开子集，在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变。命 $\mathscr{D}$ 为 S 的共轭丛，这丛在任一点 $x \in M$ 处的纤维 $\mathscr{D}_x$ 由 $\mathscr{C}_x$ 中所有与 $S(x)$ 正交的向量组成。对 $(t,u) \in (-\infty, \infty) \times \mathscr{D}$，取 $\psi_t(u)$ 为 $\Phi_t(u)$ 在 $\mathscr{D}_{\phi_t(\sigma(u))}$ 上的垂直投影，这给出一单参变换群

$$\psi_t:\mathscr{D} \to \mathscr{D}, -\infty < t < \infty.$$

ψ_t 把 $\mathscr{D}_x$ 线性变换至 $\mathscr{D}_{\phi_t(x)}$ 上，对任一 $(t,x) \in (-\infty,\infty) \times M$。又对 $u \in \mathscr{D}_x, x \in M$，记 $\circledast u$ 为 $\mathscr{D}_x$ 中所有与 u 正交的向量作成的子线性空间，则对 $t \in (-\infty,\infty)$ 可取唯一的 $\Psi_t(u) \in \mathscr{D}_{\phi_t(x)}$ 与 $\psi_t(\circledast u)$ 正交且使 $\psi_t(u) - \Psi_t(u) \in \psi_t(\circledast u)$，这也给出一单参变换群

$$\Psi_t:\mathscr{D} \to \mathscr{D}, -\infty < t < \infty$$

(见[12,§2;13,§2])。$\mathscr{D}$ 上的这两个变换群是本章以后的讨论中主要涉及到的。

命 $\mathscr{D}^*$ 为 $\mathscr{D}$ 在 $\mathscr{C}$ 中的闭包。我们可把 $\mathscr{D}$ 上的变换群 $\Psi_t(-\infty < t < \infty)$ 扩充至 $\mathscr{D}^*$ 上。事实上，对任一 $u \in \mathscr{C}$，记 $^*u$ 为 $\mathscr{C}_{\sigma(u)}$ 中所有与 u 正交的向量作成的子线性空间。则对 $t \in (-\infty,\infty)$ 可取唯一的 $\overline{\overline{\Psi}}_t(u) \in \mathscr{C}_{\phi_t(\sigma(u))}$ 与 $\Phi_t(^*u)$ 正交且使得 $\Phi_t(u) - \overline{\overline{\Psi}}_t(u) \in \Phi_t(^*u)$，于是这也给出一单参变换群

$$\overline{\overline{\Psi}}_t:\mathscr{C} \to \mathscr{C}, -\infty < t < \infty,$$

从 $\mathscr{D}$ 的定义易看出 $\overline{\overline{\Psi}}_t$ 限制在 $\mathscr{D}$ 上即为 Ψ_t，故 $\Psi_t:\mathscr{D}\to\mathscr{D}$ 可扩充到 $\mathscr{D}^*$ 上一单参变换群

$$\Psi_t:\mathscr{D}^*\to\mathscr{D}^*,\ -\infty<t<\infty,$$

即 $\Psi_t=\overline{\Psi}_t|\mathscr{D}^*$. 易看出这样扩充的存在是唯一的.

对任给的 $u\in\mathscr{D}^*$, $\|\Psi_t(u)\|$ 对 t 可微，置

$$\tilde{\omega}(u)=\frac{d\|\Psi_t(u)\|}{dt}\bigg|_{t=0},$$

这函数对 $u\in\mathscr{D}^*$ 连续(见[13, §2; 11, 前言]), 命 $\tilde{\mathscr{D}}=\{u\in\mathscr{D}^*\,|\,\|u\|=1\}$, 这是一紧致可度量空间. 我们可在 $\tilde{\mathscr{D}}$ 上定义一单参变换群

$$\widetilde{\Psi}_t:\tilde{\mathscr{D}}\to\tilde{\mathscr{D}},\ -\infty<t<\infty$$

满足 $\|\Psi_t(u)\|\widetilde{\Psi}_t(u)=\Psi_t(u)$, 并有

$$\|\Psi_t(u)\|=\exp\int_0^t\tilde{\omega}(\widetilde{\Psi}_{t'}(u))dt', \tag{2.1}$$

对任一 $(t,u)\in(-\infty,\infty)\times\tilde{\mathscr{D}}$ (见[13, §2])

照[12, 13], S 的阻碍集定义作

$$Ob(S)=\{x=\sigma(u)\in M^n\,|\,u\in\mathscr{D}^*,\ \|u\|=1=\inf_{t\in(-\infty,\infty)}\|\Psi_t(u)\|\}.$$

从变换群 $\Psi_t(-\infty<t<\infty)$ 的连续性，易看出 $Ob(S)$ 是 M^n 中一闭子集. M^n 中一闭子集 Λ 将称为 S 的正常集，如果 Λ 在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变，且 $\Lambda\cap(I(S)\cup Ob(S))=0$, 其中 $I(S)$ 表 S 所有奇点作成的集合(在 M^n 中)的内集. 现在，我们来给

定义 M^n 中一子集 Λ 将称为 S 的歧变集，如果 Λ 在 M^n 中闭，在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变，且

$$\Lambda\cap Ob(S)\neq 0.$$

例如，若 $Ob(S)\neq 0$, 则 M^n 自身即为一歧变集，S 的一歧变集将称为极小的，如果它的每一真子集都不再是 S 的歧变集.

命题 2.1 S 的每一歧变集都至少包含一极小歧变集.

证 与通常关于极小集合的存在(例如,见[9,第五章,§7])同一原则,由于流形 M^* 紧致,且 $Ob(S)$ 是 M^* 的闭子集,易看出任一歧变集序列 $F_1\supset F_2\supset F_3\supset\cdots$的交集 $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$ 仍是一歧变集.于是应用 Brouwer 约化定理(例如,见[8,第 43—44 页]) 到现在这情况即给出命题。

附记 可直接来证这命题如下, 命 $\{W_i\}$ 为 M^* 的一可数基。 显然,S 的一歧变集 F 中存在一真子歧变集当且仅当存在某些 j 满足要求:

$$F(j)=F-\bigcup_{t\in(-\infty,\infty)}\phi_t(W_j)$$

是 S 的真子歧变集. 若对 F,存在满足这要求的 j, 则可取这些 j 中最小的一个,记作 j_F, 并记 $\vartheta(F)=F(j_F)$; 并且, 若 $\vartheta(F)$ 仍含有真子歧变集, 易看出 $j_F<j_{\vartheta(F)}$。设相反地, 命题对 S 的某一歧变集 Λ 不成立,则可考虑序列 $\Lambda=\Lambda_1,\Lambda_2,\Lambda_3\cdots$, 其中 $\Lambda_{k+1}=\vartheta(\Lambda_k)$, 它是 Λ_k 中一真子歧变集,由是 $j_{\Lambda_k}<j_{\Lambda_{k+1}}$,从而序列 $\{j_{\Lambda_k}\}$ 无上界. 但另一方面,每一 Λ_k 包含 Λ_{k+1} 因而包含 $\bar{\Lambda}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\Lambda_i$ 作为真子歧变集,且因已假定命题对 Λ 不成立,故又可定义 $\vartheta(\bar{\Lambda})$,并易看出 $j_{\Lambda_k}<j_{\bar{\Lambda}}$, 故序列 $\{j_{\Lambda_k}\}$ 又有上界. 这是一矛盾, 证明命题.这样证明格式的一般框架是已知的(见[8,第 44 页]), 但应用到我们这具体情况,显得尤清爽,故附记于此.

从 [13, §3] 易看出: S 的一极小歧变集 Λ 仅由一点 x_0 组成的充要条件是 x_0 为 S 的一非双曲的奇点; 若这 Λ 含有多于两个点,则 Λ 含有 S 的常点 $\in Ob(S)$, 且不含有 S 的非双曲的奇点. 下述命题显然成立.

命题 2.2 设 Λ 是 S 的一极小歧变集, $a\in\Lambda\cap Ob(S)$. 则 Λ 是轨线 $P_a=\{\phi_t(a)\mid t\in(-\infty,\infty)\}$ 与 P_a 的 ω-极限集合 Γ_a 及 α-极限集合 Γ'_a 三者的集合和, 因而是连通的; 并且当 $a\in\Gamma_a$ 时, $\Lambda=\Gamma_a$, 且当 $a\in\Gamma'_a$ 时, $\Lambda=\Gamma'_a$.

关于 ω 及 α-极限集合的定义及一般性质，例如见[9，第五章，§3]，它们都是动力体系空间中的不变闭子集。

我们也将用下面的一些记号：对任一 $x\in M^*$，记

$$F_-(x)=\{u\in\mathscr{C}_x|\lim_{t\to\infty}\|\Phi_t(u)\|=0\},$$
$$F_+(x)=\{u\in\mathscr{C}_x|\lim_{t\to-\infty}\|\Phi_t(u)\|=0\}. \tag{2.2}$$

这些都是 $\mathscr{C}_x$ 的子线性空间，并且 $\Phi_t(F_-(x))=F_-(\phi_t(x))$，$\Phi_t(F_+(x))=F_+(\phi_s(x))$ 对 $s\in(-\infty,\infty)$. 对任一 $x\in M$，记

$$D_-(x)=\{u\in\mathscr{D}_x|\lim_{t\to\infty}\|\psi_t(u)\|=0\},$$
$$D_+(x)=\{u\in\mathscr{D}_x|\lim_{t\to-\infty}\|\psi_t(u)\|=0\}, \tag{2.3}$$

这些都是 $\mathscr{D}_x$ 的子线性空间，并且 $\psi_t(D_-(x))=D_-(\phi_t(x))$，$\psi_t(D_+(x))=D_+(\phi_t(x))$.

命题 2.3 设 Λ 是 S 的一歧变集，a 是 S 的一常点 $\in\Lambda\cap Ob(S)$. 则

$$\dim(F_-(a)+\{S(a)\}+F_+(a))<n, \tag{2.4}$$
$$\dim(D_-(a)+D_+(a))<n-1. \tag{2.5}$$

证 据阻碍集的定义，存在一 $w\in\mathscr{D}_a$，$\|w\|=1$，使得 $\inf\limits_{t\in(-\infty,\infty)}\|\Psi_t(w)\|=1$，若 $\dim(F_-(a)+\{S(a)\}+F_t(a))=n$，则至少有一 $v\in F_-(a)\cup F_+(a)$，它不 $\in{}^*w$ 但 $v-w\in{}^*w$，从而 $\|\Psi_t(w)\|=\|\Psi_t(w)\|\leqslant\|\Phi_t|(v)\|$，这给出 $\lim\limits_{t\to\infty}\|\Psi_t(w)\|=0$ 或 $\lim\limits_{t\to-\infty}\|\Psi_t(w)\|=0$，但这不可能，故(2.4)成立. 类似可证(2.5).

§3. 简单极小歧变集

定义 S 的一极小歧变集 Λ 将称为简单的，如果它满足下述条件(1)或(2)，即 (1) Λ 不含有 S 的常点，或(2) Λ 含有 S 的一常点 $a\in Ob(S)$ 使得轨线 $P_a=\{\phi_t(a)|t\in(-\infty,\infty)\}$ 的 ω-极限集合 Γ_a 及 α-极限集合 Γ_a' 都是 Λ 的真子集.

根据上节所述，这定义中的 Λ 在情况(1)下构造极简单，即它

仅由 S 的一非双曲的奇点组成。条件(2)等价于说 Γ_a 及 Γ'_a 都不含有 a，这时 $\Lambda = P_a \cup \Gamma_a \cup \Gamma'_a$ 根据下面行将证明的定理 3.1 及与之相仿的关于α-极限集合的证断，仍可以有较清晰的构造模型(见本节末定理 3.6)。

对 $\mathscr{D}_x(x \in M)$ 中的任一子集 K，记

$$\circledast K = \bigcap_{u \in K} \circledast u.$$

这是 $\mathscr{D}_x$ 中一子线性空间。易验证 $\psi_t(\circledast K) = \circledast \Psi_t(K)$ 对 $t \in (-\infty, \infty)$，若 K 是 $\mathscr{D}_x$ 的子线性空间，则 $\Psi_t(K)$ 是 $\mathscr{D}_{\phi_t(x)}$ 中一子线性空间，且 $\dim \Psi_t(K) = \dim K$(见[13, §2])。

定理 3.1 设 a 是 S 的一常点，过它的轨线 $P_a = \{\phi_t(a) | t \in (-\infty, \infty)\}$ 的 ω-极限集合 Γ_a 与 $Ob(S)$ 不相交，则 S 在 Γ_a 上有双曲构造，且 Γ_a 或则仅由 S 的一奇点 x_0 组成，或则 $\subset M$。在前一情况下，有 $\dim F_-(a) = \dim F_-(x_0)$。在后一情况下，存在数 $\mu < 0$ 及 $d > 0$ 使得

$$\|\phi_{s+t}(u)\| \leqslant \|\phi_s(u)\| \exp(\mu t) \text{ 对 } u \in D_-(a), s \geqslant 0 \text{ 及 } t \geqslant d;$$
$$\|\phi_{s+t}(u)\| \geqslant \|\phi_s(u)\| \exp(-\mu t) \text{ 对 } u \in \circledast D_-(a), s \geqslant 0 \text{ 及 } t \geqslant d. \tag{3.1}$$

我们须要从已有的结果(见[12, 13]等)来推证这定理。为方便，先给几个引理。

引理 3.2 设 K 是 $\mathscr{D}_a(a \in M)$ 中一子线性空间，它对于某数 $\lambda_0 < 0$ 及 $T_0 > 0$ 来说满足

$$\|\phi_{s+t}(u)\| \geqslant \|\phi_s(u)\| \exp(-\lambda_0 t) \text{ 对 } u \in K,\ s \geqslant 0 \text{ 及 } t \geqslant T_0; \tag{3.2}$$

$$\|\Psi_{s+t}(u)\| \leqslant \|\Psi_s(u)\| \exp(\lambda_0 t) \text{ 对 } u \in \circledast K, s \geqslant 0 \text{ 及 } t \geqslant T_0, \tag{3.3}$$

则 $\mathscr{D}_a = K \oplus D_-(a)$，且对某数 $\lambda' < 0$ 及 $T' > 0$ 来说有

$$\|\phi_{s+t}(u)\| \leqslant \|\phi_s(u)\| \exp(\lambda' t) \text{ 对 } u \in D_-(a), s \geqslant 0 \text{ 及 } t \geqslant T'. \tag{3.4}$$

证 我们将考虑给在[11, §1]中一类型的线性方程组并应用

[11,引理 3.5]来证明这引理．为此，取 M^n 在 a 处的一正规 n 标架 $\beta=(S(a)/\|S(a)\|,\alpha)$ 使

$$\mathrm{proj}_k\alpha\in K \text{ 对 } 1\leqslant k\leqslant \dim K.$$

考虑 S 在 M^n 的正交 n-标架从 $\mathscr{F}_n$ 上导出的单参变换群 $\chi_t(-\infty<t<\infty)$(见[11,§1]),并简记 $u_k(t)=\mathrm{proj}_{k+1}\chi_t(\beta)$, $1\leqslant k\leqslant n-1$. 从这变换群,$\phi_t$ 与 Ψ_t 的定义及(3.2),(3.3)易检验

$$u_k(s)\in\phi_s(K)$$

且 (3.5)

$$\begin{aligned}\|u_k(s)\|&=\|\mathrm{proj}_{k+1}\chi_{-t}\chi_{s+t}(\beta)\|\\&\leqslant\|\phi_{-t}(u_k(s+t))\|\leqslant\|u_k(s+t)\|\exp(\lambda_0 t)\\&\text{对 } s\geqslant 0,t\geqslant T_0,\text{ 及 } 1\leqslant k\leqslant \dim K;\\ u_k(s)&\in\circledast\phi_s(K)=\Psi_s(\circledast K)\end{aligned}$$

且 (3.6)

$$\begin{aligned}\|u_k(s)\|&=\|\mathrm{proj}_{k+1}\chi_{-t}\chi_{s+t}(\beta)\|\geqslant\|\Psi_{-t}(u_k(s+t))\|\\&\geqslant\|u_k(s+t)\|\exp(-\lambda_0 t)\\&\text{对 } s\geqslant 0,t\geqslant T_0,\text{ 及 } \dim K<k\leqslant n-1,\end{aligned}$$

我们于是考虑线性方程组 $(\tilde{R}_a)$

$$\frac{dy}{dt}=y\tilde{R}_a(t)^{tr},t\in(-\infty,\infty),y\in E^{n-1}$$

(见[11,§1]). 据(3.5),(3.6)及[11,命题 1.2 及 1.3]可看出

$$\frac{1}{t}\int_s^{s+t}\mathrm{diag}_k\tilde{R}_a(t')dt'\begin{cases}\geqslant-\lambda_0 \text{ 对 } s\geqslant 0,t\geqslant T_0 \text{ 及} 1\leqslant k\leqslant \dim K,\\ \leqslant\lambda_0 \text{ 对 } s\geqslant 0,t\geqslant T_0\text{及}\dim K<k\leqslant n-1.\end{cases}$$

于是据[11, 引理 3.5],存在数 $\lambda'<0$ 及 $T'>0$ 及 E^{n-1} 中的一子线性空间 H, $\dim H=n-1-\dim K$,使得只要 $y_a(t,y)$ 是 $(\tilde{R}_a)$ 的一解取初值 $y_a(0,y)=y\in H$, 即有

$$\|y_a(s+t,y)\|\leqslant\|y_a(s,y)\|\exp(\lambda' t) \text{ 对 } s\geqslant 0 \text{ 及 } t\geqslant T'.$$

命 $D(a)=\{u\in\mathscr{D}_a\,|\,u=\sum_{k=1}^{n-1}y^k\mathrm{proj}_k\alpha, y=(y^1,y^2,\cdots,y^{n-1})\in H\}$,

则据(3.2)及[11,§1]易验证 $D(a)=D_-(a)$,$\mathscr{D}_a=K\oplus D_-(a)$ 及(3.4). 引理证完.

引理 3.3 设 $b\in M$，而K是 $\mathscr{D}_b$ 中一子线性空间，它对某数 $\lambda<0$ 及 $T>0$ 来说满足

$$\|\Psi_{-t}(u)\|\geqslant\|u\|\exp(-\lambda t)\ \text{对}\ u\in K\ \text{及}\ t\geqslant T. \tag{3.7}$$

则 $K\subset\circledast D_+(b)$.

证 设相反地，引理结论不成立，即有 $u_0\in K$ 及 $u_1\in D_t(b)$使 u_1 不$\in\circledast u_0$. 则 $\|u_0\|\neq 0$，且对于某一 $s\in(-\infty,\infty)$有$su_1-u_0\in\circledast u_0$，从而 $\phi_t(su_1)-\Psi_t(u_0)\in\phi_t(\circledast u_0)=\circledast\Psi_t(u_0)$，这给出

$$\lim_{t\to-\infty}\|\Psi_t(u_0)\|\leqslant\lim_{t\to-\infty}\|\phi_t(su_1)\|=0,$$

与(3.7)矛盾. 这证明引理.

任给整数 $p, 0\leqslant p\leqslant n-1$，对任一 $x\in M^n$，$\mathscr{C}_x$ 中所有的 p 维子线性空间构成一 Grassmann 流形 $\mathscr{M}_p(x)$，$\mathscr{C}_x$ 中这样一子线性空间A作为 $\mathscr{M}_p(x)$ 中一点时，将记作 $[A]$. 我们考虑以 M^n 为底空间，并以 Grassmann 流形为纤维自然作成的丛

$$\mathscr{M}_p=\bigcup_{x\in M^n}\mathscr{M}_p(x).$$

记 $\sigma^*:\mathscr{M}_p\to M^n$ 为丛投射 $(\sigma^*(\mathscr{M}_p(x))=x)$，$\mathscr{M}_p$ 是可度量的，其上一拓扑度量可如下给出. 事实上，考虑 M^n 的实心切球丛 $\mathscr{C}^\#=\{u\in\mathscr{C}\mid\|u\|\leqslant 1\}$，这是紧致可度量空间. 任取 $\mathscr{C}^\#$ 上一拓扑度量 ρ，则ρ 是有界的. 于是对 $\mathscr{C}_x,\mathscr{C}_{x'}(x,x'\in M^n)$中的 p 维子线性空间 A,A'，可取

$$\begin{aligned}\rho(A,A')=\inf_\delta\{\delta\in(0,\infty)\mid &\cup_\rho(A\cap\mathscr{C}^\#,\delta)\supset A'\cap\mathscr{C}^\#,\\ &\cup_\rho(A'\cap\mathscr{C}^\#,\delta)\supset A\cap\mathscr{C}^\#\},\end{aligned}\tag{3.8}$$

其中 $\cup_\rho(\cdot,\delta)$表示$\mathscr{C}^\#$中子集的δ-邻域. 易看出这给出 $\mathscr{M}_p$ 上一拓扑度量 $\rho^*([A],[A'])=\rho(A,A')$ 对任意的 $[A]$, $[A']\in\mathscr{M}_p$. 由 Grassmann 流形丛作成的数学语言用起来有方便之处，例如在下面引理的证明中就可以看到，其中

$$\mathscr{N}_p=\bigcup_{x\in M}\mathscr{N}_p(x),$$

$\mathscr{N}_p(x)=\{[A]\in\mathscr{M}_p(x)\mid A\subset\mathscr{D}_x\}$，$\phi_t^*$ 及 $\Psi_t^*:\mathscr{N}_p\to\mathscr{N}_p$ 是 $\mathscr{D}$ 上的单参变换群 $\phi_t,\Psi_t(-\infty<t<\infty)$ 自然地分别在 $\mathscr{N}_p$

上导出的单参变换群.

引理 3.4 设过一点 $a\in M$ 的轨线 $P_a=\{\phi_t(a)\mid t\in(-\infty,\infty)\}$ 的 ω-极限集合 Γ_a 包含在M内，且设 S 在 Γ_a 上有双曲构造. 又设 B_0 是 $\mathscr{D}_a$ 中一子线性空间，$\dim B_0=\dim D_-(x_0)=p$ 对一点 $x_0\in\Gamma_a$，具有性质，即，对某数 $\lambda<0$ 及 $T>0$ 来说有

$$\|\overline{\Psi}_{s+t}(u)\|\leqslant\|\overline{\Psi}_s(u)\|\exp(\lambda t)\ \text{对}\ u\in B_a, s\geqslant 0\ \text{及}\ t\geqslant T.$$

$$\text{则}\ \mathscr{D}_a=(\circledast B_0)\oplus D_-(a) \tag{3.9}$$

且存在 $\bar\lambda<0$ 及 $\bar T>0$ 使得

$$\|\phi_{s+t}(u)\|\geqslant\|\phi_s(u)\|\exp(-\bar\lambda t)$$

$$\text{对}\ u\in\circledast B_0,\ s\geqslant 0\ \text{及}\ t\geqslant\bar T, \tag{3.10}$$

$$\|\phi_{s+t}(u)\|\leqslant\|\phi_s(u)\|\exp(\lambda t)$$

$$\text{对}\ u\in D_-(a),\ s\geqslant 0\ \text{及}\ t\geqslant\bar T, \tag{3.11}$$

证 因 S 在 Γ_a 上有双曲构造，存在数 $\lambda_0<0$ 及 $T_0>0$ 使得对任一 $x\in\Gamma_a$，有 $\dim D_-(x)=\dim(\circledast D_+(x))$ 及

$$\|\phi_{s+t}(u)\|\geqslant\|\phi_s(u)\|\exp(-\lambda_0 t)$$

$$\text{对}\ u\in D_+(x), s\geqslant 0\ \text{及}\ t\geqslant T_0, \tag{3.12}$$

且因 Γ_a 是连通的(由于 M^a 紧致) $\dim D_-(x)=\dim D_-(x_0)=p$ (见[13, §§4及5]). 考虑 $\mathscr{N}_p$ 中的单参变换群$\overline{\Psi}_t^*(-\infty<t<\infty)$ 及轨线$\{\overline{\Psi}_t^*([B_0])\mid t\in(-\infty,\infty)\}$的 ω-极限集合 Γ^*. 从 (3.9) 及 $\overline{\Psi}_t$ 的连续性易看出，对任一 $[A]\in\Gamma^*$ 有

$\|\overline{\Psi}_{s+t}(u)\|\leqslant\|\overline{\Psi}_s(u)\|\exp(\lambda t)$ 对 $u\in A$, $s\in(-\infty,\infty)$, $t\geqslant T$.

于是因 $\sigma^*\overline{\Psi}_t^*([B_0])=\phi_t\sigma(B_0)=\phi_t(a)$ 蕴涵 $\sigma^*(\Gamma^*)\subset\Gamma_a$，据引理 3.3 可得 $A=\circledast D_-(y)$ 对一点 $y\in\Gamma_a$. 故

$$\Gamma^*\subset\{[\circledast D_+(x)]\in\mathscr{N}_p\mid x\in\Gamma_a\}.$$

于是我们考虑由 $\tau([A])=[\circledast A]\in\mathscr{N}_q$ 定义的拓扑变换 $\tau:\mathscr{N}_p\to\mathscr{N}_q$，其中 $q=n-1-p$. 显然 $\phi_t^*\tau=\tau\overline{\Psi}_t^*$ 且 $\tau(\mathscr{N}_p)=\mathscr{N}_q$. 故 $\mathscr{N}_q$ 中就单参变换群 $\phi_t^*(-\infty<t<\infty)$ 来说，轨线 $\{\phi_t^*([\circledast B_0])\in\mathscr{N}_q\mid t\in(-\infty,\infty)\}$ 的 ω-极限集合是 $\tau\Gamma^*$，且

$$\tau(\Gamma^*)\subset\{[D_+(x)]\in\mathscr{N}_q\mid x\in\Gamma_a\}.$$

结合这些及 (3.12) 以及 ϕ_t 的连续性，我们可得出数 $\lambda_1<0$ 及

$T_1 > 0$ 使得

$$\|\phi_{s+t}(u)\| \geqslant \|\phi_s(u)\|\exp(-\lambda_1 t) \text{对} u \in \circledast B_0, s \geqslant 0 \text{及} t \geqslant T_1,$$

进一步据这不等式及(3.9)，并应用引理 3.2，我们有 $\mathscr{D}_a = (\circledast B_0) \oplus D_-(a)$，且对某数 $\lambda_2 < 0$ 及 $T_2 > 0$ 来说有

$$\|\phi_{s+t}(u)\| \leqslant \|\phi_s(u)\|\exp(\lambda_2 t)$$

$$\text{对} \ u \in D_-(a), \ s \geqslant 0 \ \text{及} \ t \geqslant T_2.$$

故引理结论成立，只须取 $\lambda = \mathrm{Max}\{\lambda_1, \lambda_2\}, \bar{T} = \mathrm{Max}\{T_1, T_2\}$.

定理 3.1 的证明 记 $\Pi(\Gamma_a) = \{u \in \mathscr{D} | a(u) \in \Gamma_a\}$，这是紧致可度量空间 $\mathscr{D}$ 中一闭子集，在单参变换群 $\widetilde{\Psi}_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变。据定理假设，有 $Ob(S) \cap \Gamma_a = 0$ 或等价地

$$\left\{u \in \mathscr{D} \,\middle|\, \int_0^t \tilde{\omega}(\widetilde{\Psi}_{t'}(u))dt' \geqslant 0 \ \text{对所有} \ t \in (-\infty, \infty)\right\} \cap \Pi(\Gamma_a) = 0 \tag{3.13}$$

[见(2.1)]. 于是我们可应用[12，定理 G][1]到空间 $\mathscr{D}$ 及其上的连续函数 $\tilde{\omega}(u)$ 以及单参变换群 $\widetilde{\Psi}_t(-\infty < t < \infty)$ 这情况，得出 $\Pi(\Gamma_a)$ 的一分解

$$\Pi(\Gamma_a) = \Pi_- \cup \Pi_+ \cup \widehat{\Pi}$$

及 $\Pi(\Gamma)$ 的一闭子集 $\Pi^* \subset \widehat{\Pi}$，满足下述要求：($\mathrm{i}_0$) Π_-，Π_+ 及 $\widehat{\Pi}$ 彼此互不相交，都在 $\widetilde{\Psi}_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变，且 Π_- 及 Π_+ 都是 $\Pi(\Gamma_a)$ 中的闭子集，而 $\widehat{\Pi} = \{\widetilde{\Psi}_t(u) | t \in (-\infty, \infty), u \in \Pi^*\}$；($\mathrm{ii}_0$) 存在数 $\eta_* < 0$ 及 $d_* > 0$ 使得

$$\frac{1}{2}\int_0^t \tilde{\omega}(\widetilde{\Psi}_{t'}(u))\,dt' < \begin{cases} t\eta_* \ \text{对} \ u \in \Pi_- \ \text{及} \ t \geqslant d_*, \\ -t\eta_* \ \text{对} \ u \in \Pi_+ \ \text{及} \ t \leqslant -d_*, \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^t \tilde{\omega}(\widetilde{\Psi}_{s+t'}(u))dt' < \begin{cases} t\eta_* \ \text{对} \ u \in \Pi^*, s \geqslant 0 \ \text{及} \ t \geqslant d_*, \\ -t\eta_* \ \text{对} \ u \in \Pi^*, s \leqslant 0 \ \text{及} \ t \leqslant -d_*. \end{cases}$$

记 $H_- = \Pi_- \cup \{\widetilde{\Psi}_t(u) | t \in \langle 0, \infty), u \in \Pi_*\}$，$H_+ = \Pi_+ \cup \{\widetilde{\Psi}_t(u) | t \in$

---

1) 文献[12]中的定理 A，B，C，D，E，F 和G分别是本书第三章中的定理 3.1，3.2，3.3，3.4，3.53.6，和 4.1.

$(-\infty,0\rangle, u\in\Pi^*\}$. 从函数 $\tilde{\omega}(u)$ 及变换群 $\widetilde{\Psi}_t\ (-\infty<t<\infty)$ 的连续性以及 (i_0), (ii_0) 易看出，H_- 及 H_+ 都是 $\Pi(\Gamma_a)$ 的闭子集，且对每一正整数 k 可分别取 H_-,H_+ 在 $\tilde{\mathscr{D}}$ 中的邻域 $W_-(k)$, $W_+(k)$ 使得

$$\int_0^t \tilde{\omega}(\widetilde{\Psi}_{t'}(u))dt' < t\eta^*$$

$$\text{对}\ u\in W_-(k),\ d_*\leqslant t\leqslant d_*+k, \tag{3.14}$$

$$\int_0^t \tilde{\omega}(\widetilde{\Psi}_{t'}(u))dt' < -t\eta_*$$

$$\text{对}\ u\in W_+(k),\ -d_*-k\leqslant t\leqslant -d_*. \tag{3.15}$$

又 $W(k)=W_-(k)\cup W_+(k)$ 也是 $\Pi(\Gamma_a)=H_-\cup H_+$ 在 $\tilde{\mathscr{D}}$ 中的一邻域，从 $\tilde{\mathscr{D}}$ 的紧致性及 $\sigma|\tilde{\mathscr{D}}:\tilde{\mathscr{D}}\to M^*$ 的连续性，对每一 k 可取 Γ_a 在 M^* 中的一邻域 $N(k)$ 使得

$$\{u\in\tilde{\mathscr{D}}\,|\,\sigma(u)\in N(k)\}\subset W(k).$$

于是，由于 Γ_a 是 S 过常点 a 的轨线 P_a 的 ω-极限集合，对每一 k 可取一数 $T(k)\geqslant k$ 使得半轨线 $\{\phi_t(a)\,|\,t\in\langle T(k),\infty)\}\subset N(k)$, 从而

$$\mathscr{D}_{\phi_t(a)}\cap\tilde{\mathscr{D}}\subset W(k)\ \text{对所有}\ t\in\langle T(k),\infty). \tag{3.16}$$

我们说，存在一 $k_0\geqslant d_*$ 具有性质：对任给的 $v_0\in\mathscr{D}_a\cap\tilde{\mathscr{D}}'$ 及 $s_0\in\langle T(k_0),\infty)$, 只要 $\widetilde{\Psi}_{s_0}(v_0)\in W_-(k_0)$, 即有 $\widetilde{\Psi}_t(v_0)\in W_-(k_0)$ 对所有 $t\in\langle s_0+d_*,\infty)$. 事实上，设相反地，对每一 $k\geqslant d_*$ 存在 $(v_k,s_k,t_k)\in(\mathscr{D}_a\cap\tilde{\mathscr{D}})\times\langle T(k),\infty)\times\langle s_k+d_*,\infty)$ 使得 $\widetilde{\Psi}_{s_k}(v_k)\in W_-(k)$, 但 $\widetilde{\Psi}_{t_k}(v_k)$ 不 $\in W_-(k)$. 则据 (3.16), $\widetilde{\Psi}_{t_k-s_k}(\widetilde{\Psi}_{s_k}(v_k))=\widetilde{\Psi}_{t_k}(v_k)\in W_+(k)$. 可取 $\bar{s}_k\in\langle s_k,t_k\rangle$ 使得对 $t\in\langle s_k,t_k\rangle$ 来说的函数

$$\int_{s_k}^t(\widetilde{\Psi}_{t'}(v_k))dt'$$

在 $\bar{s}_k$ 处取极小值，并置 $\bar{v}_k=\widetilde{\Psi}_{\bar{s}_k}(v_k)$, 这给出

$$\int_0^t\tilde{\omega}(\widetilde{\Psi}_{t'}(\bar{v}_k))dt'>0\ \text{对}\ t\in\langle s_k-\bar{s}_k,t_k-\bar{s}_k\rangle.$$

我们可应用(3.14)及(3.15). 于是先看出 $t_k - s_k \geqslant d_* + k$,进而有

$$\int_0^{t_k - t_k} \tilde{\omega}(\widetilde{\Psi}_{t'}(\bar{v}_k))dt' \geqslant -(d_* + k)\eta_*,$$

$$\int_0^{t_k - \tau_k} \tilde{\omega}(\tilde{\phi}_{t'}(\bar{v}_k))dt' \geqslant -(d_k + k)\eta_*.$$

这以及 $\tilde{\omega}(w)$ 在 $\mathscr{D}$ 上的有界性给出

$$\lim_{k\to\infty}(s_k - \bar{s}_k) = -\infty, \quad \lim_{k\to\infty}(t_k - \bar{s}_k) = \infty.$$

但 $\mathscr{D}$ 是紧致可度量的空间. 故存在由某些 $\bar{v}_k$ 作成的一序列, 收敛到一 $\bar{v} \in \mathscr{D}$. 于是, 结合这些以及函数 $\tilde{\omega}(u)$ 及变换群 Ψ_t 的连续性就给出

$$\int_0^t \tilde{\omega}(\widetilde{\Psi}_{t'}(\bar{v}))dt' \geqslant 0 \quad 对所有\ t \in (-\infty, \infty).$$

但 $\bar{v} \in \Pi(\Gamma_a)$, 因为 Γ_a 是 S 的轨线 P_a 的 ω-极限集合, 且 $\bar{s}_k \geqslant s_k \geqslant T(k) \geqslant k$. 这样,我们就得出与(3.13)相矛盾的结论, 这矛盾证明我们断语中 $k_0 \geqslant d_*$ 的存在. 进一步再结合(2.1)及(3.14)我们可看出: 对任给的 $v_0 \in \mathscr{D}_a \cap \mathscr{D}$ 及 $s_0 \in \langle T(k_0), \infty)$ 只要 $\Psi_{s_0}(v_0) \in W_-(k_0)$, 即有

$$\log \|\Psi_t(\widetilde{\Psi}_s(v_0))\| = \int_0^t \tilde{\omega}(\widetilde{\Psi}_{s+t'}(v_0))dt' < t\eta_* \qquad (3.17)$$

对所有的 $s \in \langle s_0 + d_*, \infty)$ 及 $t \in \langle d_*, \infty)$.

我们将进一步用[12,13]中的一些结果来完成定理的证明,并用记号

$$B_-(x) = \{u \in \mathscr{C}_x | u \ 与\ S(x)\ 及\ F_+(x)\ 都正交\},$$

$$B_+(x) = \{u \in \mathscr{C}_x | u \ 与\ S(x)\ 及\ F_-(x)\ 都正交\}$$

对于 $x \in M^*$. 这些都是 $\mathscr{C}_x$ 的子线性空间. 先设

(I_0) Γ_a 不含有 S 的奇点, 即 $\Gamma_a \subset M$. 记 $\Gamma^l = \{x \in \Gamma_a | \dim B_-(x) = l, \dim B_+(x) = n - 1 - l\}$. 因 M^* 紧致蕴涵 $\Gamma_a \neq 0$, 且 $Ob(S) \cap \Gamma_a = 0$, 可应用[12, 定理 E],看出至少有一 l 使 $\Gamma^l \neq 0$. 命 P 为最大的整数使 $\Gamma^P \neq 0$. 我们说, 对任结的 $0 \leqslant$

$p' < p$ 必有 $\Gamma^{p'} = 0$. 事实上,设相反地,这不成立. 任取 $b_0 \in \Gamma^p$ 及 $b_1 \in \Gamma^{p'}$. 据[12,定理 D]及前面 (ii$_0$), 易看出 $B_-(b_0) \cap \mathscr{D} \subset \Pi_- \subset W_-(k_0)$, 于是因 Γ_a 是 S 过常点 a 的轨线的 ω-极限集合,我们一方面可取一 $s_0 \in (T(k_0), \infty)$ 使得 $\phi_{s_0}(a)$ 充分靠近 b_0,从而使得 $\mathscr{D}_a$ 中有一 p 维子线性空间 B_0 满足 $\Psi_{s_0}(B_0 \cap \mathscr{D}) \subset W_-(k_0)$,另一方面结合[12, 定理 D]中所述关于 $B_+(b_1)$ 的性质,又可取一 $s_1 \in (s_0 + d_*, \infty)$ 使 $\phi_{s_1}(a)$ 充分靠近 b_1, 从而使得 $\mathscr{D}_a$ 中有一 $n-1-p'$ 维子线性空间 B_1,它对一数 $d_1 \geqslant d_*$ 来说满足

$$\|\Psi_{d_1}(u)\| > 1 \text{ 对所有 } u \in \widetilde{\Psi}_{s_1}(B_1 \cap \mathscr{D}).$$

于是存在 $v_0 \in B_0 \cap B_1 \cap \mathscr{D}$ 使得一方面 $u = \widetilde{\Psi}_{s_1}(v_0)$ 满足这个不等式, 另一方面, v_0 对于 $s = s_1$ 及 $t = d_1$ 又满足 (3.17), 因为 $\dim B_0 + \dim B_1 = p + n - 1 - p' > n - 1$, 这是一矛盾.这样就证明 $\Gamma^{p'} = 0$. 既然 $\Gamma^{p'} = 0$ 对所有的 $0 \leqslant p' < p$, 再据[12, 定理 E]易看出 $\Gamma_a = \Gamma^p$, 其中 $p = \dim B_-(x) = \dim(\circledast D_+(x)) = \dim D_-(x)$ 对 $x \in \Gamma_a$, 且 S 在 Γ_a 上有双曲构造. 于是, 仍取 $\mathscr{D}_a$ 中一 p 维子线性空间 B_0 使 $\widetilde{\Psi}_{s_0}(B_0 \cap \mathscr{D}) \subset W_-(k_0)$ 如上, 则据(3.17)及函数 $\tilde{\omega}(u)$ 在 $\mathscr{D}$ 上的有界性,对某数 $\lambda < 0$ 及 $T > 0$ 来说有

$\|\Psi_{s+t}(u)\| \leqslant \|\Psi_s(u)\| \exp(\lambda t)$ 对 $u \in B_0, s \geqslant 0$ 及 $t \geqslant T$. 于是应用引理 3.4, 我们有 $\mathscr{D}_a = (\circledast B_0) \oplus D_-(a)$, 因而 $\dim D_-(a) = \dim B_0 = p$, 且(3.10)成立对某数 $\tilde{\lambda} < 0$ 及 $\tilde{T} > 0$. 进一步应用引理 3.2 到 $K = \circledast B_0$(及 $\lambda_0 = \mathrm{Max}\{\lambda, \tilde{\lambda}\}, T_0 = \mathrm{Max}\{T, \tilde{T}\}$), 则(3.4)成立对某数 $\lambda' < 0$ 及 $T' > 0$. 从 $\mathscr{D}_a = (\circledast B_0) \oplus D_-(a)$ 及(3.4), (3.10), 我们易得出 (3.1) 对某数 $\mu < 0$ 及 $d > 0$成立. 这证明在 Γ_a 不含有 S 的奇点情况下的定理 3.1.

其次,设

(II$_0$) Γ_a 含有 S 的一奇点 x_0, 因据定理假设, $\Gamma_a \cap Ob(S) = 0$ 而 Γ_a 是 S 过常点 a 的轨线的 ω-极限集合,故 S 在 Γ_a 中的奇点都

是双曲的（见[13，§3]）．命 N_- 及 N_+ 分别为 x_0 处的稳定及非稳定流形．若 $x\in M\cap N_-$，则 $S(x)\in F_-(x)$，$\dim F_-(x)=\dim F_-(x_0)$且 $\dim B_+(x)=\dim F_+(x_0)$（见[13，§§3，5]）．同样，若 y 是 S 的一常点 $\in N_+$，则 $\dim B_-(y)=\dim F_-(x_0)$．我们说 Γ_a 仅由点 x_0 组成，由是 $a\in N_-$ 上，而

$$\dim F_-(x_0)=\dim F_-(a).$$

这是因为：否则 S 就有常点 c_0 及 $c_1\in\Gamma_a$ 分别在 N_+ 及 N_- 上，因而 $\dim B_-(c_0)+\dim B_+(c_1)=\dim F_-(x_0)+\dim F_+(x_0)>n-1$；与上面（$\mathrm{I}_0$）中的讨论相仿并用[12，定理 D]，这将引出一矛盾．现在，定理 3.1 证完．

系 3.5 同定理 3.1 假设，并设 $\Gamma_a\subset M$，命 $p=\dim D_-(a)$．则 $\dim D_-(x)=p$ 对 $x\in\Gamma_a$，且 $\mathscr{N}_p$ 中就单参变换群 $\phi_t^*(-\infty<t<\infty)$ 来说过 $[D_-(a)]$ 的轨线是 $\{[D_-(x)]\in\mathscr{N}_p|x\in\Gamma_a\}$，$\mathscr{N}_{n-1-p}$ 中就单参变换群 $\phi_t^*(-\infty<t<\infty)$ 来说过 $[\circledast D_-(a)]$ 的轨线是 $\{[D_+(x)]\in\mathscr{N}_{n-1-p}|x\in\Gamma_a\}$，

证 这易从(3.1)，S 在 Γ_a 上的双曲构造，从投射 σ^* 及 $\mathscr{D}$ 上变换群 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 的连续性推出．

与定理 3.1 及系 3.5 相类似，显然我们也可以有关于 P_a 的 α-极限集合与 $Ob(S)$ 不相交情况下的结果（它也可应用已有的结果到 $-S$ 来得到）．所以，结合命题 2.3 及 §2 中的其他论据，我们易得出

定理 3.6 设 Λ 是 S 的一简单极小歧变集．则 Λ 仅由一个点组成的充要条件是这点必为 S 的非双曲的奇点．设 Λ 含有多于两个点．则 S 有一常点 $a\in\Lambda\cap Ob(S)$ 具有性质：

(i) S 在轨线 $P_a=\{\phi_t(a)|t\in(-\infty,\infty)\}$ 的 ω-极限集合 Γ_a 及 α-极限集合 Γ_a' 上都有双曲构造．

(ii) $\Lambda=P_a\cup\Gamma_a\cup\Gamma_a'$，$(\Gamma_a\cup\Gamma_a')\cap Ob(S)=0$ 由是 $\Lambda\cap Ob(S)$ 包含在 P_a 的一(有限)轨弧内．

(iii) $\dim(D_-(a)+D_+(a))<n-1$，由是 $\dim((\circledast D_-(a))\cap(\circledast D_+(a)))\geqslant 1$．

(iv) Γ_a 或则仅由 S 的一奇点组成，或则 $\subset M$。在后一情况下，存在数 $\mu<0$ 及 $d>0$ 使

$\|\phi_{s+t}(u)\|\leqslant\|\phi_s(u)\|\exp(\mu t)$ 对 $u\in D_-(a)$, $s\geqslant 0$ 及 $t\geqslant d$,

$\|\phi_{s+t}(u)\|\geqslant\|\phi_s(u)\|\exp(-\mu t)$ 对 $u\in \circledast D_-(a)$, $s\geqslant 0$ 及 $t\geqslant d$,

且 $\dim D_-(x)=\dim D_-(a)$ 对 $x\in\Gamma_a$。

(v) Γ'_a 也或则仅由 S 的一奇点组成，或则 $\subset M$。在后一情况下，存在数 $\mu'<0$ 及 $d'>0$ 使

$\|\phi_{s+t}(u)\|\leqslant\|\phi_s(u)\|\exp(-\mu' t)$ 对 $u\in D_+(a)$, $s\leqslant 0$ 及 $t\leqslant -d'$,

$\|\phi_{s+t}(u)\|\geqslant\|\phi_s(u)\|\exp(\mu' t)$ 对 $u\in \circledast D_+(a)$, $s\leqslant 0$ 及 $t\leqslant -d'$,

且 $\dim D_-(x)=\dim(\circledast D_+(a))$ 对 $x\in\Gamma'_a$。

§4. 集合 $M(\eta,\bar{T};p)$ 与 $S\in\mathscr{R}^*$ 的扭拆集 $R(\zeta,p)\cup L(\zeta,p)$

任给定数 $\eta>0$ 及 $\bar{T}>0$，仍先考虑一 $S\in\mathscr{R}$ 如前。

定义 4.1 对一整数 $p(0\leqslant p\leqslant n-1)$，我们将称 S 在一点 $x\in M$ 处有 $(\eta,\bar{T};\ p)$-半双曲构造，如果 $\mathscr{D}_x$ 直和分解

$$\mathscr{D}_x=\Delta_-^p(x)\oplus\Delta_+^p(x),\ 其中\ \dim\Delta_-^p(x)=p, \tag{4.1}$$

使得若 $u\in\Delta_-^p(x)$, $v\in\Delta_+^p(x)$ 且 $\|u\|=1=\|v\|$，则

$$\begin{aligned}&\|\phi_t(v)\|\geqslant\|\phi_t(u)\|\exp(2\eta t)\ 对所有\ t\geqslant\bar{T},\\&\|\phi_t(u)\|\geqslant\|\phi_t(v)\|\exp(-2\eta t)\ 对所有\ t\leqslant-\bar{T},\end{aligned} \tag{4.2}$$

这时(4.1)将称为 S 在 x 处的 $(\eta,\bar{T};\ p)$-半双曲分解。记

$$M(\eta,\bar{T};p)=\{x\in M\mid S\ 在\ x\ 处有\ (\eta,\bar{T};\ p)\text{-半双曲构造}\}.$$

例，若 S 是 M^n 上一 Anosov 系统，则对某数 $\eta>0$ 及 $T>0$ 来说，S 在每一点 x 处都有 $(\eta,\ T;\ p)$-半双曲构造，其中 $p=\dim D_-(x)$（见 [13, §5]）。又显然，s 在每一点 $x\in M$ 处都有 $(\eta,T;0)$ 或 $(\eta,T;\ n-1)$-半双曲构造对任何数 $\eta>0$ 及 $T>0$。

命题 4.1 设 S 在一点 $x\in M$ 处有 $(\eta,\ \bar{T};\ p)$-半双曲分解 $\mathscr{D}_x=\Delta_-^p(x)\oplus\Delta_+^p(x)$，且又有 $(\eta',T';\ p')$-半双曲分解 $\mathscr{D}_x=N_-^{p'}(X)\oplus N_+^{p'}(x)$。则当 $p\leqslant p'$ 时，$\Delta_-^p(x)\subset N_-^{p'}(x)$ 且 $\Delta_+^p(x)\supset N_+^{p'}(x)$. 特别地，当 $p=p'$ 时，$\Delta_-^p(x)=N_-^{p'}(x)$ 且 $\Delta_+^p(x)=$

$N_+^{p}{}'(x)$，并且对于某一 $s\in(-\infty,\infty)$，S 在 $\phi_s(x)$ 处也有$(\bar{\eta},\bar{T};p)$ -半双曲分解 $\mathscr{D}_{\phi_s(x)}=\Delta_-^p(\phi_s(x))\oplus\Delta_+^p(\phi_s(x))$，则必有 $\phi_s(\Delta_-^p(x))=\Delta_-^p(\phi_s(x))$ 及 $\phi_s(\Delta_+^p(x))=\Delta_+^p(\phi_s(x))$。

证 取 $\eta=\mathrm{Min}\{\bar{\eta},\eta'\}$，$T=\mathrm{Max}\{\bar{T},T'\}$。设有 $u\in\Delta_-^p(x)-N_-^{p}{}'(x)$ 且有 $v\in N_-^{p}{}'(x)-\Delta_-^p(x)$。则据半双曲构造所需满足的条件及 ϕ_t 将 $\mathscr{D}_x$ 线性映射到 $\mathscr{D}_{\phi_t(x)}$ 上这一性质，易看出对于充分大的 $t\geqslant T$ 有$\|\phi_t(u)\|\geqslant\|\phi_t(v)\|\exp(\eta t)$ 且 $\|\phi_t(v)\|\geqslant\|\phi_t(u)\|\exp(\eta t)$，但这不可能，故必有 $\Delta_-^p(x)\subset N_-^{p}{}'(x)$ 或 $N_-^{p}{}'(x)\subset\Delta_-^p(x)$，由是当 $p\leqslant p'$ 时，前者成立。类似可证当 $p\leqslant p'$ 时，$\Delta_+^p(x)\supset N_+^{p}{}'(x)$。命题中关于 $p=p'$ 情况下的结论显然成立。进一步，易看出 $\mathscr{D}_x$ 有 $(\bar{\eta},\bar{T};\ p)$-半双曲分解蕴涵$\mathscr{D}_{\phi_s(x)}$ 有 $(\bar{\eta}/2,T_s;\ p)$ -半双曲分解对一充分大的 T_s，从而命题余下部分也成立。证完。

据上述命题，S 在任一 $x\in M(\bar{\eta},\bar{T};p)$ 处的 $(\bar{\eta},\ \bar{T};\ p)$ -半双曲分解(4.1)的存在是唯一的。故置 $g^p(x)=[\Delta_-^p(x)]\in\mathscr{M}_p(x)$ (Grassmann 流形，看前节)及 $h^p(x)=[\Delta_+^p(x)]\in\mathscr{M}_{n-1-p}(x)$，即给出单值对应

$$g^p:M(\bar{\eta},\bar{T};p)\rightarrow\mathscr{M}_p,\quad h^p:M(\bar{\eta},\bar{T};p)\rightarrow\mathscr{M}_{n-1-p}. \tag{4.3}$$

命题 4.2 $M(\bar{\eta},\bar{T};p)$ 是M中一闭子集；g^p 及 h^p 都在 $M(\bar{\eta},\bar{T};p)$ 上连续.

证 考虑 $M(\bar{\eta},\bar{T};p)$ 中一任给的收敛序列 $\{x_i\}$，它收敛到一点 $x_0\in M$。首先从(3.8)可直接看出，这序列有子序列 $\{y_j\}$ 使得 $\{g^p(y_j)\}$ 及 $\{h^p(y_j)\}$ 分别收敛到 $[\Delta_-^p(x_0)]$ 及 $[\Delta_+^p(x_0)]$ (其中 $\Delta_-^p(x_0)$ 及 $\Delta_+^p(x_0)$ 分别是 $\mathscr{D}_{x_0}$ 中的 p 维及 $n-1-p$ 维子线性空间，因 $g^p(x_i)$ 及 $h^p(x_i)$ 实际上分别 $\in\mathscr{N}_p$ 及 $\mathscr{N}_{n-1-p}$)。于是从 S 在 y_j 处的 $(\bar{\eta},\bar{T};\ p)$ -半双曲分解所需满足的条件及变换群 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 的连续性即得出，S 在 x_0 处有 $(\bar{\eta},\bar{T};p)$ -半双曲分解 (4.1)(对于 $x=x_0$)，由是 $x_0\in M(\bar{\eta},\bar{T};p)$，且有 $g^p(x_0)=[\Delta_-^p(x_0)]$，$h^p(x_0)=[\Delta_+^p(x_0)]$，这样取子序列的法子结合命题 4.1 也可用来看出，$\{g^p(x_i)\}$ 及 $\{h^p(x_i)\}$ 分别收敛到 g^p

(x_0) 及 $h^p(x_0)$。这证明命题 4.2。

我们也将考虑任一 $X\in\mathscr{X}$ 及 X 分别在 M^* 上以及在切空间丛 $\mathscr{C}$ 上导出的单参变换群

$\phi_{X_t}: M^*\to M^*$，$\Phi_{X_t}:\mathscr{C}\to\mathscr{C}(-\infty<t<\infty)$（见§1）。如同 S 的共轭丛 $\mathscr{D}$，每一 $X\in\mathscr{X}$ 也有它的共轭丛，记作 $\mathscr{D}_X$。这丛以 X 的常点集合为底空间，其在 x 处的纤维将记作 $\mathscr{D}_{X_x}$（即 $\mathscr{D}_{X_x}=\{u\in\mathscr{C}_x|\langle u,\ X(x)\rangle=0\}$）。如同 S 在 $\mathscr{D}$ 上导出单参变换群 ψ_t $(-\infty<t<\infty)$ 这情况，$X\in\mathscr{X}$ 也在 $\mathscr{D}_X$ 上导出一单参变群，记作

$$\psi_{X_t}:\mathscr{D}_X\to\mathscr{D}_X,-\infty<t<\infty.$$

当 $X=S$ 时，ϕ_{S_t} 及 ψ_{S_t} 自然分别为以前的 ϕ_t 及 ψ_t。记

$$\mathscr{X}_{\#}=\{(X,t,u)\in\mathscr{X}\times(-\infty,\infty)\times\mathscr{C}\,|\,u\in\mathscr{D}_X\}.$$

对于 $(X,t,u)\in\mathscr{X}_{\#}$，置

$$\psi_{\#}(X,t,u)=\psi_{X_t}(u)\in\mathscr{D}_X.$$

引理 4.3 $\psi_{\#}$ 在 $\mathscr{X}_{\#}$ 上连续。

证 同[10,12—13 页]中。

现在，如同前面对于 S，我们定义了集合 $M(\eta,\overline{T};p)$ 这情况，对任一 $X\in\mathscr{X}$ 我们也可定义 M^* 中一子集（记作）$M_X(\eta,\overline{T};p)$，它由 X 一切具有如下性质的常点 x 组成，即 X 在 x 处有 $(\eta,\overline{T};p)$-半双曲构造，亦即 $\mathscr{D}_{X_x}$ 有直和分解

$$\mathscr{D}_{X_x}=\Delta^{\xi}_{X-}(x)\oplus\Delta^{\xi}_{X+}(x),\quad \dim\Delta^{\xi}_{X-}(x)=p,$$

使得：若 $u\in\Delta^{\xi}_{X-}(x),v\in\Delta^{\xi}_{X+}(x)$ 且 $\|u\|=1=\|v\|$，则(4.2)当 ψ_t 换作 ψ_{X_t} 时仍成立。如同(4.3)中，我们置

$g^{\xi}_X(x)=[\Delta^{\xi}_{X-}(x)]\in\mathscr{M}_p(x)$，$h^{\xi}_X(x)=[\Delta^{\xi}_{X+}(x)]\in\mathscr{M}_{n-1-p}(x)$，同前，这定义映射

$$g^{\xi}_X:M_X(\eta,\overline{T};p)\to\mathscr{M}_p,\quad h^{\xi}_X:M_X(\eta,\overline{T};P)\to\mathscr{M}_{n-1-p}.$$

命题 4.4 设 $\{x_i\}$ 是 M^* 中一序列，收敛到一点 $a\in M$，$\{X_i\}$ 是 $\mathscr{X}$ 中一序列，满足 $\lim\limits_{i\to\infty}\|X_i-S\|_1=0$，且设 $x_i\in M_{X_i}(\eta,\ \overline{T};p)(i=1,2,3,\cdots)$。则 $a\in M(\eta,\overline{T};p)$ 且

$$\lim_{i\to\infty} g^p_{X_i}(x_i) = g^p(a), \quad \lim_{i\to\infty} h^p_{X_i}(x_i) = h^p(a).$$

证 与命题 4.2 的证法相类;用引理 4.3.

本章余下部分将假定 $S \in$ 常微系统族 $\mathscr{X}^*$. 这族由所有具有下述性质的 $X \in \mathscr{X}$ 组成, 即 X 在 $\mathscr{X}$ 中有一邻域 $\mathscr{U}$ 使得每一 $Y \in \mathscr{U}$ 都只有有限个数的奇点, 也至多只有可数多个周期轨道(或等价地, 每一 $Y \in \mathscr{U}$ 的所有奇点和周期轨道都是双曲的, 参看[3]及[14]). 我们在[14]中讨论过族 $\mathscr{X}^*$. 在后面命题 5.8 中, 我们将指出, 若 $S \in \mathscr{X}$ 不具有混杂非游荡点(见 §1), 则 $S \in \mathscr{X}^*$.

设 $X \in \mathscr{X}^*$. 若 x 是 X 的一常点, 命

$$D_-(X,x) = \{u \in \mathscr{D}_{Xx} \mid \lim_{t\to\infty} \|\phi_{X_t}(u)\| = 0\},$$

$$D_+(X,x) = \{u \in \mathscr{D}_{Xx} \mid \lim_{t\to\infty} \|\phi_{X_t}(u)\| = 0\},$$

这些是 $\mathscr{D}_{Xx}$ 的子线性空间. 若 $X = S, D_-(X,x)$ 及 $D_+(X,x)$ 分别即为(2.3)中的 $D_-(x)$ 及 $D_+(x)$. 若 x 是 X 的一周期轨道上的点, 则

$$\mathscr{D}_{Xx} = D_-(X,x) \oplus D_+(X,x) \tag{4.4}$$

(见[14]). 对任给的 $0 \leqslant t < \infty$ 及在 X 的一常点 x 处 $\mathscr{D}_{Xx}$ 的一子线性空间 A, 记

$$\eta_-(X, A; t) = \begin{cases} \sup\limits_{u\in A, \|u\|=1} \{\log\|\phi_{X_t}(u)\|\}, 若 \dim A > 0, \\ -\infty, 若 \dim A = 0, \end{cases}$$

$$\tag{4.5}$$

$$\eta_+(X, A; t) = \begin{cases} \inf\limits_{u\in A, \|u\|=1} \{\log\|\phi_{X_t}(u)\|\}, 若 \dim A > 0, \\ \infty, 若 \dim A = 0. \end{cases}$$

当 $X = S$ 时, 简写 $\eta_-(X, A; t)$ 及 $\eta_+(X, A; t)$ 分别为 $\eta_-(A, t)$ 及 $\eta_+(A, t)$.

命题 4.5 设 $S \in \mathscr{X}^*$. 则 S 在 $\mathscr{X}^*$ 中有一邻域 $\widetilde{\mathscr{U}}$ 且存在数 $\bar\eta > 0$ 及 $T_* > 1$ 使得: 如果 $X \in \widetilde{\mathscr{U}}$, 则

(i) 只要 x 是 X 的周期轨道上的一点, 且 $T_* \leqslant t < \infty$, 即有

$$\frac{1}{t}(\eta_+(X, D_+(X,x); t) - \eta_-(X, D_-(X,x); t)) \geqslant 2\bar\eta;$$

(ii) 只要 P 是 X 的一个周期为 T 的周期轨道，$x \in P$，且对于一整数 $m \geqslant 1, 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_l = mT$ 是 $\langle 0, mT \rangle$ 的一分割满足

$$t_k - t_{k-1} \geqslant T_*, k = 1, 2, \cdots, l,$$

即有

$$\frac{1}{mT} \sum_{k=0}^{l-1} \eta_-(X, D_-(X, \phi_{t_k}(x)); t_{k+1} - t_k) \leqslant -\bar{\eta} \qquad (4.6)$$

及

$$\frac{1}{mT} \sum_{k=0}^{l-1} \eta_+(X, D_+(X, \phi_{t_k}(x)); t_{k+1} - t_k) \geqslant \bar{\eta}. \qquad (4.7)$$

证 据[14]的主要定理，S 在 $\mathscr{X}^*$ 中有一邻域 $\mathscr{U}_1$ 且存在数 $\eta_1 > 0$ 及 $T_1 > 1$ 使得对于 $X \in \mathscr{U}_1$，这里命题叙述中的结论(i)及 $m = 1$ 时的结论(ii)，当把 $\bar{\eta}$ 及 T_* 分别换作 η_1 及 T_1 时，都成立。又应用 [11, §1] 中所述关于(～)型线性方程组的解的几何性质，并应用[14, 命题 2.1]到 $X \in \mathscr{X}$，我们可看出：S 在$\mathscr{X}$ 中有一邻域 $\mathscr{U}_0$ 使得对任给的数 $d > 0$，存在数 $\xi_d > 0$ 满足

$$-\xi_d \leqslant \inf_{\substack{X \in \mathscr{U}_0, t \in (-d, d) \\ u \in \mathscr{D}_X, \|u\| = 1}} \{\log \|\phi_{X_t}(u)\|\}$$

$$\leqslant \sup_{\substack{X \in \mathscr{U}_0, t \in (-d, d) \\ u \in \mathscr{D}_X, \|u\| = 1}} \{\log \|\phi_{X_t}(u)\|\} \leqslant \xi_d, \qquad (4.8)$$

我们说，存在数 $T_0 \geqslant T_1$ 使得：只要 $X \in \mathscr{U} \cap \mathscr{U}_0$，$P$ 是 X 的一个周期为 $T \geqslant T_0$ 的周期轨道，$x \in P$，且 $0 = s_0 \leqslant s_1 < s_2 < \cdots < s_l \leqslant s_{l+1} = T (l \geqslant 2)$ 是 $\langle 0, T \rangle$ 的一分割满足

$$0 \leqslant s_1 - s_0 < T_1, 0 \leqslant s_{l+1} - s_l < T_1,$$

$$s_{k+1} - s_k \geqslant T_1 \text{ 对 } k = 1, 2, \cdots, l-1,$$

则

$$\frac{1}{T} \sum_{k=0}^{l} \eta_-(X, D_-(X, \phi_{X s_k}(x)); s_{k+1} - s_k) \leqslant -\frac{\eta_1}{2}.$$

事实上，据(4.8)有

$$\eta_-(X, D_-(X, \phi_{X_{s_0}}(x)); s_1 - s_0) \leqslant \xi_{T_1},$$

$$\eta_-(X, D_-(X, \phi_{X s_l}(x)); s_{l+1} - s_l) \leqslant \xi_{T_1};$$

$$\eta_-(X, D_-(X, \phi_{X s_1}(x)); s_2 - s_1) \leqslant \xi_{T_1}$$

及 $$+ \eta_-(X, D_-(X, \phi_{X s_0}(x)); s_2 - s_0)$$

$$\eta_-(X, D_-(X, \phi_{X s_{l-1}}(x)); \; s_l - s_{l-1})$$

$$\leqslant \eta_-(X, D_-(X, \phi_{s_{l-1}}(x)); s_{l+1} - s_{l-1}) + \xi_{T_1}$$

(由于 $\|\phi_{X(s_2-s_1)}(u)\| = \|\phi_{X(s_0-s_1)}(u)\| \cdot \|\phi_{X(s_2-s_0)}(\phi_{X(s_0-s_1)}(u)/\|\phi_{X(s_0-s_1)}(u)\|)\|$ 对于满足 $\|u\| = 1$ 的 $u \in \phi_{X s_1}(\mathscr{D}_{X x})$ 等)．所以，考虑$\langle 0, T\rangle$ 的分割 $0 = s_0 < s_2 < \cdots < s_{l-1} < s_{l+1} = T$,并应用上段所述,即看出当 $T_0 = \mathrm{Max}\{T_1, 8\xi_{T_1}/\eta_1\}$ 时,断语成立.

取定T_0如上．我们说：只要 $X \in \mathscr{U}_1 \cap \mathscr{U}_0$，$P$是$X$的一个周期为 $T \geqslant T_0$ 的周期轨道，$x \in P$，且对一整数 $m \geqslant 1$，$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_l = mT$ 是 $\langle 0, mT\rangle$ 的一分割满足

$$t_k - t_{k-1} \geqslant T_1, k = 1, 2, \cdots, l,$$

则 (4.6) 于其中 $\bar{\eta}$ 换作$-\eta_1/2$时成立．事实上，对每一 $\tau = 0, 1, \cdots, m-1$，所有属于 $\langle \tau T, (\tau+1)T\rangle$ 中的诸 t_k 以及 τT 与 $(\tau+1)T$ 可以构成 $\langle \tau T, (\tau+1)T\rangle$ 的一适当分割使得上段结论得以应用到目前这情况,由是这里断语成立.

现在,据[14,命题 4.4]我们可取 S 在 $\mathscr{X}^*$ 中的一邻域 $\mathscr{U}_2 \subset \mathscr{U}_0$，并可取数 $\eta_2 > 0$ 及 $d_0 > 0$ 使得：只要 $X \in \mathscr{U}_2$，P 是 X 的一周期轨道具有周期 $\leqslant T_0$，且 $x \in P$，即有

$$\|\phi_{X d_0}(u)\| \leqslant \|u\| \exp(-\eta_2 d_0) \text{ 对 } u \in D_-(X, x),$$

这以及(4.8)对于 $d = d_0$ 给出一数 $T_2 > 0$ 使得

$$\eta_-(X, D_-(X, x); t) \leqslant -t\eta_2/2 \text{ 对 } t \geqslant T_2.$$

所以,取 S 在 $\mathscr{X}^*$ 中的邻域 $\mathscr{U}_3 = \mathscr{U}_1 \cap \mathscr{U}_2, \eta_3 = \frac{1}{2}\mathrm{Min}\{\eta_1, \eta_2\}$ 及 $T_3 = \mathrm{Max}\{T_1, T_2\}$ 即看出，对于 $X \in \mathscr{U}_3$，命题 4.5 的叙述于其中把 $\bar{\eta}$ 及 T_* 换作 η_3 及 T_3 时,涉及的结论(i)及(ii)-(4.6)成立。类似可证,S 在 $\mathscr{X}^*$ 中有一邻域 $\mathscr{U}_3'$ 且有数 $\eta_3' > 0$ 及 $T_3' > 1$ 使得对于 $X \in \mathscr{U}_3'$，命题 4.5 的叙述于其中把 $\bar{\eta}$ 及 T_* 换作 η_3 及 T_3' 时,涉及的结论(ii)-(4.7)成立．于是取 $\tilde{\mathscr{U}} = \mathscr{U}_3 \cap$

$\mathscr{U}'_3, \tilde{\eta} = \mathrm{Min}\{\eta_3, \eta'_3\}$ 及 $T_* = \mathrm{Max}\{T'_3, T_3\}$，即完成命题 4.5 的证明。

本章下面将对于 $S \in \mathscr{X}^*$ 普遍取定 $\tilde{\mathscr{U}}$，$\tilde{\eta}$ 及 T_* 满足上述命题中要求，并取定一数

$$\tilde{T} > T_*.$$

定义 4.2 对于 $S \in \mathscr{X}^*$，我们将简称一序列 $\{X_i, P_i\}$ 为(S 的)一基本 p-序列，其中 $X_i \in \tilde{\mathscr{U}}$，$P_i$ 是 X_i 的一周期轨道，p 是一整数 $(0 \leqslant p \leqslant n-1)$，如果

$$\lim_{i\to\infty} \|X_i - S\|_1 = 0 \text{ 且 } \mathrm{Ind}_{X_i} P_i = p,\ i = 1, 2, 3, \cdots$$

(见 §1).

记 Ω 为 S 的非游荡集。

命题 4.6 设 $S \in \mathscr{X}^*$，则

(i) 对任一整数 $p \in \langle 0, n-1\rangle$，$S$ 所有满足下述性质的非游荡常点 a 作成 $\Omega \cap M$ 中一个在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变的闭子集

$$\Omega^p \subset M(\tilde{\eta}, \tilde{T}; p),$$

这性质是存在一基本 p-序列 $\{X_i, P_i\}$ 及 P_i 上的点 x_i 使

$$\lim_{i\to\infty} x_i = a.$$

(ii) 若 $\mathscr{D}_x = \Delta^p_-(x) \oplus \Delta^q_+(x)$ 是 S 在 $x \in \Omega^p$ 处的 $(\tilde{\eta}, \tilde{T}; p)$-半双曲分解，则 $\mathscr{D}_{\phi_t}(x) = \phi_t(\Delta^p_-(x)) \oplus \phi_t(\Delta^q_+(x))$ 是 S 在 $\phi_t(x)$ 处的 $(\tilde{\eta}, \tilde{T}; p)$-半双曲分解对所有 $t \in (-\infty, \infty)$，由是 Ω^p 上的 $(\tilde{\eta}, \tilde{T}; p)$-半双曲分解在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变。

(iii) $\Omega \cap M = \bigcup_{p=0,1,\cdots,n-1} \Omega^p$.

证 任给 $a \in \Omega \cap M$。据封闭引理(见[5,16])，对每一正整数 i，可取一 $X_i \in \mathscr{U}$ 使得 $\|X_i - S\|_1 < \frac{1}{i}$ 且 X_i 有周期轨道 P_i 经过 a。如必须，可取子序列，我们不妨设 $\mathrm{Ind}_{X_i} P_i =$ 一常值 $p(i = 1, 2, 3, \cdots)$。换言之，即 $a \in \Omega^p$。于是，据命题 4.5-(i) 易看出，

(4.4)是 X_i 在每一点 $x\in P_i$ 处的 $(\bar{\eta},\widetilde{T};p)$ -半双曲分解，由是 x (特别是 a)$\in M_{X_i}(\bar{\eta},\ \widetilde{T};p)$. 故据命题 4.4,$a\in M(\bar{\eta},\widetilde{T};p)$，进一步用引理 4.3 又可给出 $\lim\limits_{i\to\infty}\phi_{X_i t}(a)=\phi_t(a)$ 对每一 $t\in(-\infty,\infty)$，因而再据命题 4.4,$\phi_t(a)$也 $\in M(\bar{\eta},\widetilde{T};\ p)$. 这证明 Ω^p 在 ϕ_t $(-\infty<t<\infty)$ 下不变；结合命题 4.1 就给出 (ii). 又从这里 (i) 中所述性质，易直接看出 Ω^p 在 $\Omega\cap M$ 中闭. 这里的论证显然也已给出了 (iii). 证完.

定义 4.3 任给数 $\zeta\in(0,\bar{\eta})$ 及一整数 $p\in\langle 0,n-1\rangle$. 对于 $S\in\mathscr{X}^*$，一点 $a\in M^n$ 将称为 S 的右 $(\zeta,\ p)$ -扭拆点，如果有一基本 p-序列 $\{X_i,P_i\}$ 及 P_i 上的点 x_i 满足下面(4.9)—(4.11):

$$\lim_{i\to\infty}x_i=a,\tag{4.9}$$

$$\frac{1}{k\widetilde{T}}\sum_{j=0,1,\cdots,k-1}\eta_-(X_i,D_-(X_i,\phi_{X_i(j\widetilde{T})}(x_i));\widetilde{T})\geqslant-\zeta\tag{4.10}$$

且

$$\frac{1}{k\widetilde{T}}\sum_{j=-k,-k+1,\cdots,-1}\eta_-(X_i,D_-(X_i,\phi_{X_i(j\widetilde{T})}(x_i));\widetilde{T})$$

$$\leqslant-\zeta\ \text{对}\ k=1,2,\cdots,q_i;\ i=1,2,3,\cdots.$$

$$\lim_{i\to\infty}q_i=\infty.\tag{4.11}$$

记 $R(\zeta,p)$ 为 S 所有右 $(\zeta,\ p)$-扭拆点作成的集合. 一点 $a\in M^n$ 将称为 $S\in\mathscr{X}^*$ 的左 (ζ,p)-扭拆点，如果 a 是$-S$ 的右 $(\zeta,n-1-p)$-扭拆点 (显然，$S\in\mathscr{X}^*$ 蕴涵$-S$ 也 $\in\mathscr{X}^*$). 记 $L(\zeta,p)$ 为所有左 $(\zeta,\ p)$-扭拆点作成的集合.

从 (4.5) 可看出 (4.10) 中前一不等式对 $p=0$ 恒不成立，故 $R(\zeta,0)=0$. 同样，我们也有 $L(\zeta,n-1)=0$.

命题 4.7 设 $S\in\mathscr{X}^*$. 则对任给的 $\zeta\in(0,\bar{\eta})$及整数 $p\in\langle 0,n-1\rangle$，我们有:

(i) $R(\zeta,p)$ 是 M^n 中一闭子集；

(ii) S 在它的每一常点 $a\in R(\zeta,p)$ 处有 $(\bar{\eta},\ \widetilde{T};\ p)$ -半双曲分解

$$\mathscr{D}_a = \Delta^p_-(a) \oplus \Delta^p_+(a)$$

满足

$$\frac{1}{k\tilde{T}} \sum_{j=0,1,\cdots,k-1} \eta_-(\phi_{j\tilde{T}}(\Delta^p_-(a)), \tilde{T}) \geqslant -\zeta \tag{4.12}$$

及

$$\frac{1}{k\tilde{T}} \sum_{j=-k,-k+1,\cdots,-1} \eta_-(\phi_{j\tilde{T}}(\Delta^p_-(a)), \tilde{T}) \leqslant -\zeta \tag{4.13}$$

对 $k = 1,2,3,\cdots$.

证 (i) 易从扭拆点的定义推出.据命题 4.6-(i), 命题 4.4 以及扭拆点的定义易看出 (ii) 成立.

命题 4.8 设 $S \in \mathscr{X}^*$, Λ 是 M^n 中一闭子集在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变,又设对某给定的 $\zeta \in (0, \tilde{\eta})$ 及整数 $p \in \langle 0, n-1 \rangle$ 有 $\Lambda \cap R(\zeta, p) = 0$. 则 S 在 $\mathscr{X}^*$ 中有一邻域 $\mathscr{W} \subset \tilde{\mathscr{U}}$, Λ 在 M^n 中有一邻域 V, 且存在一整数 $q \geqslant 1$ 使得: 只要 $X \in \mathscr{W}$, P 是 X 的一周期轨道 $\subset V$ 具有 $\mathrm{Ind}_X P = p$, 且 $x \in P$, 即有

$$\frac{1}{q\tilde{T}} \eta_-(X, D_-(X, x); q\tilde{T})$$

$$\leqslant \frac{1}{q\tilde{T}} \sum_{j=0}^{q-1} \eta_-(X, D_-(X, \phi_{X(j\tilde{T})}(x)); \tilde{T}) < -\zeta/2.$$

证 这里的前一不等式易从 (4.5) 直接看出. 今证余下部分. 设相反地,对每一整数 $q \geqslant 1$ 都有一 $X_q \in \tilde{\mathscr{U}}$ 及 X_q 的一个具有 $\mathrm{Ind}_{X_q} P_q = p$ 的周期轨道 P_q 上的一点 x_q 满足

$$\|X_q - S\|_1 < \frac{1}{q}, \; P_q \subset \bigcup\left(\Lambda, \frac{1}{q}\right)$$

及

$$\frac{1}{q\tilde{T}} \sum_{j=0}^{q-1} \eta_-(X_q, D_-(X_q, \phi_{X_q(j\tilde{T})}(x_q); \tilde{T}))$$

$$\geqslant -\frac{\zeta}{2} > -\zeta. \tag{4.14}$$

由于对于 $p=0$，这不等式左端$=-\infty$，只需考虑 $p>0$ 这情况．命 P_q 的周期为 T_q，我们可取整数 $l_q\geqslant q$ 及 $m_q\geqslant 1$ 使得

$$\widetilde{T}\leqslant m_qT_q-l_q\widetilde{T}<2\widetilde{T}, \tag{4.15}$$

因而据命题 4.5-(ii) 有

$$\sum_{j=0}^{l_q-1}\eta_-(X_q,D_-(X_q,\phi_{X_q(j\widetilde{T})}(\overline{x}_q));\widetilde{T})\leqslant \xi_{2\widetilde{T}}-m_qT_q\bar{\eta}$$

对于充分大的 q，其中 $x_q=\phi_{X_q(l_q\widetilde{T})}(\overline{x}_q)$，$\xi_{2\widetilde{T}}$ 同(4.8)中。取定一 $\xi\in(\zeta,\bar{\eta})$。于是对于充分大的 q，有

$$\frac{1}{m_qT_q}\sum_{j=0}^{l_q-1}\eta_-(X_q,D_-(X_q,\phi_{X_q(j\widetilde{T})}(\overline{x}_q);\widetilde{T}))<-\xi<-\zeta, \tag{4.16}$$

由于(4.14)及(4.16)我们可取一点 $\bar{x}_q=\phi_{X_q(k_q\widetilde{T})}(x_q)$ 对于一整数 $k_q,-l_q<k_q<q$，使得

$$\frac{1}{k\widetilde{T}}\sum_{j=0,1,\cdots,k-1}\eta_-(X_q,D_-(X_q,\phi_{X_q(j\widetilde{T})}(\bar{x}_q));\widetilde{T})\geqslant-\zeta$$

$$\text{对 } k=1,2,\cdots,q-k_q, \tag{4.17}$$

$$\frac{1}{k\widetilde{T}}\sum_{j=-k,-k+1,\cdots,-1}\eta_-(X_q,D_-(X_q,\phi_{X_q(j\widetilde{T})}(\bar{x}_q));\widetilde{T})\leqslant-\zeta$$

$$\text{对 } k=1,2,\cdots,l_q+k_q. \tag{4.18}$$

我们说，极限式

$$\lim_{q\to\infty}(l_q+k_q)=\infty \tag{4.19}$$

成立。事实上，若 $k_q\geqslant 0$，则 $l_q+k_q\geqslant q$。设 $k_q<0$。简记(4.16)的左端为 ρ_q 以及(4.18)当 $k=l_q+k_q$ 时的左端为 λ_q。于是

$$m_qT_q\rho_q=(l_qk_q)\widetilde{T}\lambda_q+\sum_{j=0,1,\cdots,-k_q-1}\eta_-(X_q,$$
$$D_-(X_q,\phi_{X_q(j\widetilde{T})}(\bar{x}_q));\widetilde{T}),$$

从而据(4.15)—(4.17)有

$-(l_q+1)\tilde{T}\tilde{\zeta} \geqslant -m_q T_q \tilde{\zeta} \geqslant (l_q+k_q)\tilde{T}\lambda_q + k_q\tilde{T}\zeta$，或 $(l_q+k_q)\tilde{T}(-\lambda_q) \geqslant l_q\tilde{T}(\tilde{\zeta}-\zeta)+\tilde{T}\tilde{\zeta}+(l_q+k_q)\tilde{T}\zeta$。但 $\tilde{\zeta}>\zeta>0$，$l_q+k_q>0$，$\lim\limits_{q\to\infty} l_q=\infty$。又 $-\lambda_q \leqslant \xi_{\tilde{T}}/\tilde{T}$ 对于充分大的 q，其中 $\xi_{\tilde{T}}$ 见(4.8)中。结合这些就得出(4.19)。类似可证 $\lim\limits_{q\to\infty}(q-k_q)=\infty$。

于是从(4.14)，(4.17)，(4.18)并用取紧致 M^n 中序列的收敛子序列的法子，易看出 Λ 含有 S 的右 (ζ,p) 一扭拆点。但这与命题假设 $\Lambda\cap R(\zeta,p)=0$ 相矛盾。这证明命题 4.8。

命题 4.9 设 $S\in\mathscr{R}^*$，Λ 是 M^n 中一闭子集，在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变且 $\subset M$。又设 $\{X_q, P_q\}$ 是一基本 p-序列使得周期轨道序列 $\{P_q\}$ 收敛到 Λ。[1] 任给 ζ 及 $\zeta'\in(0,\tilde{\eta})$，$\zeta'<\zeta$。则 $\Lambda\cap R(\zeta,p)=0$ 蕴涵 $\Lambda\cap R(\zeta',p)=0$。

证 设存在 $a\in\Lambda\cap R(\zeta',p)$。则据命题 4.7，$S$ 在 a 处有 $(\tilde{\eta},\tilde{T};p)$ 一半双曲分解 $\mathscr{D}_x=\Delta_-^p(a)\oplus\Delta_+^p(a)$ 满足(4.12)，于其中把 ζ 换作 ζ'。取一 $\zeta_0\in(\zeta',\zeta)$。因 $\{P_q\}$ 收敛到 Λ，P_q 上有点 x_q 使得 $\{x_q\}$ 收敛到 a。据命题 4.1，引理 4.3 及命题 4.4，并适当取 $\{X_q,P_q\}$ 的子序列，我们不妨设 X_q 在 $x_q\in P_q$ 处的 $(\tilde{\eta},\tilde{T};p)$ 一半双曲分解(4.4)满足

$$\frac{1}{k\tilde{T}}\sum_{j=0,1,\cdots,k-1}\eta_-(X_q,D_-(X_q,\phi_{X_q(j\tilde{T})}(x_q));\tilde{T})$$
$$\geqslant -\zeta_0 > -\zeta \quad 对 1\leqslant k\leqslant q.$$

于是用与上一命题证明中同样的办法，也可取点 $\bar{x}_q=\phi_{X_q(k_q\tilde{T})}(x_q)$ 对于整数 $k_q\leqslant 0$ 使仍有(4.17)及(4.18)式对充分大的 q，从而有 $\Lambda\cap R(\zeta,p)\neq 0$。这给出命题 4.9。

设 $S\in\mathscr{R}^*$。对每一整数 $p\in\langle 0,n-1\rangle$，记 Ω_*^p 为 S 的所有满足下述性质的常点 x 作成的集合，即存在一基本 p-序列 $\{X_i,$

1) 这是 Hausdorff[1,§28] 意义下所指的收敛性。因之 $\{P_i\}$ 收敛到 Λ 意即：对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $i_\varepsilon>0$ 使得当 $i>i_\varepsilon$ 时，ε-邻域 $U(\Lambda,\varepsilon)\supset P_i$ 且 $U(P_i,\varepsilon)\supset\Lambda$。

$P_i\}$ 及 P_i 上的点 x_i 使 $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x$。与命题 4.6 的证明相类似，我们也易看出：$\Omega_*^p$ 是 M 中一闭子集，在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变，且

$$\Omega^p \subset \Omega_*^p \subset M(\tilde{\eta}, \tilde{T}; p). \tag{4.20}$$

作为本节的结束，我们证明

定理 4.10 设 $S \in \mathscr{X}^*$。任给 $\zeta \in (0, \tilde{\eta})$。设

$$\bigcup_{p=0,1,\cdots,n-1} (R(\zeta, p) \cup L(\zeta, p)) = 0.$$

则 S 满足公理 A 且具有无环性，由是 S 是 Ω-稳定的。

证 在证明了 S 满足公理 A 并具有无环性后，根据 Pugh-Shub [6] 即得出 S 是 Ω-稳定的。下面我们来证明 S 具有所述前面两个性质。记 M_0 为 S 所有奇点作成的集合。显然 $M_0 \cup \Omega_*^p$ 是 M^* 中一闭子集，在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变。

考虑 S 在每一 $x \in \Omega_*^p$ 处的 $(\tilde{\eta}, \tilde{T}; p)$ -半双曲分解

$$\mathscr{D}_x = \Delta_-^p(x) \oplus \Delta_+^p(x).$$

据定理假设 $R(\zeta, p) = 0$，并应用命题 4.1 及 4.4 以及命题 4.8 到 $\Lambda = M^*$，我们可看出，存在一整数 $q \geqslant 1$ 使

$$\frac{1}{q\tilde{T}} \eta_-(\Delta_-^p(x), q\tilde{T}) \leqslant -\frac{\zeta}{2}$$

对每一 $x \in \Omega_*^p (p = 0, 1, \cdots, n-1)$。应用这已有结论到 $-S$，并据 $L(\zeta, p)$ 的定义(看前面)及定理假设，我们于是也可取一整数 $q' \geqslant 1$ 使得

$$\frac{1}{q'\tilde{T}} \eta_+(\Delta_+^p(x), q'\tilde{T}) \geqslant -\frac{\zeta}{2}$$

对每一 $x \in \Omega_*^p$（见 (4.5)）。但

$$\sup_{|t| \leqslant T, x \in D, \|u\|=1} \{\|\phi_t(u)\|\} < \infty$$

(见(4.8))。从这些，我们可取一数 T_p 使得

$$\|\phi_t(u)\| \leqslant \|u\| \exp(-\zeta t/3) \quad 对\ u \in \Delta_-^p(x), x \in \Omega_*^p 及\ t \geqslant T_p,$$
$$\|\phi_{-t}(u)\| \leqslant \|u\| \exp(-\zeta t/3) \quad 对\ u \in \Delta_+^p(x), x \in \Omega_*^p 及\ t \geqslant T_p \tag{4.21}$$

(因而 $\Delta^p_-(x)$, $\Delta^p_+(x)$ 分别即为 (2.3) 中的 $D_-(x)$, $D_+(x)$)。又 $S\in\mathscr{H}^*$ 蕴涵它的奇点都是双曲的. 于是据[13, 系 4.13], $M_0\cup\Omega^p_*$ 正是[13]中所指的正常集. 故据[13, 系5.3], M_0 中不能含有同一个点, 它既是 S 在 Ω^p_* 中一轨线的 ω-极限点, 又是 Ω^p_* 中一轨线的 α-极限点。

我们说, Ω^p_* 在 M^n 中闭. 事实上, 设不然, 则 S 至少有一奇点 a 是 Ω^p_* 的闭包点. 易看出存在一基本 p-序列 $\{X_i, P_i\}$ 及 P_i 上的点 x_i 满足

$$\lim_{i\to\infty}\|X_i - S\|_1 = 0,\ \lim_{i\to\infty} x_i = a.$$

但 S 的奇点是双曲的。 于是应用 Hartman-Grobman (关于绕双曲奇点的局部结构稳定)定理可导出结论: Ω^p_* 与 a (对于 S 来说) 的稳定流形与非稳定流形的交集都非空. 换言之, Ω^p_* 既含有 S 的轨线以 a 为 ω- 极限点, 又含有轨线以 a 为 α-极限点。 但这与上段末所述结论矛盾. 这证明断语。

又从 (4.21) 易看出, Ω^p_* 与 $\Omega^{p'}_*$ 不相交对于 $p\neq p'$。综上所述, 我们已经证明了:

$$M_0, \Omega^0_*, \Omega^1_*, \cdots, \Omega^{n-1}_*$$

都是 M^n 中的闭子集, 在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变, 彼此互不相交, 且 S 在它们上都有双曲构造(见[13, 系 5.10]). 从 (4.20)及命题 4.6, S 在 Ω 上也就有双曲构造。

我们将证明 S 满足公理 A。要证此, 现在只余证明, S 的周期轨道的并集 L 在 $\Omega\cap M$ 中稠密. 为此, 可考虑 $L^p = L\cap\Omega^p_*$ 在 Ω^p_* 中的闭包 F^p. 据(4.20)及命题 4.6, 我们只余对每一给定的 p, 证明

$$F^p = \Omega^p_*. \tag{4.22}$$

若 $\Omega^p_* = 0$, 这是显然的. 下面设 $\Omega^p_*\neq 0$. 取 Ω^p_* 在 M^n 中的一邻域 U_p 使

$$M_0\cup\left(\bigcup_{j\neq p}\Omega^j_*\right)\subset M^n - U_p \tag{4.23}$$

我们说 $F^p \neq 0$. 事实上，考虑 Ω_*^p 中任一轨线 $R_b = \{\phi_t(b) | t \in (-\infty, \infty)\}$ 的一 ω-极限点 b_*(由于 Ω_*^p 紧致，这样的点存在)。我们将证

$$b_* \in F_p. \tag{4.24}$$

为此，任取 b_* 的一邻域 U。从 Ω_*^p 的双曲性 (4.21)，R_b 中有一闭子弧 $Q = \{\phi_t(b) | t \in \langle T, T' \rangle\}$ 对于充分大的 $T' - T$，它是[15，第1—2页]中所指的$(\zeta/3, 2T_p; p)$准双曲轨弧且使得 $\phi_T(b)$及$\phi_{T'}(b)$都充分靠近 b_*，从而我们可应用[15，定理 1][1]得出 S 的一周期轨道 $P \subset U_p \cap \Omega$ 使 $P \cap U \neq 0$. 据(4.20)，(4.23)及命题 4.6 即得 $P \subset L^p$. 但 b_* 的邻域 U 可以任意地取. 故 $b_* \in F^p$，即 $F^p \neq 0$. 在这里，我们还可看出：当 $p = 0$ 时. b 及 $b_* \in L^0$，因为每一包含在 L^0 内的周期轨道是负向收缩的，且这些收缩的轨道的个数有限[17，§3]，这给出 $\Omega_*^0 = L^0 = F^0$. 类似地，考虑轨线的 α-极限点，我们可看出 $\Omega_*^{n-1} = L^{n-1} = F^{n-1}$. 因此，下面假定 $0 < p < n - 1$.

我们将考虑 F^p 的连通分支. 每个这样的分支都是 Ω_*^p 中一闭子集，在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变. 据关于双曲集的稳定流形与非稳定流形的周知性质，我们可取一数 $\varepsilon_p > 0$ 使得若 P 及 P' 都是 S 的周期轨道 $\subset F^p$ 且 P 及 P' 上分别有点 x 及 x' 相距 $< \varepsilon_p$，则对任给的 $\varepsilon > 0, U_p$ 含有 S 的一周期轨道，其 ε-邻域包含 x 及 x'(见[6]). 由是 P 及 P' 包含在 F^p 中的同一连通子集内. 从这些易看出 F^p 仅由有限个数的连通分支

$$F_1^p, F_2^p, \cdots, F_{l_p}^p$$

组成. 仍据一些同样的理由，我们还可看出：对任给的 $\varepsilon > 0$，每一 F_k^p 都含有 S 的一周期轨道，其 ε-邻域又包含 F_k^p；由是如果 $F_{i_1}^p, F_{i_2}^p, \cdots, F_{i_{m+1}}^p = F_{i_1}^p$ $(m \geqslant 1)$ 是一个连通分支环满足

(I) 诸 i_j 彼此不相同对 $1 \leqslant j \leqslant m$,

---

1) 当 $p > 0$ 时，直接应用这定理. 当 $p = 0$ 时，可应用这定理到 $-S$. 易看出，当 $\phi_T(b)$ 及 $\phi_{T'}(b)$ 都充分靠近 b^* 时，$\Delta_-^p(\phi_T(b))$ 及 $\Delta_-^p(\phi_{T'}(b))$ 就(3.8)所指意义下也将充分靠近.

(2) 存在点 $x_k \in \Omega_*^\varrho - \bigcup_{j=1}^{m} F_{i_j}^\varrho$, $1 \leqslant k \leqslant m$, 使得轨线 $Q_k = \{\phi_t(x_k) | t \in (-\infty, \infty)\}$ 的 ω-极限集合及 α-极限集合分别包含在 $F_{i_{k+1}}^\varrho$ 及 $F_{i_k}^\varrho$ 内,

则对任给的 $\epsilon > 0$, Ω_*^ϱ 含有 S 的一周期轨道,它的 ϵ-邻域包含

$$\left(\bigcup_{j=1}^{m} F_{i_j}^\varrho\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} Q_j\right).$$

(我们指出,这里的讨论与关于公理A系统的谱分解定理的常用证明法类似,例如见[6,§4].)于是,取充分小的 ϵ,即看出这样环的存在将导至一结论与这些 $F_{i_j}^\varrho$ 是 F^ϱ 的连通分支这事实相矛盾. 这就是说,不能存在如上所述的连通分支环.

现在,为完成 S 满足公理A的证明,设相反地,(4.22)不成立. 则可取 Ω_*^ϱ 中一轨线 $R_b = \{\phi_t(b) | t \in (-\infty, \infty)\}$ 使 $b \in \Omega_*^\varrho - F^\varrho$. 由于 Ω_*^ϱ 紧致, R_b 的 ω-极限集合 Γ_b 及 α-极限集合 Γ_b' 都非空且都是连通的. 从(4.24)可看出 Γ_b 必包含在某一 $F_{i_b}^\varrho$ 内. 类似地可看出 Γ_b' 也必包含在某一 $F_{i'_b}^\varrho$ 内. 我们还不妨如是地取 b 使得 $F_{i_b}^\varrho$ 不再包含 S 的经过任一点 $\in \Omega_*^\varrho - F^\varrho$ 的轨线的 α-极限集合,这是因为不存在如上段所述的连通分支环. 为方便,还不妨设 $F_{i_b}^\varrho$ 即为 F_2^ϱ, $F_{i'_b}^\varrho$ 即为 F_1^ϱ, 我们于是取 F_2^ϱ 在 M^n 中的一邻域 W 使

$$M^n - W \text{ 的内集} \supset M_0 \cup \left(\bigcup_{j \neq 2} F_j^\varrho\right). \tag{4.25}$$

记 B 为 W 的边缘集. 因 $\Gamma_b \subset F_2^\varrho$, $\Gamma_b' \subset F_1^\varrho$ 且 R_b 是连通的, R_b 必与 B 相交. 为方便,不妨设 $b \in B \cap \Omega_*^\varrho$. 据 Ω_*^ϱ 的定义,可取一基本 p-序列 $\{X_i, P_i\}$ 及 P_i 上的点 b_i 满足 $\lim_{i\to\infty} \|X_i - S\|_1 = 0$, $\lim_{i\to\infty} b_i = b$. 若 $w_i \in P_i$, $s_i \in (-\infty, \infty)$ 满足 $\lim_{i\to\infty} w_i = w \in \Omega_*^\varrho$, $\lim_{i\to\infty} s_i = s \in (-\infty, \infty)$, 则

$$\lim_{i\to\infty} \phi_{X_i; s_i}(w_i) = \phi_s(w) \tag{4.26}$$

(见引理 4.3 或[10, 第 14 页]).

设 X_i 的周期轨道 P_i 以 T_i 为周期.于是仍因 $\Gamma_b \subset F_1^\rho$ 及 $\Gamma'_b \subset F_1^\rho$，借助取子序列的法子就不妨设 P_i 上存在点

$$c_i, d_i = \phi_{X_i, \tau_i}(c_i) \text{ 及 } e_i = \phi_{X_i \bar{\tau}_i}(c_i), 0 < \bar{\tau}_i < \tau_i < T_i,$$

使得 $\lim\limits_{i\to\infty} c_i = c \in F_2^\rho$，$\lim\limits_{i\to\infty} d_i = d \in F_1^\rho$，$\lim\limits_{i\to\infty} e_i = e \in B$ 以及

$$\{\phi_{X_i t}(c_i) \mid t \in \langle 0, \bar{\tau}_i \rangle\} \subset W. \tag{4.27}$$

我们有

$$\lim_{i\to\infty} \bar{\tau}_i = \infty, \tag{4.28}$$

因为否则 $\{\bar{\tau}_i\}$ 将有子序列收敛到一 $\bar{\tau} \in (-\infty, \infty)$，从而据(4.26)有 $\phi_{\bar{\tau}}(c) = e$. 但 F_2^ρ 在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变，且 $c \in F_2^\rho$. 这将引出结论与 $e \in B$ 矛盾. 于是从(4.27),(4.28)并借助(4.26)可看出,半轨线 $\{\phi_t(e) \mid t \in (-\infty, 0\rangle\}$ 包含在W 的闭包内. 仍如前，S 过 e 的轨线的 α-极限集合必包含在某一 F_j^ρ 内. 但这 F_j^ρ 必是 F_2^ρ 据 (4.25),但这又与 F_2^ρ 的定义矛盾. 这完成 S 满足公理 A 的证明.

比较容易地可进一步看出，S 具有无环性. 事实上，设相反地,存在一由 S 的基本集 H_i 组成的环

$$H_0, H_1, \cdots, H_l, H_{l+1} = H_0, l \geqslant 1,$$

其中 $H_i \neq H_j$ 对 $0 \leqslant i < j \leqslant l$,且对每一 $0 \leqslant i \leqslant l$ 有一点 $b_i \in M^* - \Omega$ 使得 S 过 b_i 的轨线的 α-极限集合 $\subset H_i$，但它的 ω-极限集合 $\subset H_{i+1}$. 写 $b_{l+1} = b_0$，并记

$$E_i = \{\phi_t(b_i) \mid t \in \langle 0, \infty)\} \cup H_{i+1} \cup \{\phi_t(b_{i+1}) \mid t \in (-\infty, 0\rangle\},$$
$$0 \leqslant i \leqslant m.$$

于是从基本集的双曲线及拓扑可通性，并用关于稳定流形与非稳定流形的通常性质,对任给的 $\varepsilon > 0$ 及每一 $i(0 \leqslant i \leqslant m)$我们都可取 S 的一轨弧包含在 E_i 的 ε-邻域内，且这轨弧的两端点又分别包含在 b_i 及 b_{i+1} 的 ε 一邻域内. 所以，对每一整数 $k > 0$ 都可对 S 取 C^1 扰动以得出一常微系统 $Y_k \in \mathscr{X}^*$ 使 $\|Y_k - S\|_1 < \frac{1}{k}$，且 Y_k 有周期轨道与 b_0 的 $\frac{1}{k}$-邻域相交.于是,如必须,可适当

取 $\{Y_k\}$的子序列，就可看出 $b_0 \in \Omega^{p_0}_*$ 对某一 p_0。故据(4.22)，$b_0 \in F^p$。但这将引出结论与 $b_0 \in M^* - \Omega$ 矛盾。这证明 S 具有无环性。现在，定理 4.10 证完。

§5. $S \in \mathscr{R}^*$ 的非简单极小歧变集与定理 1.1 及 1.2 的证明

定理 5.1 设 $S \in \mathscr{R}^*$，Λ 是 S 的一歧变集。则 Λ 恒包含一非空且在 $\Phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变的真闭子集，S 在其上有双曲构造。

这里，S 在 Λ 自身上不具有双曲构造这事实是显然的，因为 $\Lambda \cap Ob(S) \neq 0$ 直接表明 S 在 Λ 上不满足 [12]及[13] 中所指的"线性式的"强匀断条件(见[13,系 4.13 及系 5.10])。当 Λ 含有 S 的奇点时，这定理也显然，因为 $S \in \mathscr{R}^*$ 的每一奇点都是双曲的。下面将考虑 Λ 不含有 S 的奇点这情况。又由于已有命题 2.1 及定理 3.6，我们还不妨设 Λ 是 S 的极小歧变集但又不是简单的（简称为 S 的非简单极小歧变集）。在这情况下，比定理 5.1 要细致些的描述见后面定理 5.7。有了这定理后，本文的主要结果，定理 1.1 及 1.2 (看 §1)，易得到证明。为证定理 5.7，我们先建立了几个引理。

引理 5.2 设 $S \in \mathscr{R}^*$、又设 Λ 是 S 的一非简单极小歧变集，不含有 S 的奇点。则

(i) 对某一整数 $p \in \langle 0, n-1 \rangle$，存在一基本 p-序列 $\{X_k, P_k\}$ 使得周期轨道序列 $\{P_k\}$ 收敛到Λ，由是 $\Lambda \subset \Omega^p$；

(ii) 只要 p 是一整数 $\in \langle 0, n-1 \rangle$ 使得有如 (i) 中所指的基本 p—序列，我们就有 $\Lambda \cap (R(\zeta, p) \cup L(\zeta, p)) \neq 0$ 对每一 $\zeta \in (0, \bar{\eta})$。

证 据引理假设，我们可取一点 $a \in \Lambda \cap Ob(S)$，而轨线 $\{\Phi_t(a) | t \in (-\infty, \infty)\}$ 的 ω-极限集合或 α-极限集合必仍为 Λ，特别地，仍包含 a。于是应用[16,定理 8.1]到非游荡点 a，对每一整数 $k > 0$ 存在 $X_k \in \widetilde{\mathscr{U}}$ 及 X_k 的周期轨道 P_k 满足

$$\|X_k - S\|_1 < \frac{1}{k}, \cup\left(\Lambda, \frac{1}{k}\right) \supset P_k, \cup\left(a, \frac{1}{k}\right) \cap P_k \neq 0.$$

如必须,可取$\{X_k\}$的子序列,不妨设 $\mathrm{Ind}_{x_k}(P_k)=$ 一常值 p,由是$\{X_k, P_k\}$ 为一基本 p-序列。仍用取子序列的法子，不失一般性可设$\{P_k\}$收敛到Λ中一闭子集 Λ_0(见 [1, §28]),因而有 $\Lambda_0 \subset \Omega^p$(看命题 4.6)。于是据每一 P_k 在 $\Phi_{x_k t}(-\infty < t < \infty)$下的不变性并用引理 4.3，易看出 Λ_0 在 $\Phi_t(-\infty < t < \infty)$下不变。又由于$\cup\left(a, \frac{1}{k}\right) \cap P_k \neq 0$ 对 $k=1,2,3,\cdots$，显然 Λ_0 仍包含 a，这蕴涵 $\Lambda_0 \cap Ob(S) \neq 0$。 但 Λ 是 S 的极小歧变集。 故必有 $\Lambda_0 = \Lambda$，由是 $\Lambda \subset \Omega^p$，这证明(i)。 由是据命题 4.1 及 4.6, S 在每一 $x \in \Lambda$ 处都有唯一的 $(\eta; \tilde{T}; p)$ -半双曲分解

$$\mathscr{D}_x = \Delta_-^p(x) \oplus \Delta_+^p(x), \dim \Delta_-^p(x) = p. \qquad (5.1)$$

又据命题 4.1 及 4.5，X_k 在每一 $x \in P_k$ 处也都有唯一的$(\eta, \tilde{T}; p)$-半双曲分解

$$\mathscr{D}_{X_k x} = D_-(X_k, x) \oplus D_+(X_k, x), \dim D_-(X_k, x) = p, \quad (5.2)$$

其中右端两个直交项意义同(4.4)中。

为证明(ii),任给一基本 p-序列 $\{X_k, P_k\}$ 如同(i)中,并任给 $\zeta \in (0, \eta)$。考虑分解式(5.1)、设相反地，$\Lambda \cap (R(\zeta, p) \cup L(\zeta, p)) = 0$.则应用命题 4.4 及命题 4.8 到 S 及$-S$,可得一数 $T_0 > 0$ 使得

$$\|\phi_t(u)\| \leqslant \|u\| \exp(-\zeta t/3) \text{ 对 } u \in \Delta_-^p(x),\ x \in \Lambda \text{及 } t \geqslant T_0,$$

$$\|\phi_{-t}(u)\| \leqslant \|u\| \exp(-\zeta t/3) \text{ 对 } u \in \Delta_+^p(x),\ x \in \Lambda \text{ 及 } t \geqslant T_0$$

(办法与(4.21)的证明相同)，由是 S 在 Λ 上有双曲构造。但这与Λ为歧变集相矛盾。(看 [13, 系 5.10 及系 4.13].) 这证明(ii)。引理5.2 证完。

引理 5.3 假设 S, Λ 同引理 5.2 中,设一整数 p 满足引理 5.2 结论(i)中要求。考虑对 $x \in \Lambda$的 $(\eta, \tilde{T}; p)$-半双曲分解(5.1)，我们有：

(i) 存在一点 $\bar{a} \in \Lambda$ 使

$$\sum_{j=0}^{l-1} \eta_-(\Delta_-^\rho(\phi_{j\tilde{T}}(\bar{a})),\tilde{T}) \leqslant -l\tilde{T}\tilde{\eta}, l=1,2,3,\cdots, \quad (5.3)$$

(ii) 若 $\Lambda \cap R(\zeta, p) \neq 0$ 对每一 $\zeta \in (0, \tilde{\eta})$，则存在一点 $a_* \in \Lambda$ 使

$$\sum_{j=0}^{l-1} \eta_-(\Delta_-^\rho(\phi_{j\tilde{T}}(a_*)),\tilde{T}) \geqslant 0, l=1,2,3,\cdots. \quad (5.4)$$

证 取一基本 p-序列 $\{X_k, P_k\}$ 同引理 5.2 中，并考虑分解式 (5.2). 设 P_k 的周期为 T_k，据命题 4.5-(i) 我们可任取点 $\bar{x}_k \in P_k$，整数 $l_k \geqslant k$ 及 $m_k \geqslant 1$ 使得 $\tilde{T} \leqslant m_k T_k - l_k \tilde{T} < 2\tilde{T}$，从而有

$$\frac{1}{m_k T_k} \sum_{j=0}^{l_k-1} \eta_-(X_k, D_-(X_k, \phi_{X_k(j\tilde{T})}(\bar{x}_k); \tilde{T})) \leqslant \frac{\zeta_{2\tilde{T}}}{m_k T_k} - \tilde{\eta}$$

对于充分大的 k，其中 $\zeta_{2\tilde{T}}$ 同(4.8)中. 任给整数 $q \geqslant 1$. 则对于充分大的 k，我们又可取点 $x_{q,k} = \phi_{X_k(i_{q,k}\tilde{T})}(\bar{x}_k)$，$0 \leqslant i_{q,k} < l_k$，使得

$$\frac{1}{l\tilde{T}} \sum_{j=0}^{l-1} \eta_-(X_k, D_-(X_k, \phi_{X_k(j\tilde{T})}(x_{q,k}); \tilde{T}))$$

$$\leqslant -\tilde{\eta} + \frac{1}{q} \text{ 对 } l = 1,2,\cdots,l_k - i_{q,k},$$

但

$$\frac{1}{i_{q,k}\tilde{T}} \sum_{j=0}^{i_{q,k}-1} \eta_-(X_k, D_-(X_k, \phi_{X_k(j\tilde{T})}(x_{q,k}); \tilde{T}))$$

$$\geqslant -\tilde{\eta} + \frac{1}{q} \text{ 如果 } i_{q,k} > 0.$$

从这些及(4.8) 易看出 $\lim_{k\to\infty}(l_k - i_{q,k}) = \infty$，但 Λ 紧致且 $\{P_k\}$ 收敛到 Λ 蕴涵 $\{x_{q,k}\}$ 有子序列收敛到一点 $a_q \in \Lambda$，于是应用命题 4.4，我们有

$$\frac{1}{l\tilde{T}} \sum_{j=0}^{l-1} \eta_-(\Delta_-^\rho(\phi_{j\tilde{T}}(a_q)),\tilde{T}) \leqslant -\tilde{\eta} + \frac{1}{q}, \quad q = 1,2,3,\cdots,$$

进一步再取$\{a_q\}$的收敛子序列并应用命题4.2 即得一点 $\bar{a}$ 使(5.3)成立。若 $\Lambda\cap R(\tilde{\eta}/k, p)\neq 0$ 对 $k=2,3,4,\cdots$，则可应用命题 4.7 并仍用取收敛子敛的法子，即看出满足(5.4)的点 $a_*\in\Lambda$ 的存在。引理 5.3 证完。

在引理 5.3 同样假设下，为简便，记

$$g_p(x,t)=\eta_-(\Delta^p_t(x),t), x\in\Lambda, t\geqslant 0,$$

其中 $\Delta^p_t(x)$ 同(5.1)中。我们将称Λ 具有性质(*)，如果：

只要 $b\in\Lambda$ 满足

$$\frac{1}{k\tilde{T}}\sum_{j=0}^{k-1}g_p(\phi_{j\tilde{T}}(b),\tilde{T})\geqslant-\frac{\tilde{\eta}}{3} \text{ 对 } k=1,2,3,\cdots, \quad (5.5)$$

就有轨线 $P_b=\{\phi_t(b)|t\in(-\infty,\infty)\}$ 的 ω-极限集合 $\Gamma_b=\Lambda$。

设对某 $\zeta\in(0,\tilde{\eta})$ 有 $\Lambda\cap R(\zeta,p)\neq 0$。则据(4.5)显然有 $p\geqslant 1$，并且据命题 4.2 及变换群 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 的连续性及 Λ 的紧致性，易看出 $g_p(x,t)$ 是 $\Lambda\times\langle 0,\infty)$ 上的连续函数，且若置

$$\lambda=\sup_{x\in\Lambda, t\in\langle 0,2\tilde{T}\rangle}|g_p(x,t)|, \quad (5.6)$$

则 $\lambda<\infty$。为简便，我们将称 Λ 中一轨弧 $\{\phi_t(c)|t\in\langle 0,T\rangle\}$ 为一适配 p-轨弧具有斜度 r，如果 $\langle 0,T\rangle$ 有一分割 $0=t_0<t_1<\cdots<t_m=T$，$m\geqslant 1$，满足 $\tilde{T}\leqslant t_k-t_{k-1}\leqslant 2\tilde{T}$ 及

$$\frac{1}{t_k}\sum_{j=0}^{k-1}g_p(\phi_{t_j}(c), t_{j+1}-t_j)\leqslant-\frac{\tilde{\eta}}{4}$$

及

$$\frac{1}{t_m-t_{k-1}}\sum_{j=k-1}^{m-1}g_p(\phi_{t_j}(c), t_{j+1}-t_j)\geqslant-\frac{\tilde{\eta}}{3}$$

$$\text{对 } k=1,2,\cdots,m, \quad (5.7)$$

而 $r=\frac{1}{T}\sum_{j=0}^{m-1}g_p(\phi_{t_j}(c),t_{j+1}-t_j)$。

引理 5.4 在引理 5.3 同样假设下，进一步设 Λ 具有上述性质

(*)，且设对每一 $\zeta\in(0,\bar\eta)$ 有 $\Lambda\cap R(\zeta,p)\neq 0$。命 $a_*\in\Lambda$ 同引理 5.3-(ii) 中。则对每双正整数 (l,k)，我们可取 $l+1$ 个数

$$0<t_l(0,k)<t_l(1,k)<\cdots<t_l(l,k)$$

满足下述要求 (i)—(ii)：

(i) $t_l(i,k)-t_l(i-1,k)\geqslant k\tilde T$ 对 $i=1,2,\cdots,l$，且 $t_l(l,k)$ 是 $\tilde T$ 的整倍数；

(ii) 对 $i=1,2,\cdots,l-1$，轨弧 $Q_{(i,l,k)}=\{\phi_t(a_*)\mid t\in\langle t_l(i-1,k),t_l(i,k)\rangle\}$ 都是 Λ 中的适配 p-轨弧，而 $Q_{(l,l,k)}=\{\phi_t(a_*)\mid t\in\langle t_l(l-1,k),\ t_l(l,k)\rangle\}$则是 Λ 中一适配 p-轨弧具有斜度

$$r_{(l,k)}\leqslant\frac{1}{k}-\frac{\bar\eta}{3}. \tag{5.8}$$

证 这引理格式与[17,§5]所指的"筛滤"引理相同，证法也与彼处类似(把彼处的积分换成此处的有限和)。可是，由于这引理很重要，且有些细况与以前也有所不同，我们仍给证明如下。命 $\bar a\in\Lambda$ 同引理 5.3-(i) 中，对 l 取归纳法来证，但 $l=1$ 情况下引理的证明将留给读者(细节容易参照[17,§5]及下段中的个别论据得出)。

因此，设归纳地，对某一给定 l 及每一 k，我们已得出数 $t_l(i,k)$ 满足引理要求 (i)—(ii)。我们将特别考虑数 $t_l(l,k)$，$k=1,2,3,\cdots$。简写

$$r_k=r_{(l,k)},s_k=t_l(l,\ k)-t_l(l-1,k),$$
$$t_l(l,\ k)=\tau_k\tilde T,$$

其中 τ_k 是一整数 >0。取 $k_0>0$ 使

$$-\frac{\bar\eta}{3}<\frac{1}{k_0}-\frac{\bar\eta}{3}<\frac{-7\bar\eta}{24}<-\frac{\bar\eta}{4}.$$

于是对 $k\geqslant k_0$，取 $\tilde\tau_k$ 为最小的整数$\geqslant 1$ 满足

$$\frac{1}{s_k+\tilde\tau_k\tilde T}\left(r_ks_k+\sum_{i=0}^{\tilde\tau_k-1}g_p(\phi_{(\tau_k+i)\tilde T}(a_*),\tilde T)\right)\geqslant-\frac{7\bar\eta}{24},$$

这样 $\tilde\tau_k$ 的存在是由于 (5.4) 及 (5.8)。明显地，我们又可取整数

$\bar{\tau}_k \in \langle 0, \tilde{\tau}_k - 1\rangle$ 使

$$\frac{1}{(\tau - \bar{\tau}_k + 1)\tilde{T}} \sum_{j=\bar{\tau}_k}^{\tau} g_p(\phi_{(r_k+j)\tilde{T}}(a_*), \tilde{T}) \geqslant -\frac{\bar{\eta}}{3}$$

对 $\tau = \bar{\tau}_k, \bar{\tau}_k + 1, \cdots, \tilde{\tau}_k - 1$,

(5.9)

$$\frac{1}{(\bar{\tau}_k - \tau)\tilde{T}} \sum_{j=\tau}^{\bar{\tau}_k - 1} g_p(\phi_{(r_k+j)\tilde{T}}(a_*), \tilde{T}) \leqslant -\frac{\bar{\eta}}{3}$$

对 $\tau = 0, 1, \cdots, \bar{\tau}_k - 1$,

于是从 $\lim\limits_{k\to\infty} s_k \geqslant \lim\limits_{k\to\infty} k\tilde{T} = \infty$ 及(5.6)易看出

$$\lim_{k\to\infty}(\tilde{\tau}_k - \bar{\tau}_k) = \infty; \tag{5.10}$$

且可取 $k_1 > k_0$ 使

$$\sup_{t\in\langle 0,2\tilde{T}\rangle} \frac{1}{s_k + \tau\tilde{T} + t}\left[r_k s_k + \left(\sum_{j=0}^{\tau-1} g_p(\phi_{(r_k+j)\tilde{T}}(a_*), \tilde{T})\right)^{1)} + g_p(\phi_{(r_k+\tau)\tilde{T}}(a_*), t)\right] < \frac{-\bar{\eta}}{4}$$

对 $k \geqslant k_1$ 及 $\tau = 1, \cdots, \bar{\tau}_k$. (5.11)

在对于 $k \geqslant k_0$ 取这些数 $\bar{\tau}_k$ 后，由于 Λ 紧致，Λ 中这些点

$$b_k = \phi_{(r_k+\bar{\tau}_k)\tilde{T}}(a_*)$$

作成的序列将有一子序列收敛至一点 $b \in \Lambda$. 于是据(5.9),(5.10),命题 4.2 以及单参变换群 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 的连续性，我们可看出 b 满足 (5.5). 因而据引理叙述中所假设的性质 (*)，轨线 $P_b = \{\phi_t(b) | t \in (-\infty, \infty)\}$ 的 ω-极限集合 $\Gamma_b = \Lambda$，特别地 Γ_b 包含 $\bar{a}$ 满足(5.3). 于是从这些易导至下述结论，即：对一任给的 k，可取一充分大的 $i_k \geqslant \mathrm{Max}\{k, k_1\}$ 使得对于某 $t_k^* \in \langle\tilde{T}, (\tilde{\tau}_{i_k} - \bar{\tau}_{i_k})\tilde{T}\rangle$，点

$$a_{i_k} = \phi_{t_k^*}(b_{i_k})$$

1) 这里当 $\tau = 0$ 时，括号内表值 0.

与 $\bar{a}$ 相距充分小，且满足 $t_k^* + k\widetilde{T} \leqslant (\bar{\tau}_{i_k} - \bar{\tau}_{i_k})\widetilde{T}$ 及

$$\frac{1}{\tau\widetilde{T}}\sum_{i=0}^{\tau-1} g_p(\phi_{i\widetilde{T}}(a_{i_k}),\widetilde{T}) < -\frac{\bar{\eta}}{2} \quad 对\ \tau = 1,2,\cdots,k',$$

其中 $k' \geqslant k$ 且满足

$$k'\widetilde{T}\ \operatorname{Min}\left\{\frac{1}{k},\ \frac{\bar{\eta}}{12}\right\} \geqslant \lambda + \frac{2\widetilde{T}\bar{\eta}}{3} \quad (\lambda\ 见\ (5.6)). \tag{5.12}$$

现在，对一任给的 k，命 $\tau_{i_k}^*$ 为最大的整数使

$$t_k^* \geqslant (\tau_{i_k}^* + 1)\widetilde{T}.$$

显然 $\bar{\tau}_{i_k} - \bar{\tau}_{i_k} > \tau_{i_k}^* \geqslant 0$ 且 $t_k^* < (\tau_{i_k}^* + 2)\widetilde{T}$。又我们在数列

$$\begin{array}{ccccccccccc}
t_0 & < & t_1 & < & t_2 & < & \cdots & < & t_{m-1} & < & t_m \\
\| & & \| & & \| & & & & \| & & \| \\
0 & < & \widetilde{T} & < & 2\widetilde{T} & < & \cdots & < & (\bar{\tau}_{i_k} + \tau_{i_k}^*)\widetilde{T} & < & t_k^* + \bar{\tau}_{i_k}\widetilde{T}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
< t_{m+1} & & < \cdots < & & t_{m+k'} \\
\| & & & & \| \\
< t_k^* + (\bar{\tau}_{i_k} + 1)\widetilde{T} & & < \cdots < & & t_k^* + (\bar{\tau}_{i_k} + k')\widetilde{T}
\end{array} \tag{5.13}$$

$$(m = \bar{\tau}_{i_k} + \tau_{i_k}^* + 1)$$

中可取一数 $t_{\bar{m}}$ 使

$$\frac{1}{t_{\tau+1} - t_{\bar{m}}}\sum_{j=\bar{m}}^{\tau} g_p(\phi_{\tau_{i_k}\bar{T}+t_j}(a_*), t_{j+1} - t_j) < -\frac{\bar{\eta}}{3}$$

$$对\ \tau = \bar{m},\bar{m}+1,\cdots,m+k'-1, \tag{5.14}$$

$$\frac{1}{t_{\bar{m}} - t_\tau}\sum_{j=\tau}^{\bar{m}-1} g_p(\phi_{\tau_{i_k}\bar{T}+t_j}(a_*),\ t_{j+1} - t_j) \geqslant -\frac{\bar{\eta}}{3}$$

$$对\ \tau = 0,1,\cdots,\bar{m}-1. \tag{5.15}$$

从(5.12)及(5.15)易看出

$$\bar{m} \leqslant m, \tag{5.16}$$

由是若置 $t_{l+1}(l-1,k) = t_l(l-1,i_k)$ 及 $t_{l+1}(l,k) = \tau_{i_k}\widetilde{T} + t_{\bar{m}}$，则因 $Q_{(l,l,i_k)}$ 已是一适配 p-轨弧（据归纳假设），从(5.11)及(5.15)易看出

$$\{\phi_t(a_*) \mid t \in \langle t_{l+1}(l-1,k), t_{l+1}(l,k)\rangle\}$$

仍是一适配 p-轨弧，且 $t_{l+1}(l,k)-t_{l+1}(l-1,k)\geqslant i_k\widetilde{T}\geqslant k\widetilde{T}$.
又在数列(5.13)末，我们可添补数列

$$t_{m+k'+1}<t_{m+k'+2}<\cdots<t_{m+k''},$$

其中 $t_{m+k'+1}$ 是 $\widetilde{T}$ 的最小整倍数满足 $t_{m+k'+1}\geqslant t_{m+k'}+\widetilde{T}$, $t_{m+j+1}-t_{m+j}=\widetilde{T}$ 对 $k'+1\leqslant j\leqslant k''-1$，而 $t_{m+k''}$ 是 $\widetilde{T}$ 的最小整倍数满足 $t_{m+k''}\geqslant t_{m+k'+1}$ 及

$$\frac{1}{t_{m+k''}-t_m}\sum_{j=m}^{m+k''-1}g_p(\phi(\tau i_k\widetilde{T}+t_j((a_*),t_{j+1}-t_j)\geqslant-\frac{\bar{\eta}}{3}.$$

这样 $t_{m+k''}$ 的存在是由于(5.4)及(5.14). 所以，若置 $t_{l+1}(l+1,k)=\tau i_k\widetilde{T}+t_{m+k''}$，则从 k' 的取法(见(5.12)), (5.14)以及(5.16),可看出

$$\{\phi_t(a_*)\,|\,t\in\langle t_{l+1}(l,k),t_{l+1}(l+1,k)\rangle\}$$

是一适配p-轨弧具有斜度 $\leqslant\frac{1}{k}-\frac{\bar{\eta}}{3}$，且 $t_{l+1}(l+1,k)-t_{l+1}(l,k)\geqslant k\widetilde{T}$，我们可再置 $t_{l+1}(i,k)=t_l(i,l_k)$ 对 $0\leqslant i<l-1$.于是据归纳假设及以上论述,我们就得出了数列

$$0<t_{l+1}(0,k)<t_{l+1}(1,k)<\cdots<t_{l+1}(l+1,k)$$

满足引理 5.4 的要求对于 $l+1$ 及每一任给的 k.现在，归纳步骤完成,引理 5.4 证完.

系 5.5 在引理 5.4 同样假设下，任给数 $\varepsilon>0$ 及 $d>0$. 则存在一点 $a\in\Lambda$ 及一数 $T\geqslant d$ 使得

(i) $\operatorname{dist}(a,\phi_T(a))<\varepsilon$,

(ii) $\{\phi_t(a)\,|\,t\in\langle 0,T\rangle\}$ 是 Λ 中一适配 p-轨弧.

证 同[17,系 5.2]证法,根据上面引理 5.4 易看出,若 $\{\phi_t(c)\,|\,t\in\langle 0,T_0\rangle\}$ 及 $\{\phi_t(c)\,|\,t\in\langle T_0,T_1\rangle\}$ 都是 Λ 中的适配 p-轨弧,则 $\{\phi_t(c)\,|\,t\in\langle 0,T_1\rangle\}$ 仍是一适配 p-轨弧.

上面讨论到的所谓适配 p-轨弧也将是[15]中所指的 $(\bar{\eta}/4,2\widetilde{T};p)$ 一准双曲轨弧，因为由于 $S\in\mathscr{X}^*$ 且 $\Lambda\subset\Omega^p$，我们可应用命题 4.6;从而根据Λ 中一轨弧 $\{\phi_t(c)\,|\,t\in\langle 0,T\rangle\}$ 作为适配 p-轨弧的条件，$\langle 0,T\rangle$ 将有一分割 $0=t_0<t_1<\cdots<t_m=T$,

它对于 $k=1,2,\cdots,m$ 满足 $2\tilde{T}\geqslant t_k-t_{k-1}\geqslant\tilde{T}(>1)$ 及

$$\frac{1}{t_k}\sum_{j=0}^{k-1}\eta_-(\Delta_-^\varrho(\phi_{t_j}(c)),\ t_{j+1}-t_j)\leqslant-\frac{\eta}{4},$$

$$\eta_+(\Delta_+^\varrho(\phi_{t_k}(c)),t_t-t_{k-1})-\eta_-(\Delta_-^\varrho(\phi_{t_k}(c)),t_k-t_{k-1})\geqslant 2\bar{\eta}(t_k-t_{k-1}),$$

$$\frac{1}{t_m-t_{k-1}}\sum_{j=k-1}^{m-1}\eta_+(\Delta_+^\varrho(\phi_{t_j}(c)),t_{j+1}-t_j)\geqslant\frac{5}{3}\bar{\eta}.$$

这对于我们的目的来说将是有用的，因为若这样，则在如上所述的情况下，据[15]我们将有可能断言某种周期轨道的存在。

对 S 的任一周期轨道 P，简写 $\operatorname{Ind}P=\operatorname{Ind}_S P$(看§1)。

引理 5.6 设 $S\in\mathscr{X}^*$，任给数 $\bar{\eta}>0,\eta>0$ 及 $\bar{T}\geqslant\tilde{T}$ 以及一整数 $q\in\langle 0,n-1\rangle$。设 H 是 M^n 中一闭子集，在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变，不含有 S 的奇点，且 S 在每一点 $x\in H$ 处都有 $(\eta,\bar{T};q)$-半双曲分解

$$\mathscr{D}_x=\Delta_-^q(x)\oplus\Delta_+^q(x),\dim\Delta_-^q(x)=q. \tag{5.17}$$

则存在对应的数 $\varepsilon>0$ 及 $d>0$ 使得：只要 S 有一轨弧

$Q=\{\phi_t(a)|t\in\langle 0,T\rangle\}\subset H$，$d\leqslant T<\infty$，它对 $\mathscr{D}_*$ 的直和分解(5.17)来说是一 $(\eta,2\bar{T};q)$-准双曲轨弧且满足 $\operatorname{dist}(a,\phi_T(a))<\varepsilon$，我们就有：

(i) 若 $0=t_0<t_1<\cdots<t_m=T$ 满足 $\tilde{T}\leqslant t_{j+1}-t_j\leqslant 2\tilde{T},j=0,1,\cdots,m-1$，则

$$\frac{1}{T}\sum_{j=0}^{m-1}\eta_-(\Delta_-^q(\phi_{t_j}(a)),t_{j+1}-t_j)\leqslant-\frac{\bar{\eta}}{2};$$

(ii) 若 P 是 S 的一周期轨道过一点 $b\in M$ 且有一严格递增函数 $\theta(t)$，$\theta(0)=0$，使 $\phi_{\theta(T)}(b)=b$，$\operatorname{dist}(\phi_t(a),\phi_{\theta(t)}(b))<\epsilon$ 对所有 $t\in\langle 0,T\rangle$，则

$$\operatorname{Ind}P=q.$$

证 先考虑(i)。任给序列

$$\varepsilon_1>\varepsilon_2>\varepsilon_3>\cdots>0,\lim_{k\to\infty}\varepsilon_k=0,$$
$$\bar{T}<d_1<d_2<d_3<\cdots, \tag{5.18}$$

设相反地，对每双 (ε_k, d_k) 都有 S 的一轨弧

$Q_k = \{\phi_t(a_k) | t \in \langle 0, T_k \rangle\} \subset H$，$d_k \leqslant T_k < \infty$，它对 $\mathscr{D}_{a_k}$ 的直和分解 (5 17) 来说是一 $(\eta, 2\overline{T}; q)$-准双曲轨弧满足 $\mathrm{dist}(a_k, \phi_{T_k}(a_k)) < \varepsilon_k$，但 $\langle 0, T_k \rangle$ 有一分割

$$\begin{aligned} &0 = t_{0,k} < t_{1,k} < \cdots < t_{m_k,k} = T_k, \\ &\widetilde{T} \leqslant t_{j+1,k} - t_{j,k} \leqslant 2\widetilde{T}, j = 0, 1, \cdots, m_k - 1, \end{aligned} \tag{5.19}$$

使

$$\frac{1}{T_k} \sum_{j=0}^{m_k-1} \eta_-(\Delta_-^q(\phi_{t_{j,k}}(a_k)), t_{j+1,k} - t_{j,k}) > -\frac{\tilde{\eta}}{2}. \tag{5.20}$$

应用[15，定理 I]（直接到 S 或 $-S$）及前面命题 4.2，并据这里引理假设，我们不妨设序列 $\{\varepsilon_k\}$ 及 $\{d_k\}$ 如是给，使得 S 有周期轨道 P_k 过一点 $b_k \in M$ 及 $\langle 0, T_k \rangle$ 上一连续严格递增函数 $\theta_k(t)$，$\theta_k(0) = 0$ 满足

$$\phi_{\theta_k(T_k)}(b_k) = b_k, \mathrm{dist}(\phi_t(a_k), \phi_{\theta_k(t)}(b_k)) < \varepsilon_{k-1}, \quad k = 2, 3, 4, \cdots. \tag{5.21}$$

用取子序列的法子，不失一般性可设集合序列 $\{Q_k\}$ 收敛到 H 中一闭子集 H_0（见[1，§28]），从而 $\{P_k\}$ 也收敛到 H_0，且也不妨设

$$\mathrm{Ind}\, P_k = \text{常值 } p, k = 1, 2, 3, \cdots.$$

因据命题 4.5，S 在每一 $x \in P_k$ 处都有 $(\tilde{\eta}, \widetilde{T}; p)$-半双曲分解

$$\mathscr{D}_x = D_-(x) \oplus D_+(x), \dim D_-(x) = p, \tag{5.22}$$

故据命题 4.2，S 在每一 $x \in H_0$ 处也都有 $(\tilde{\eta}, \widetilde{T}; p)$-半双曲分解

$$\mathscr{D}_x = N_-^p(x) \oplus N_+^p(x), \dim N_-(x) = p. \tag{5.23}$$

于是，据变换群 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 的连续性及 H_0 的紧致性，应用命题 4.2 到半双曲分解(5.22)及(5.23)，我们可看出，存在 k_1 及 $\delta_1 > 0$ 使得：只要 $k \geqslant k_1, x \in P_k$ 及 $x' \in H_0$ 满足 $\mathrm{dist}(x, x') < \delta_1$，且 t 及 $t' \in \langle 0, 3\widetilde{T} \rangle$ 满足 $|t - t'| < \delta_1$，就有

$$\eta_-(N_-(x'),t')-\frac{\tilde\eta}{8}\leqslant\eta_-(D_-(x),t)\leqslant\eta_-(N_-(x',t')+\frac{\tilde\eta}{8},$$

$$\eta_+(N_+(x'),t')-\frac{\tilde\eta}{8}\leqslant\eta_+(D_+(x),t)\leqslant\eta_+(N_+(x'),t')+\frac{\tilde\eta}{8}. \tag{5.24}$$

类似地，对于半双曲分解(5 17)我们也可看出，存在 k_2 及 $\delta_2>0$ 使得只要 $k\geqslant k_2$，$x\in Q_k$ 及 $x'\in H_0$ 满足 $\mathrm{dist}(x,x')<\delta_2$，且 t 及 $t'\in\langle 0,3\tilde T\rangle$ 满足 $|t-t'|<\delta_2$，就有

$$\eta_-(\Delta^q_-(x'),t')-\frac{\tilde\eta}{8}\leqslant\eta_-(\Delta^q_-(x),t)\leqslant\eta_-(\Delta^q_-(x'),t')+\frac{\tilde\eta}{8},$$

$$\eta_+(\Delta^q_+(x'),t')-\frac{\tilde\eta}{8}\leqslant\eta_+(\Delta^q_+(x),t')\leqslant\eta_+(\Delta^q_+(x'),t')+\frac{\tilde\eta}{8}. \tag{5.25}$$

置 $\delta_0=\mathrm{Min}\{\delta_1,\delta_2\}$. 再据 $\tilde T>T_*$ (>1，看 §4)，$\theta_k(t)$ 的性质及(5.18)以及引理假设，我们可应用 [17，引理 5.3]得出一 $k_0\geqslant\mathrm{Max}\{k_1,k_2\}$ 使得：只要 $k\geqslant k_0$，且 $0\leqslant s<t\leqslant T_k$ 满足 $\tilde T\leqslant t-s\leqslant 2\tilde T$，就有

$$1<T_*<\theta_k(t)-\theta_k(s)<3\tilde T$$

且

$$|t-s-(\theta_k(t)-\theta_k(s))|<\delta_0, \tag{5.26}$$

$$\theta_k(T_k)\geqslant\frac{2}{3}T_k. \tag{5.27}$$

现在，设 $p\geqslant q$. 则根据命题 4.1，$N^p_-(x)\supset\Delta^q_-(x)$，从而 $\eta_-(\Delta^p_-(x),t)\leqslant\eta_-(N^p_-(x),t)$ 对 $x\in H_0$ 及 $t\geqslant 0$，于是，因$\{P_k\}$及$\{Q_k\}$都收敛到H_0，故据(5.18)，(5.21)并用(5.24)—(5.26)，对于充分大的 $k\geqslant k_0$ 以及 $0\leqslant s<t\leqslant T_k$ 满足 $t-s\in\langle\tilde T,2\tilde T\rangle$，我们易看出

$$\eta_-(\Delta^q_-(\phi_s(a_k),t-s))\leqslant\eta_-(D(\phi_{\theta_k(s)}(b_k)),\theta_k(t)-\theta_k(s))$$
$$+\frac{\tilde\eta}{4}(\theta_k(t)-\theta_k(s)).$$

结合这不等式，(5.19)，(5.27) 及命题 4.5，就计算出(5.20)左端 $\leqslant-\frac{\tilde\eta}{2}$，因而与(5.20)矛盾，

其次，设$p < q$。则从直和分解(5.23)有$\dim(N_+^p(x) \cap \Delta_-^q(x)) \geq 1$对$x \in H_0$，因而 $\eta_+(N_+^p(x), t) \leqslant \eta_-(\Delta_-^q(x), t)$ 对 $x \in H_0$ 及 $t \geqslant 0$。于是，仍如上用(5.24)—(5.25)这些论据，可得

$$\eta_-(\Delta_-^q(\phi_s(a_k)), t-s) \geqslant \eta_+(D_+(\phi_{\theta_k(s)}(b_k)), \theta_k(t)-\theta_k(s))$$

$$-\frac{\bar{\eta}}{4}(\theta_k(t)-\theta_k(s))$$

对于充分大的 $k \geqslant k_0$ 及满足 $t-s \in \langle \widetilde{T}, 2\widetilde{T} \rangle$ 的 $0 \leqslant s < t \leqslant T_k$。但 Q_k 作为 $(\eta, 2\bar{T}; q)$-准双曲轨弧如前所述，我们有(5.20)的左端 $\leqslant -\eta < 0$（见[15]），由是

$$\sum_{j=0}^{m_k-1} \eta_+(D_+(\phi_{\theta_k(t_{j,k})}(b_k)), \theta_k(t_{j+1,k})-\theta_k(t_{j,k}))$$

$$\leqslant \frac{\bar{\eta}}{4}\theta_k(T_k) \tag{5.28}$$

对于充分大的k。但这结合(5.21)，(5.26)又将引出结论与命题 4.5 相矛盾。这证明引理叙述中使(i)成立的ϵ及d的存在。

我们还可进一步如是取ε及d使得（ii）也成立。这也可用类似于上面的反证法来看出。事实上，设有数序列 $\{\varepsilon_k\}$ 及$\{d_k\}$，轨弧序列 $\{Q_k\}$，周期轨道序列 $\{P_k\}$ 以及函数序列 $\{\theta_k(t)\}$ 如前所给，但在(5.21)中把 ε_{k-1} 换成ε_k，且有 $\mathrm{Ind}\, P_k = p \neq q$ 对 $k=1,2,3,\cdots$。任取$\langle 0, T_k \rangle$的一分割(5.19)并进行讨论如前。于是，若 $p > q$，则可得(5.28)对于充分大的k，因而引出结论与命题 4.5 矛盾。若 $p > q$，则因 $\dim(N_-^p(x) \cap \Delta_+^q(x)) \geqslant 1$ 对于 $x \in H_0$，因而也可类似地引出一矛盾。这样，我们就完成引理 5.6 的证明。

若K是 M^n 中任一个连通非空闭子集，在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变，包含在M内，且S在K上有双曲构造，记

$$\mathrm{Ind}\, K = \dim D_-(x) \quad 对任一\ x \in K$$

（$D_-(x)$ 意义见（2.3））。我们说，$\mathrm{Ind}\, K$ 的确定与K中的点x的选取无干。事实上，因S在K上有双曲构造，存在常数 $\lambda_0 > 0$ 及

$T_0 > 0$ 使得

$$\|\phi_t(u)\| \leqslant \|u\|\exp(-\lambda_0 t) \text{ 对 } u \in D_-(x), x \in K, t \geqslant T_0,$$

$$\|\phi_t(u)\| \leqslant \|u\|\exp(\lambda_0 t) \text{ 对 } u \in D_+(x), x \in K, t \leqslant -T_0,$$

且 $\mathscr{D}_x = D_-(x) \oplus D_+(x)$ 对 $x \in K$（见[13,§5)．于是从变换群 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 的连续性及 K 的连通性，易看出 $\dim D_-(x) = \dim D_-(x')$ 对任意的 x 及 $x' \in K$．这证明断语．在这里，若 K 进一步还是 S 的一周期轨道 P，显然 $\operatorname{Ind} K$ 即是前面所指的 $\operatorname{Ind} P$。

现在我们给出

定理 5.7 设 $S \in \mathscr{R}^*$．又设 A 是 S 的一非简单极小歧变集，不含有 S 的奇点，且对某一整数 $p \in \langle 0, n-1\rangle$ 有一基本 p-序列 $\{X_k, P_k\}$ 使得 $\{P_k\}$ 收敛到 A。则或是(1) $A \cap R(\zeta, p) \neq 0$ 对所有 $\zeta \in (0, \bar{\eta})$，或是(2) $A \cap L(\zeta, p) \neq 0$ 对所有 $\zeta \in (0, \bar{\eta})$，且

(i) 在情况(1)下，A 中有一个在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变的连通非空闭子集 K_-，在其上 S 有双曲构造，并具有

$$\operatorname{Ind} K_- < p;$$

(ii) 在情况(2)下，A 中有一个在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变的连通非空闭子集 K_+，在其上 S 有双曲构造，并具有

$$\operatorname{Ind} K_+ > p.$$

证 （这定理假设中所述基本 p-序列的存在见引理 5.2）据定理假设及引理 5.2，$A \cap (R(\zeta, p) \cup L(\zeta, p)) \neq 0$ 对每一 $\zeta \in (0, \bar{\eta})$。进一步据命题 4.9，$A \cap R(\zeta, p) \neq 0$ 蕴涵 $A \cap R(\zeta', p) \neq 0$ 对 $0 < \zeta < \zeta' < \bar{\eta}$．同样地，$A \cap L(\zeta, p) \neq 0$ 蕴涵 $A \cap L(\zeta', p) \neq 0$ 对 $0 < \zeta < \zeta' < \bar{\eta}$（因为 S 的左 (ζ, p)-扭拆点是 $-S$ 的右 $(\zeta, n-1-p)$-扭拆点)．于是，易看出定理结论中的(1)或(2)成立。

现证 (i)．设(1) 成立．我们将先证明：引理 5.4 中所述性质(*)不能成立，亦即至少存在一点 $b \in A$ 使得

$$\frac{1}{k\widetilde{T}} \sum_{j=0}^{k-1} \eta_-(\Delta^2_-(\phi_{j\widetilde{T}}(b)), \widetilde{T}) \geqslant -\frac{\bar{\eta}}{3}, k = 1, 2, 3, \cdots. \quad (5.29)$$

($\Delta_-^\rho(x)$ 同(5.1)中，且 S 过 b 的轨线的 ω-极限集合 Γ_b 是 Λ 的真子集. 事实上，设不然. 则据系 5.5，对任给的 $\varepsilon>0$ 及 $d>0$，存在 $a\in\Lambda$ 及 $T\geqslant d$ 使得 $\operatorname{dist}(a,\ \phi_T(a))<\varepsilon$，$\{\phi_T(a)\mid t\in\langle 0,T\rangle\}$ 是 $\left(\frac{\tilde{\eta}}{4},2\tilde{T};p\right)$-准双曲轨弧，且 $\langle 0,T\rangle$ 有分割 $0=t_0<t_1<\cdots<t_m=T(\tilde{T}\leqslant t_k-t_{k-1}\leqslant 2\tilde{T})$ 使(5.7)成立，特别地，

$$\frac{1}{T}\sum_{i=0}^{m-1}\eta_-(\Delta_-^\rho(\phi_{t_i}(a)),t_{i+1}-t_i)\geqslant-\frac{\tilde{\eta}}{3}. \tag{5.30}$$

但另一方面，我们又可应用引理 5.6 到 Λ 及对 $x\in\Lambda$ 的$(\tilde{\eta},\ \tilde{T};p)$-半双曲分解(5.1)得出(5.30) 左端 $\leqslant-\frac{\tilde{\eta}}{2}$ 对于某数 $\varepsilon>0$ 及 $d>0$，这是一矛盾，证明我们的断语：存在 $b\in\Lambda$ 使得 (5.29)成立，且 Γ_b 是 Λ 的真子集.

为简便，记 $\varphi=\phi_{\tilde{T}}$: $\Lambda\to\Lambda$ 及 $g(x)=\frac{1}{\tilde{T}}\eta_-(\Delta_-^\rho(x),\tilde{T})$ 对 $x\in\tilde{T}$. 则 φ 是紧致可度量空间 Λ 到其自身上的拓扑变换，$\varphi^j=\phi_{j\tilde{T}}$，且 $g(x)$ 是 Λ 上的连续函数(由于(4.5)及 (5.29)，$p\geqslant 1$). 于是，若记

$$\zeta=\varlimsup_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}g(\varphi^j(b)),$$

则 $\zeta\geqslant-\frac{\tilde{\eta}}{3}$. 又 φ 在 Λ 上产生一离散的动力体系，它过 b 的轨道的 ω-极限集合自然仍包含在 Γ_b 内. 于是，根据 Kryloff-Bogolioubof 理论(例如，[4，§2])，可取 Λ 中一正规测度 μ，在 φ 下不变，满足 $\mu(\Gamma_b)=\mu(\Lambda)=1$，且使

$$-\frac{\tilde{\eta}}{3}\leqslant\zeta=\int_\Lambda g\,d\mu=\int_{\Lambda_D}\left(\int_\Lambda g\,d\mu_x\right)d\mu(x),$$

其中 Λ_D 表 Λ 中的密集点子集，而 μ_x 表相应于准正则点 $x\in\Lambda$ 的单个测度. 由是至少存在一点 $c\in\Lambda_D\cap\Gamma_b$ 使

$$\int_\Lambda g d\mu_c \geqslant -\frac{\tilde{\eta}}{3}.$$

但 c 是一准正则点，这蕴涵存在极限

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} g(\varphi^j(c)) = \int_\Lambda g d\mu_c,$$

且 φ 所产生的离散动力体系，它过 c 的轨道的 ω-极限集合仍含有 c。这也就证明了，存在 $c\in\Gamma_b$ 使得存在极限

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k\tilde{T}}\sum_{i=0}^{k-1}\eta_-(\Delta_-^\varrho(\phi_{i\tilde{T}}(c)),\tilde{T}) \geqslant -\frac{\tilde{\eta}}{3}, \qquad (5.31)$$

且若记 Γ_c 为 S 的轨线 $\{\phi_t(c)|t\in(-\infty,\infty)\}$ 的 ω-极限集合，则 $c\in\Gamma_c$。

由于 M^* 紧致，Γ_b 作为 $\{\phi_t(b)|t\in(-\infty, \infty)\}$ 的 ω-极限集合，是 M^* 中一连通非空间的紧致子集，在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变。又由于 Γ_b 是 Λ 的真子集，而 Λ 是 S 的一极小歧变集，故 $\Gamma_b\cap Ob(S)=0$。由是据定理 3.1，S 在 Γ_b 上有双曲构造。记

$$q=\operatorname{ind}\Gamma_b=\dim D_-(x), x\in\Gamma_b.$$

于是存在 $\eta>0$ 及 $\bar{T}\geqslant\tilde{T}(>1)$ 使得：S 在每一点 $x\in\Gamma_b$ 处有 $(\eta,\bar{T};q)$ -半双曲分解

$$\mathscr{D}_x = D_-(x)\oplus D_+(x) \qquad (5.32)$$

(参看(2.3))，且对任意的 $\bar{T}\leqslant T<\infty$，轨弧 $Q=\{\phi_t(c)|t\in\langle O,T\rangle\}$ 都是对 $\mathscr{D}_c$ 的分解(5.32)来说的一 $(\eta, 2\bar{T}; q)$-准双曲轨弧。所以，应用引理 5.6，我们就可取 $\varepsilon>0$ 及 $d>\bar{T}$ 使得，若 $T\geqslant 2d$ 且 $\operatorname{dist}(c,\phi_T(c))<\varepsilon$，则对于 $\langle 0,T\rangle$ 的分割

$$0<\tilde{T}<2\tilde{T}<\cdots<(m-1)\tilde{T}<T,$$

$$(\tilde{T}\leqslant T-(m-1)\tilde{T}<2\tilde{T}),$$

我们有

$$\frac{1}{T}\left(\sum_{j=0}^{m-2}\eta_-(D_-(\phi_{j\tilde{T}}(c)),\tilde{T})+\eta_-(D_-(\phi_{(m-1)\tilde{T}}(c)),\right.$$

$$\left.T-(m-1)\tilde{T})\right)\leqslant-\frac{\tilde{\eta}}{2}. \qquad (5.33)$$

我们说，q 不能 $\geqslant p$. 事实上，设不然，则因 S 在每一 $x\in \Gamma_b$ 处同时有半双曲分解(5.1)及(5.32)，从而据命题 4.1，$D_-(x)\supset \Delta_-^p(x)$ 对每一 $x\in \Gamma_b$. 这以及(5.33)给出

$$\frac{1}{T}\left(\sum_{j=0}^{m-2}\eta_-(\Delta_-^p(\phi_{j\tilde T}(c)),\tilde T)+\eta_-(\Delta_-^p(\phi_{(m-1)\tilde T}(c)),\right.$$

$$\left.T-(m-1)\tilde T\right)\leqslant -\frac{\tilde\eta}{2}. \tag{5.34}$$

于是，由于 $c\in \Gamma_e$ 及 $\lambda<\infty$（见(5.6)），我们可取充分大的 T 满足 $\mathrm{dist}(c,\phi_T(c))<\varepsilon$，且使得(5.31)及(5.34)互相矛盾. 这证明断语 $q<p$. 取 $K_-=\Gamma_b$ 即完成(i)的证明. 应用(i)到 $-S$ 可得出(ii). 定理 5.7 证完，从而定理 5.2 也得证.

引理 5.8 设 $S\in \mathscr{X}^*$. 设 H 是 M^n 中一连通非空的闭子集，在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变，不含有 S 的奇点，且设 S 在 H 上有双曲构造，具有 $\mathrm{Ind}\,H=q$. 则对任给的一点 $c\in H$，

$$\varlimsup_{k\to\infty}\frac{1}{k\tilde T}\sum_{j=0}^{k-1}\eta_-(D_-(\phi_{j\tilde T}(c)),\tilde T)\leqslant -\frac{\tilde\eta}{2},$$

且对 H 在 M^n 中一任给的邻域 U，S 恒有周期轨道 $P\subset U$ 具有 $\mathrm{Ind}\,P=q$.

证 从引理假设，存在数 $\eta>0$ 及 $\bar T\geqslant \tilde T$ 使得：S 在每一点 $x\in H$ 处有 $(\eta,\bar T;q)$-半双曲分解

$$\mathscr{D}_x=D_-(x)\oplus D_+(x),\ \dim D_-(x)=q,$$

且对任意的 $\bar T\leqslant T<\infty$，$\{\phi_t(c)\,|\,t\in\langle 0,T\rangle\}$ 是对 $\mathscr{D}_c$ 的这分解来说的一 $(\eta,\ 2\bar T;q)$-准双曲轨弧. 我们可取 $\{\phi_{k\tilde T}(c)\}$ 的一子序列 $\{\phi_{k_m\tilde T}(c)\}$ 收敛到一点 $c_*\in H$. 于是应用引理 5.6，命题 4.2 以及 [15，定理 I] 可看出，存在 m_0 使得若 $\bar m>m\geqslant m_0$ 且 $\bar m-m$ 也充分大时，则

$$\frac{1}{(k_{\bar m}-k_m)\tilde T}\sum_{j=k_m}^{k_{\bar m}-1}\eta_-(\phi_{j\tilde T}(c),\bar T)\leqslant -\frac{\tilde\eta}{2},$$

且 S 有周期轨道 P 充分靠近轨弧 $\{\phi_t(c)\,|\,t\in\langle k_m\tilde T,\ k_{\bar m}\tilde T\rangle\}$ 使

$\operatorname{Ind} P = q$. 故引理成立。

现在，我们来看 $\mathscr{X}^*$ 中的系统与混杂非游荡点的关系。

命题 5.9 设 $S \in \mathscr{X} - \mathscr{X}^*$. 则

(i) S 有一非游荡点 c 具有性质：对任给的 $\varepsilon > 0$，存在一 $X \in \mathscr{X}$ 满足 $\|X - S\|_1 < \varepsilon$ 且使得，$U(c, \varepsilon)$ 或含有 X 的非双曲的奇点或与 X 的非双曲的周期轨道相交。

(ii) S 具有混杂非游荡点。

证 因 $S \in \mathscr{X} - \mathscr{X}^*$，对每一整数 $k \geqslant 1$ 存在一 $X_k \in \mathscr{X}$ 使 $\|X_k - S\|_1 < \frac{1}{k}$，且存在一点 x_k 或是 X_k 的一非双曲的奇点，或在 X_k 的一非双曲的周期轨道上。从 M^n 的紧致性，用取子序列的法子，不妨设序列 $\{x_k\}$ 收敛到一点 $x_* \in M^n$. 取 c 为轨线 $\{\phi_t(x_*) \mid t \in (-\infty, \infty)\}$ 的一 ω-极限点。于是易验证 $U(c, \varepsilon)$ 恒与 $Q_k = \{\phi_{X_k t}(x_k) \mid t \in (-\infty, \infty)\}$ 相交对于充分大的 k（见[10，第13—14 页]）。这给出 (i)。为证明 (ii)，我们注意到，若 x_0 是 $X \in \mathscr{X}$ 的一非双曲的奇点，则可绕 x_0 对 X 取任意小的不同的 C^1 扰动以得出 X_1 及 $X_2 \in \mathscr{X}$，它们都以 x_0 为其双曲奇点，但 $\operatorname{Ind}_{X_1}(x_0) \neq \operatorname{Ind}_{X_2}(x_0)$；同样地，若 Q 是 $X \in \mathscr{X}$ 的一非双曲的周期轨道，则可绕 Q 对 X 取任意小的不同的 C^1 扰动以得出 Y_1 及 $Y_2 \in \mathscr{X}$，它们都以 Q 为双曲周期轨道，但 $\operatorname{Ind}_{Y_1} Q \neq \operatorname{Ind}_{Y_2} Q$（见 [3, 14]），应用这法子到 Q_k 即看出 c 是 S 的一混杂非游荡点（§1）。命题证完。

所以，若 S 不具有混杂非游荡点，则 $S \in \mathscr{X}^*$，由是 S 在 $\mathscr{X}$ 中有一邻域，其中任一系统的奇点和周期轨道都是双曲的。这结合关于双曲奇点的(1.1)式及关于双曲周期轨道的(1.2)式给出

命题 5.10 设 $S \in \mathscr{X}$ 不具有混杂非游荡点，x_0 是 S 的一奇点。则存在一 $\varepsilon > 0$ 使得当 $X \in \mathscr{X}$ 且 $\|X - S\|_1 < \varepsilon$ 时，X 没有周期轨道与 $U(x_0, \varepsilon)$ 相交。

我们现在易完成本章主要结果（看 §1）

定理 1.1 及 1.2 的证明 由于已有定理 4.10，现在只须证明

定理 5.11 设 $S \in \mathscr{X}$ 不具有混杂非游荡点。则 $S \in \mathscr{X}^*$ 且

存在一 $\zeta\in(0,\bar{\eta})$ 使

$$R(\zeta,p)\cup L(\zeta,p)=0 \text{ 对 } p=0,1,\cdots,n-1. \quad (5.35)$$

证 据命题 5.9，$S\in\mathscr{K}^*$。对一任给的 p，如同定理 4.10 证明中，考虑 S 所有具有下述性质的常点 x 作成的集合 Ω_*^p，这性质是存在一基本 p-序列 $\{X_k,P_k\}$ 及 P_k 上的点 x_k 使 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x$，$\Omega_*^p$ 是 M 中一闭子集，在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变。进一步据命题 5.10，Ω_*^p 在 M^n 中闭，并且从扭拆点的定义，

$$R(\zeta,p)\cup L(\zeta,p)\subset\Omega_*^p \text{ 对每一 } \zeta\in(0,\bar{\eta}). \quad (5.36)$$

记 $\Lambda_*=\bigcup\limits_{p=0,1,\cdots,n-1}\Omega_*^p$，这是 M^n 中一闭子集，在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$，且不含有 S 的奇点。

我们说，Λ_* 不能是 S 的歧变集。事实上，设不然，据命题 2.1，可在 Λ_* 中取一极小歧变集 Λ，它显然仍不含有 S 的奇点，可分 Λ 为非简单的及简单的两种情况来考虑。若 Λ 非简单，则据引理 5.2 及定理 5.7，可取一基本 r-序列 $\{X_k,P_k\}$ 对某一整数 r，使得周期轨道序列 $\{P_k\}$ 收敛到 Λ，且 Λ 包含一个在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变的连通非空闭子集 K，在其上 S 有双曲构造，并具有

$$\operatorname{Ind} K\neq r.$$

但据引理 5.8，K 在 M^n 中任何一个给定的邻域都包含有 S 的周期轨道 P 具有 $\operatorname{Ind}P=\operatorname{Ind}K$。这与 $\{P_k\}$ 收敛到 Λ 以及 $\operatorname{Ind}_{X_k}P_k=r$ 等这些事实将引出结论与 S 不具有混杂非游荡点这假定相矛盾。故 Λ 不能是非简单极小歧变集。

其次，设 Λ 是简单的。则据定理 3.6，S 有一常点 $a\in\Lambda\cap Ob(S)$ 具彼处结论中所述的性质 (i)—(v)，但现在 Γ_a 及 Γ_a' 都不含有 S 的奇点。由于 $a\in\Lambda_*$，故也可取一基本 q-叙列 $\{Y_k,Q_k\}$ 对某一整数 q 使得有 $x_k\in Q_k$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=a$。用取子序列的法子，不失一般性可设 $\{Q_k\}$ 收敛到 M^n 的一闭子集 Λ_0 [1, §28]，由是 $a\in\Lambda_0\subset M(\bar{\eta},\tilde{T};q)$（看命题 4.6 及 4.9）。据引理 4.3

及 ω 与 α-极限集合的定义，易看出 Γ_a 及 Γ'_a 也都 $\subset \Lambda_0$. 再据定理 3.6-(i)， S 在 Γ_a 及 Γ'_a(它们都是 Λ 中连通非空的闭子集，在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变)上都有双曲构造，由是据引理 5.8 及这里定理中假设，易看出

$$\operatorname{Ind} \Gamma_a = q = \operatorname{Ind} \Gamma'_a,$$

进而应用系 3.5(到 S 及 $-S$)即得

$$\dim D_-(a) = q, \ \dim D_+(a) = n - 1 - q. \qquad (5.37)$$

但 $a \in M(\tilde{\eta}, \tilde{T}; q)$，这是说， S 在 a 处有 $(\tilde{\eta}, \tilde{T}; q)$-半双曲分解

$$\mathscr{D}_a = \Delta^q_-(a) \oplus \Delta^q_+(a), \ \dim \Delta^q_-(a) = q. \qquad (5.38)$$

我们有 $D_-(a) \subset \Delta^q_-(a)$或 $\Delta^q_-(a) \subset D_-(a)$. 这是因为，若这两个包含关系都不成立，即存在 $u \in \Delta^q_-(a) - D_-(a)$ 及 $v \in D_-(a) - \Delta^q_-(a)$，则据定理 3.6-(iv) 及 $(\tilde{\eta}, \tilde{T}; p)$-半双曲分解所须满足的条件以及 ϕ_t 将 $\mathscr{D}_a$ 线性映射至 $\mathscr{D}_{\phi_t(a)}$ 上这一性质，易看出既有 $\|\phi_t(u)\| > \|\phi_t(v)\|$，又有 $\|\phi_t(v)\| > \|\phi_t(u)\|$ 对于充分大的 $t > 0$，但这不可能，于是因 $\dim D_-(a) = \dim \Delta^q_-(a)$，我们有 $D_-(a) = \Delta^q_-(a)$. 类似地，据定理 3.6-(v) 及 $(\tilde{\eta}, \tilde{T}; q)$-半双曲分解(5.38)可证 $D_+(a) = \Delta^q_+(a)$. 由是

$$\mathscr{D}_a = D_-(a) \oplus D_+(a).$$

但这与命题 2.3 相矛盾. 这样，总起来说，我们就已证明了，Λ_* 不能是 S 的歧变集. 换言之，必有 $\Lambda_* \cap Ob(S) = 0$，或等价地

$$\mathscr{D}_x = D_-(x) + D_+(x) \text{ 对每一 } x \in \Lambda_* \qquad (5.39)$$

(由于 Λ_* 不含有 S 的奇点；见[13，系 4.13]).

但我们有 $\dim D_-(x) = n - 1 - \dim D_+(x)$ 对每一 $x \in \Lambda_*$. 这论断可用与(5.37)式同样的证明法来证（即对任一给定的 $c \in \Lambda_*$， 取基本序列使其周期轨道序列收敛到一集合包含 c；再应用定理 3.1(到 S 与 $-S$)及引理 5.8 以及这里定理假设，即得 $\operatorname{Ind} \Gamma_c = \operatorname{Ind} \Gamma'_c$ 对于 S 过 c 的轨线的 ω-极限集合 Γ_c 及 α-极限集合 Γ'_c；然后再应用系 3.5(到 S 及 $-S$)). 于是结合(5.39)我们有

$$\mathscr{D}_x = D_-(x) \oplus D_+(x) \text{ 对每一 } x \in \Lambda_*.$$

因而据[13，系 5.10]，S 在 Λ_* 上有双曲构造。

现在，为完成定理 5.11 的证明，设相反地，不存在 $\zeta\in(0,\bar{\eta})$ 使(5.35)成立。则可取 $(0,\bar{\eta})$ 中一序列 $\{\zeta_k\}$ 满足

$$\lim_{k\to\infty}\zeta_k=0, \tag{5.40}$$

且使得对于某一 p，或则(1) $R(\zeta_k,\ p)\neq 0$ 对 $k=1,2,3,\cdots$，或则(2) $L(\zeta_k,p)\neq 0$ 对 $k=1,2,3,\cdots$. 先考虑情况(1). 于是据命题 4.6，命题 4.7 及(5.36)，S 在每一点 $x\in\Omega_*^p$ 处有 $(\bar{\eta},\widetilde{T};p)$-半双曲分解

$$\mathscr{D}_x=\Delta_-^p(x)\oplus\Delta_+^p(x),\ \dim\Delta^p(x)=p,$$

且存在 $x_k\in\Omega_*^p$ 使

$$\frac{1}{m\widetilde{T}}\sum_{i=0}^{m-1}\eta_-(\phi_{(i\widetilde{T})}(\Delta_-^p(x_k)),\widetilde{T})\geqslant-\zeta_k,m=1,2,3,\cdots.$$

用取子序列的法子，不妨设序列 $\{x_k\}$ 收敛到一点 $\tilde{x}\in\Omega_*^p$ (因 Ω_*^p 是M中的紧致子集)。于是据变换群 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 的连续性，命题 4.1，命题 4.2 及(5.40)我们有

$$\frac{1}{m\widetilde{T}}\sum_{i=0}^{m-1}\eta_-(\phi_{(i\widetilde{T})}(\Delta^p(\tilde{x})),\widetilde{T})\geqslant 0,m=1,2,3,\cdots. \tag{5.41}$$

取H为 Ω_*^p 中包含 $\tilde{x}$ 的连通分支，这是 Ω_*^p 中一非空闭子集，在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$下不变，不含有S的奇点，且S在H上有双曲构造。这蕴涵 S 在每一点 $x\in H$ 处有 $(\bar{\eta},\bar{T};\bar{p})$-半双曲分解对某数 $\bar{\eta}>0,\bar{T}>0$ 及 $\bar{p}=\operatorname{Ind}H$. 但$S$不具有混杂非游荡点，故据引理 5.8 易看出 $p=\bar{p}$ 由是据命题 4.1 有 $D_-(x)=\Delta^p(x)$ 对 $x\in H$. 但这样来，(5.41)与引理 5.8 中一不等式就互相矛盾. 再应用这已证结论到$-S$ 也就可看出，在情况(2)下仍会产生矛盾. 这证明，存在 $\zeta\in(O,\bar{\eta})$ 使(5.35)成立。现在定理 5.11 证完，从而定理 1.1 及 1.2 也得证。

§6. 关于集合 $R(\zeta,p)$ 及 $L(\zeta,p)$

从本章前面所述看来，关心与 $S\in\mathscr{X}^*$ 相牵涉的集合 $R(\zeta,p)$

及 $L(\zeta,p)$ 何时为空集，将不是无理由的。在现有的基础上，这方面有几个结果较容易看出。下面，我们举出这些作为本文的结束。

$\mathscr{X}^*$是$\mathscr{X}$中一开子集(见[14])。记$\mathscr{X}^{**}$为所有具有下述性质的 $X\in\mathscr{X}^*$ 作成的集合，即X在 $\mathscr{X}^*$ 中有一邻域 W，且对于X来说，M^n 中存在开子集 $G,W_0,W_1,\cdots,W_{n-1}$，它们在 M^n 中的闭包彼此互不相交，且使得：如果 $Y\in W$，则Y的每一奇点都 $\in G$，且它的每一具有 $\mathrm{Ind}_Y P=k$ 的周期轨道 P 都包含在 W_k 内。显然，$\mathscr{X}^{**}$ 也是 $\mathscr{X}^*$ 中一开子集。

定理 6.1 对于 $S\in\mathscr{X}$，下述四个条件等价：

(i) $S\in\mathscr{X}^{**}$；

(ii) S 不具有混杂非游荡点；

(iii) $S\in\mathscr{X}^*$ 且存在一 $\zeta\in(0,\eta)$ 使得$R(\zeta,p)\cup L(\zeta,p)=0,p=0,1,\cdots,n-1$；

(iv) S 满足公理 A 且具有无环性。

证 因每一 $X\in\mathscr{X}^*$ 的奇点和周期轨道都是双曲的，易看出 (i)⇒(ii)。(ii)⇒(iii) 及 (iii)⇒(iv) 分别即为定理 5.11 及定理 4.10。只余证 (iv)⇒(i)。设 (iv) 成立。据谱分解定理(例如，[6，第151 页])，S 的非游荡集 Ω 分解成彼此互不相交且都在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变的有限个非空闭子集 Λ_i 的集合和

$$\Omega=\Lambda_1\cup\Lambda_2\cup\cdots\cup\Lambda_m,$$

其中每个 Λ_i 都含有一稠密的轨线，且 S 在每个 Λ_i 上都有双曲构造。由是 Λ_i 是连通的，且若 P 是 S 的一周期轨道 $\subset\Lambda_i$，则 $\mathrm{Ind}P=\mathrm{Ind}\Lambda_i$。取$\Lambda_i$ 在 M^n 中的邻域 V_i 使诸 V_i 在 M^n 中的闭包彼此互不相交。则据[6，§§5，6]，存在 $\varepsilon>0$ 使得，若 $X\in\mathscr{X}$ 且 $\|X-S\|_1<\varepsilon$，则X的非游荡集 $\Omega(X)$ 也可分解成集合和

$$\Omega(X)=\Lambda_1(X)\cup\Lambda_2(X)\cup\cdots\cup\Lambda_m(X),$$

其中 $\Lambda_i(X)\subset V_i$，X在 $\Lambda_i(X)$上有双曲构造，且有拓扑变换 h_X: $\Omega\to\Omega(X)$ 使 $h_X(\Lambda_i)=\Lambda_i(X)$ 且把 S 在 Ω 中的轨线映至X的轨线。因此，若 P_1 及 P_2 是X的周期轨道$\subset$同一 $\Lambda_i(X)$，则 $\mathrm{Ind}_X P_1$

$= \mathrm{Ind}_X P_2$ 并且若 P 是 S 的周期轨道 $\subset \Lambda_i$，且 ε 充分小，则也易看出 $\mathrm{Ind}_X P_1 = \mathrm{Ind}\, P$（如所知，在充分小的 C^1 扰动下，S 绕一个双曲周期轨道的局部相空间的拓扑结构不变，因而稳定流形的维数也不变）。可类似地考虑奇点。于是易看出 (iv) ⇒ (i)，定理 6.1 证完。

记 $\mathscr{X}^\circ$ 为所有具有下述性质的 $X \in \mathscr{X}^*$ 作成的集合，即 X 在 $\mathscr{X}^*$ 中有一邻域 $\mathscr{U}$，且对于 X 来说，M^* 中有互不相交的开子集 G_0 及 G_1 使得：若 $Y \in \mathscr{U}$，则 Y 的每一奇点都 $\in G_0$，且 Y 的每一周期轨道都 $\subset G_1$，显然，$\mathscr{X}^\circ$ 是 $\mathscr{X}^*$ 的开子集 $\supset \mathscr{X}^{**}$。

记 Ω_0 为 S 所有非游荡常点作成的集合。对于 $S \in \mathscr{X}^*$，命 Ω_*^p 同(4.20)中，它在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变，不含有 S 的奇点，且 S 在每一 $x \in \Omega_*^p$ 处有 $(\bar{\eta}, \tilde{T}; p)$-半双曲分解

$$\mathscr{D}_x = \Delta_-^p(x) \oplus \Delta_+^p(x), \dim \Delta_-^p(x) = p. \tag{6.1}$$

据 $\mathscr{X}^\circ$ 的定义及命题 4.6 易看出：对于 $S \in \mathscr{X}^\circ, \Omega_*^p$ 在 M^* 中闭，

$$R(\zeta, p) \cup L(\zeta, p) \subset \Omega_*^p$$

对每一 $\zeta \in (0, \bar{\eta}), p = 0, 1, \cdots, p$；且 Ω_0 是 $\bigcup_{p=0,1,\cdots,n-1} \Omega_*^p$ 中一闭子集。

定理 6.2 设 $S \in \mathscr{X}^\circ$，任给 $\zeta \in (0, \bar{\eta})$。则

(i) $R(\zeta, 0) = 0, R(\zeta, n-1) = 0$;

(ii) $L(\zeta, 0) = 0, L(\zeta, n-1) = 0$.

证 先证 (i)。据(4.5)显然 $R(\zeta, 0) = 0$。要证 $R(\zeta, n-1) = 0$，设相反地，存在一点 $a \in R(\zeta, n-1) \subset \Omega_*^{n-1}$。由是据命题 4.7 及命题 4.6 我们有

$$\frac{1}{k\tilde{T}} \sum_{j=0,1,\cdots,k-1} \eta_-(\Delta_-^{n-1}(\phi_{j\tilde{T}}(a)), \tilde{T}) \geqslant -\zeta > -\bar{\eta} \tag{6.2}$$

及

$$\frac{1}{k\tilde{T}} \sum_{j=-k,-k+1,\cdots,-1} \eta_-(\Delta_-^{n-1}(\phi_{j\tilde{T}}(a)), \tilde{T}) \leqslant -\zeta < 0,$$

$$k = 1, 2, 3, \cdots. \tag{6.3}$$

因 $S \in \mathscr{X}^*$ 且 Ω_0 在 M^n 中闭，故据[17，定理 3.1]，S 仅有有限个数的正向收缩的周期轨道，记它们的集合和为 F．又记 H 为负半轨线 $\{\phi_t(a) | t \in (-\infty, 0\rangle\}$ 与它的 α 一极限集合的集合和，$h(x) = \eta_-(\Delta_-^{n-1}(x), \widetilde{T})/\widetilde{T}$ 对 $x \in \Omega_*^{n-1}$．于是据(6.2)及 $h(x)$ 对 $x \in \Omega_*^{n-1}$ 的连续性，应用命题 4.5，易看出存在 $\delta > 0$ 使得 H 的 δ-邻域

$$\bigcup(H, \delta) \subset M^n - F. \tag{6.4}$$

由于(6.3)及 $h(x)$ 在 Ω_*^{n-1} 上的有界性，我们可取整数序列 $0 < k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$ 使得

$$\frac{1}{\tau}\sum_{j=0}^{\tau-1} h(\phi_{(-k_m+j)\widetilde{T}}(a)) \leqslant -\frac{\zeta}{2},$$

$$\tau = 1, 2, \cdots, k_m; m = 1, 2, 3, \cdots.$$

又从 Ω_*^{n-1} 的紧致性，我们还不妨设 $\{k_m\}$ 如是取使得 $\{\phi_{-k_m\widetilde{T}}(a)\}$ 收敛到一点 $\bar{a} \in H$．因此，对任给的 $\epsilon > 0, \epsilon < 2\delta$，及 $d > 0$，我们都可取一如[15]中所指的 $(\zeta/2, \widetilde{T}; n-1)$-准双曲轨弧

$$\{\phi_t(a) | t \in \langle -k_{m_1}\widetilde{T}, -k_{m_2}\widetilde{T}\rangle\} \subset H, \quad m_1 > m_2,$$

满足 $(k_{m_1} - k_{m_2})\widetilde{T} \geqslant d$，且这轨弧的两个端点都在 $\bar{a}$ 的 ϵ-邻域内，从而可应用[15，定理 I]及引理 5.6 得出 S 的一正向收缩的周期轨道 $\subset \bigcup(H, \delta)$，但这与(6.4)矛盾．这证明(i)．应用(i)到 $-S$ 即得出(ii)．定理 6.2 证完．

定理 6.3 设 S 是 M^3 上一 C^1 常微系统 $\in \mathscr{X}^\circ$．则存在一 $\zeta \in (0, \eta)$ 使 $R(\zeta, 1) \cup L(\zeta, 1) = 0$．

证 设相反地，定理结论不成立．则存在一序列 $\{\zeta_k\}$，$\zeta_k \in (0, \eta)$，满足

$$\lim_{k \to \infty} \zeta_k = 0, \tag{6.5}$$

且使得：或则(1) $R(\zeta_k, 1) \neq 0$ 对所有 k，或则(2) $L(\zeta_k, 1) \neq 0$ 对所有 k．但因在 M^3 上，S 的每一左$(\zeta_k, 1)$-扭拆点是 $-S$ 的一右$(\zeta_k, 1)$-扭拆点，故对于我们的目的来说，不妨只考虑情况(1)．又注意对每一 $x \in \Omega_*^1$，$\dim \Delta_-^1(x) = 1$ 从而 $\eta_-(\Delta_-^1(x), \widetilde{T}) = \log \|\phi_{\widetilde{T}}(u)\|$ 对 $u \in \Delta^1(x)$，$\|u\| = 1$，故应用命题 4.7，我们

可取 $x_k\in R(\zeta_k,1)\subset\Omega^1_*,u_k\in\Delta^1_-(x_k),\|u_k\|=1$，使

$$\frac{1}{\tilde{k}\tilde{T}}\log\|\phi_{\tilde{k}\tilde{T}}(u_k)\|\geqslant-\zeta_k \text{ 且 } \frac{1}{\tilde{k}\tilde{T}}\log\|\phi_{-\tilde{k}\tilde{T}}(u_k)\|$$

$$\geqslant\zeta_k,\tilde{k}=1,2,3,\cdots \tag{6.6}$$

用取子序列的法子，不妨设序列 $\{x_k\}$ 收敛到一点 $\bar{x}\in\Omega^1_*$，且$\{u_k\}$ 也收敛到一 $\bar{u}\in\Delta^1_-(\bar{x})$，$\|u\|=1$．于是据(6.5)，(6.6)及变换群 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$的连续性，我们有

$$\|\phi_{k\tilde{T}}(\bar{u})\|\geqslant1 \text{ 且 } \|\phi_{-k\tilde{T}}(\bar{u})\|\geqslant1,k=0,1,2,3,\cdots. \tag{6.7}$$

因 $S\in\mathscr{K}^*$ 且 Ω_0 在 M^3 中闭，故据[17，定理3.1]，S仅有有限个数的周期轨道是正向或负向收缩的．记它们的集合和为 K，又记轨线 $\{\phi_t(\bar{x})|t\in(-\infty,\infty\}$ 的 ω-极限集合为 Γ(这是 Ω^1_* 中一连通非空的闭子集，在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$下不变，不含有 S 的奇点)。于是应用(6.7)可看出，存在一 $\varepsilon>0$ 使Γ的 ε-邻域

$$\bigcup(\Gamma,\varepsilon)\subset M^3-K. \tag{6.8}$$

我们说 Γ 是一歧变集．要证此，设相反地，$\Gamma\cap Ob(S)=0$，则据定理 3.1，S 在 Γ 上有双曲构造，且据系 3.5 有

$$\operatorname{Ind}\Gamma=\dim D_-(\bar{x}).$$

但 S 在 $\bar{x}$ 处有 $(\bar{\eta},\tilde{T};1)$-半双曲分解 (6.1)．故从 (6.7) 可看出 $\dim D_-(\bar{x})=0$。于是据引理 5.7，$\bigcup(\Gamma,\varepsilon)$ 包含有 S 的负向收缩周期轨道，与(6.8)矛盾，这证明断语．

于是据命题 2.1，可取 S 的一极小歧变集 $\Lambda\subset\Gamma$．设 Λ 是简单的．则据定理 3.6，S 有一常点 $a\in\Lambda\bigcup Ob(S)$ 具有彼处所述的性质 (i)—(v)，但现在 Γ_a 及 Γ'_a 都不含有 S 的奇点．我们有 $\dim D_-(a)\neq0$，因为否则据系 3.5 就有 $\operatorname{Ind}\Gamma_a=0$，从而仍如上段，$\bigcup(\Gamma,\varepsilon)\supset\bigcup(\Gamma_a,\varepsilon)$ 包含有 S 的收缩轨道，与(6.8)矛盾．应用这结论到$-S$ 也立即得出 $\dim D_+(a)\neq0$．但据命题 2.3，$\dim(D_-(a)+D_+(a))<\dim M^3-1$．这给出 $\dim D_-(a)=1=\dim D_+(a)$．但另一方面，现在 S 在 $x=a\in\Omega^1_*$ 处有 $(\bar{\eta},\tilde{T};1)$-半双曲分解(6.1)对 $p=1$，于是进一步据定理 3.6-(iv)及 ϕ_t 把 $\mathscr{D}_a$ 线性映射至 $\mathscr{D}_{\phi_t(a)}$上这一性质，看出 $D_-(a)$ 必$=\Delta^1_-(a)$．类

似地从定理 3.6-(v)，可得 $D_+(a)=\Delta_+^1(a)$. 故又有 $\dim(D_-(a)+D_+(a))=\dim(\Delta_-^1(a)\oplus\Delta_+^1(a))=2$，与命题 2.3 矛盾．这证明 Λ 不能是简单极小歧变集．其次，设 Λ 是非简单的．则据引理 5.2，可取一基本 p-序列 $\{X_k,P_k\}$ 收敛到 $\Lambda(0\leqslant p\leqslant\dim M^3-1)$．若 $p=0$ 或 2，则从定理 5.7 将引出结论与定理 6.2 相矛盾．由是 $p=1$．但若这样，则仍据定理 5.7 可得出 Λ 中一连通非空的闭子集 J，在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变，S 在其上有双曲构造，且 $\mathrm{Ind}\,J=0$ 或 2，由是仍应用引理 5.8 可得出 S 的正向或负向收缩的周期轨道 $\subset U(J,\epsilon)$．这仍与(6.8)矛盾．综上所述，我们又证明了，Γ 不能是 S 的歧变集，但这又与上段已证断语矛盾．这完成定理 6.3 的证明．

结合定理 6.2—6.3 及定理 4.10 即得出

定理 6.4 设 S 是 M^3 上一 C^1 常微系统 $\in\mathscr{X}^\circ$．则 S 是 Ω-稳定的．

系 6.5 设 S 是 M^3 上一个无奇点的 C^1 常微系统．则 S 是 Ω-稳定的当且仅当 $S\in\mathscr{X}^*$．

证． 若 S 是 Ω-稳定的，$S\in\mathscr{X}^*$[14]．其逆，若 S 无奇点且 $\in\mathscr{X}^*$，则 S 显然 $\in\mathscr{X}^\circ$．

附记． 系 6.5 的微拓变换类比形式是[17，定理 1.2]（关于微拓变换 $\in\mathscr{F}^*(M^2)$），但得出的方法有所不同．后者充分性部分的证明用到这样一个事实，即若 $f\in\mathscr{F}^*(M^n)$，则 f 的每一非游荡点都是它的周期点集的闭包点．但类似结论对于 $\mathscr{X}^*$ 中的系统则尚成一个（似不易简单处理的）问题，即若 S 是 M^n 上一 C^1 常微系统 $\in\mathscr{X}^*$，S 的每一非游荡点是否一定是它的奇点与周期轨道的并集的闭包点？这里，系 6.5 的得出主要是由于极小歧变集所起的作用．

结合定理 1.1，系 6.5 及定理 6.1—6.3，我们易得出

系 6.6 设 S 是 M^3 上一个无奇点的 C^1 常微系统．则 S 是 Ω 稳定的当且仅当 S 不具有混杂非游荡点．

参 考 文 献

[1] Hausdorff, F., Mengenlehre, Berlin, 1927.

[2] Mañé, R., Contributions to the stability conjecture, *Topology*, **17**(1978), 383—396.

[3] Markus, L., Structurally stable differential systems, *Annals of Math.*, **73**(1961), 1—19.

[4] Oxtoby, J. C., Ergodic sets, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **58**(1952), 116—136.

[5] Pugh, C., An improved closing lemma and a general density theorem, *Amer. J. Math.*, 89 (1967), 1010—1021.

[6] Pugh, C. and Shub, M., The Ω-stability theorems for flows, *Inventiones Math.*, **11**(1970), 150—158.

[7] Smale, S., The Ω-stability theorem, Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math., Soc. 14, 1970, 289—297.

[8] Whyburn, G. and Duda, E., Dynamic Topology, Springer-Verlag, 1979.

[9] B. B. 涅梅茨基及 B. B. 斯捷巴诺夫，微分方程定性论，下册，科学出版社，1959.

[10] 廖山涛，常微分方程系统所导出的在切丛上的单参数变换群的诸态备经性质对相空间结构的探讨的应用I，北京大学学报(自然科学)，12(1966)，1—43.

[11] 廖山涛，典范方程组，数学学报，17(1974)，100—109；175—196；270—295(即本书第二章).

[12] 廖山涛，阻碍集与强匀断条件，数学学报，19(1976)，203—209(即本书第三章).

[13] 廖山涛，阻碍集 (I)，数学学报，23(1980)，411—453(即本书第四章).

[14] 廖山涛，某类常微系统的一个基本性质，数学学报，22(1979)，316—343.

[15] 廖山涛，一个关于周期轨道存在的定理，北京大学学报(自然科学)，(1)，(1979)，1—20.

[16] 廖山涛，一个推广的 C^1 封闭引理，北京大学学报(自然科学)，(3)，(1979)，1—41.

[17] Liao Shan-Tao, On the stability conjecture, *Chinese Annals of Math.*, **1**(1980), 9—30(即本书第五章).

第七章　典范微分方程组和阻碍集及对于结构稳定性问题的应用

这是我们在二十多年前开始的关于微分动力系统研究方式的一篇简要的综合报告．动力系统虽然已有很长的历史，但我们要介绍的实际上仅限于标题所示．过去文献中出现的许多重要概念和结果现在已是众所周知，它们或者与我们的话题有关，或者在某些方面已较多地影响到我们的工作．这些都将提及并适当引述，以便容易找出判断的线索．

§1. 常微系统的整体线性化与线性表达式

我们用 M^n 通篇表示一个 n 维紧致的 Riemann 流形，$n \geq 2$，并用 $\mathscr{X} = \mathscr{X}(M^n)$ 表示 M^n 上 C^1 常微系统（切向量场）组成的线性空间．对任一 $X \in \mathscr{X}$，记

$$\|X\|_0 = \sup_{x \in M^n} \|X(x)\|,$$

$$\|X\|_1 = \|X\|_0 + \sup_{Y \in \mathscr{X}, \|Y\|_0 = 1} \|\nabla_Y X\|_0,$$

这里 $\nabla_Y X$ 表示 X 关于 Y 的共变微商，$\|\cdot\|_0$ 和 $\|\cdot\|_1$ 分别称为 $\mathscr{X}$ 的 C^0 模和 C^1 模．$\mathscr{X}$ 就 $\|\cdot\|_1$ 作成一 Banach 空间．又记

$$\mathscr{C} = \bigcup_{x \in M^n} \mathscr{C}_x$$

为 M^n 的切丛，它在 $x \in M^n$ 处的纤维为切空间 $\mathscr{C}_x$．

我们考虑一任给的 $S \in \mathscr{X}$．则 S 导出一 C^1 单参数变换群 $\phi_t: M^n \to M^n (-\infty < t < \infty)$，从而导出 $\mathscr{C}$ 上一单参数变换群

$$\Phi_t = d\phi_t: \mathscr{C} \to \mathscr{C}, -\infty < t < \infty,$$

它是 ϕ_t 的整体线性化（$-\infty < t < \infty$）．

又命 $\mathscr{U}_p$，$\mathscr{F}_p$ 和 $\mathscr{F}_p^\#$ 分别为 M^n 的 p-标架丛，正交 p-标

架丛和正规 p-标架丛，$1 \leqslant p \leqslant n$。对任意的 $\gamma = (u_1, u_2, \cdots, u_p) \in \mathscr{U}_p$，记

$$\mathrm{proj}_k \gamma = u_k, k = 1, 2, \cdots, p.$$

对任意的 $(t, \gamma) = (t, u_1, \cdots, u_p) \in (-\infty, \infty) \times \mathscr{U}_p$，设

$$\Phi_t(\gamma) = (\Phi_t(u_1), \Phi_t(u_2), \cdots, \Phi_t(u_p)) \in \mathscr{U}_p.$$

这给出一单参数变换群

$$\Phi_t: \mathscr{U}_p \to \mathscr{U}_p, -\infty < t < \infty.$$

设 $\pi: \mathscr{U}_p \to \mathscr{F}_p$ 为由通常的 Gram-Schmidt 正交化手续得到的映射。对于 $t \in (-\infty, \infty)$，命 $\chi_t = \pi \circ (\Phi_t | \mathscr{F}_p)$，我们得到一单参数变换群

$$\chi_t: \mathscr{F}_p \to \mathscr{F}_p, -\infty < t < \infty.$$

设 $\pi^{\#}: \mathscr{F}_p \to \mathscr{F}_p^{\#}$ 为由

$$\pi^{\#}(u_1, u_2, \cdots, u_p) = \left(\frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|}, \cdots, \frac{u_p}{\|u_p\|}\right)$$

确定的映射．对于 $t \in (-\infty, \infty)$，记 $\chi_t^{\#} = \pi^{\#} \circ (\chi_t | \mathscr{F}_p^{\#})$，我们得到一单参数变换群

$$\chi_t^{\#}: \mathscr{F}_p^{\#} \to \mathscr{F}_p^{\#}, -\infty < t < \infty.$$

今记 $q^{\#}: \mathscr{F}_p^{\#} \to M^n$ 为丛投射。设 $p = n$。对任一给定的 $\beta \in \mathscr{F}_n^{\#}$ 和每一 $t \in (-\infty, \infty)$，$\chi_t^{\#}(\beta)$ 为线性空间 $\mathscr{C}_{\phi_t(b)}$ 的正规基，其中 $b = q^{\#}(\beta)$．由 $\pi^{\#}$ 的定义，我们可记

$$\Phi_t(\beta) = \chi_t^{\#}(\beta) C_\beta(t),$$

其中 $C_\beta(t)$ 为三角矩阵，其对角元为

$$\mathrm{diag}_k C_\beta(t) = \|\mathrm{proj}_k \chi_t(\beta)\| \neq 0, k = 1, 2, \cdots, n,$$

且对角线下的元为 0，而右边的乘法按惯例为（切向量）行×列．因 S^1 是 C^1 的，易见 $C_\beta(t)$ 关于 t 连续可微．故若设

$$R_\beta(t) = \frac{dC_\beta(t)}{dt} C_\beta(t)^{-1},$$

并考虑 n 维欧氏空间 E^n 中线性系统

$$\frac{dy}{dt} = yR_\beta(t)^{tr}, -\infty < t < \infty, y \in E^n \qquad (R_\beta)$$

的解 $y(t)$ 及 $u=\beta y(0)^{tr}\in\mathscr{C}_b$,则 $y(t)$ 为 $\Phi_t(u)\in\mathscr{C}_{\phi_t(\beta)}$ 关于标架 $\chi_t^{\#}(\beta)\in\mathscr{F}_n^{\#}$ 的坐标,即

$$(\langle\Phi_t(u),\mathrm{proj}_1\chi_t^{\#}(\beta)\rangle,\cdots,\langle\Phi_t(u),\ \mathrm{proj}_n\chi_t^{\#}(\beta)\rangle),$$

且有 $\|\Phi_t(u)\|=\|y(t)\|$。

对于 $p\times p$ 矩阵 C,记

$$\mathrm{Nm}(C)=\sup_{y\in E^p,\|y\|=1}\|yC\|.$$

命题1.1 对于 $\beta\in\mathscr{F}_n^{\#}$,矩阵函数 $R_\beta(0)$ 具有下列性质(i)—(iii):

(i) 它关于 $\beta\in\mathscr{F}_n^{\#}$ 连续且在 $\mathscr{F}_n^{\#}$ 中有界

$$\sup_{\beta\in\mathscr{F}_n^{\#}}\mathrm{Nm}(R_\beta(0))<\infty.$$

(ii) 每个 $R_\beta(0)$ 是三角矩阵,其对角元为

$$\omega_k(\beta)=\mathrm{diag}_k R_\beta(0)=\frac{d\|\mathrm{proj}_k\chi_t(\beta)\|}{dt}\Big|_0,k=1,2,\cdots,n,$$

而对角线下的元为 0。

(iii) $R_{\chi_t^{\#}(\beta)}(0)=R_\beta(0)$ 对 $(t,\beta)\in(-\infty,\infty)\times\mathscr{F}_n^{\#}$。

命题1.2 对任一 $(t,\beta)\in(-\infty,\infty)\times\mathscr{F}_n^{\#}$,

$$\log\|\mathrm{proj}_k\chi_t(\beta)\|=\int_0^t\omega_k(\chi_s^{\#}(\beta))dS,\ k=1,2,\cdots,n.$$

注意,$\mathscr{F}_n^{\#}$ 作为一个空间是紧致且可度量的,而下述图表交换

$$\begin{array}{ccc} M^n & \xrightarrow{\ \phi_t\ } & M^n \\ \uparrow q^{\#} & & \uparrow q^{\#} \\ \mathscr{F}_n^{\#} & \xrightarrow{\ \chi_t^{\#}\ } & \mathscr{F}_n^{\#} \end{array}$$

系统 (R_b) 称为 S 以 β 为基的线性化系统,它通过 β 把对于 $\Phi_t(-\infty<t<\infty)$ 轨道的研究部分地化为对于通常的线性常微分方程组的研究。$\mathscr{F}_n^{\#}$ 上的函数 $\omega_k(\beta)$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 是重要的。我们将看到,对于包含常微系统 S 的一些扰动性质在内的动态特性,从大范围看是同 $\omega_k(\beta)$ 的性质相当紧密地连在一起

的。

例如，在1963年发表的早期论文[1]中我们曾就别的事情引进并研究了函数 $\omega_k(\beta)$ 以及积分

$$\vartheta_k(\mu)=\int_V \omega_k(\beta)d\mu,$$

这里 V 为 $\mathscr{F}^{\#}_{*}$ 的一个在 $\chi^{\#}_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变的非空闭子集，而 μ 为 V 上的一个在 $\chi^{\#}_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变且可通的正规测度. 在这里我们指出，对于任给这样的 μ，通过通常的推理，我们可以在 $q^{\#}(V)$ 上找到一个在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变且可通的正规测度 μ' 使得 μ 通过 $q^{\#}$ 由 μ' 诱导(即对任意 $A\subset q^{\#}(V)$，$\mu(V\cap(q^{\#})^{-1}A)=\mu'(A)$)，而且反之亦然. 我们在[1, §8]中还曾与系统 (R_β) 相联系，并且建立起上面命题1.1和1.2那样的性质。

最近，钱敏教授提醒我注意数 $\vartheta_k(\mu)$ 同后来 Oseledec 的工作[2]之间的联系，这工作进行的方式与我们的很不相同. 然而，考虑到命题1.1和1.2以及上述讨论，则就每个正规不变可通测度来说，我们可得到 S 的特征指数(定义例如见[3，第36页])几乎处处的最简单表示办法，这差不多是显然的事情了。

§2. 典范方程组

重新考虑系统 $S\in\mathscr{R}$ 及如§1中由 S 诱导的变换群 Φ_t，χ_t 和 $\chi^{\#}_t(-\infty<t<\infty)$. 对任给 $\beta\in\mathscr{F}^{\#}_{*}$，我们有映射

$$\mathscr{P}_\beta: E^{n+1}\to M^n,$$

它由

$$\mathscr{P}_\beta(t,y)=\exp\left(\sum_{k=1}^{n} y^k \mathrm{proj}_k \chi^{\#}_t(\beta)\right),$$

$$t\in(-\infty,\infty), y=(y^1,y^2,\cdots,y^n)\in E^n$$

确定，其中 exp 为指数映射：$\mathscr{C}\to M^n$. 因 $\mathrm{proj}_k\chi^{\#}_t(\beta)$，$k=1,2,\cdots,n$，关于 t 连续可微，$\mathscr{P}_\beta$ 为 C^1. 但若对一给定的 t，记

$$\mathscr{P}_{\beta,t}(y)=\mathscr{P}_\beta(t,y),$$

则 $\mathscr{P}_{\beta,t}$ 为一 C^∞ 映射：$E^n \to M^n$. 由 M^n 的紧致性，我们可取一固定的 $\zeta_0 > 0$，使得对所有的 $x \in M^n$, exp 把

$$\mathscr{C}_x = \{u \in \mathscr{C}_x \mid \|u\| < \zeta_0\}$$

微分同胚地映到 M^n 中. 记

$$B_0 = \{y \in E^n \mid \|y\| < \zeta_0\}, \mathscr{L}_0 = (-\infty, \infty) \times B_0.$$

则对于每个给定的 t，存在 B_0 上唯一的切向量场 $\bar{S}_\beta(t,y)$ 和 $\bar{\bar{S}}_\beta(t,y)$，使得

$$d\mathscr{P}_{\beta,t}(\bar{S}_\beta(t,y)) = S(\mathscr{P}_\beta(t,y)),$$

$$d\mathscr{P}_{\beta,t}(\bar{\bar{S}}_\beta(t,y)) = d\mathscr{P}_\beta\left(\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{(t,y)}\right).$$

记 $S_\beta(t,y) = \bar{S}_\beta(t,y) - \bar{\bar{S}}_\beta(t,y)$. 方程组

$$\frac{dy}{dt} = S_\beta(t,y),\ (t,y) \in \mathscr{L}_0, \tag{S_β}$$

称为以 β 为基的 S 的典范组.

定理 2.1 S 的典范方程组具有下列性质 (i)—(iii):

(i) 对于每个 $\beta \in \mathscr{F}^\#_*$, $S_\beta(t,0) = 0$, $S_\beta(t,y)$ 在 $\mathscr{L}_0$ 上连续且关于 y 可微,而

$$\frac{\partial S_\beta(t,y)}{\partial y}$$

在 $\mathscr{L}_0$ 上也连续.

(ii) 若对于 $t \in$ 某个(含 s 的)区间 (t'_y, t''_y), $y_\beta(t; s, y)$ 为 (S_β) 满足 $y_\beta(s;s,y) = y$ 的解,则

$$\mathscr{P}_{\beta,t}(y_\beta(t;s,y)) = \phi_{t-s}(\mathscr{P}_{\beta,s}(y)) \text{ 对 } t \in (t'_y, t''_y).$$

(iii) 当 y 趋于 0 时,

$$\frac{\partial S_\beta(t,y)}{\partial y}$$

关于所有的 $(t,\beta) \in (-\infty,\infty) \times \mathscr{F}^\#_*$ 一致收敛到 $R_\beta(t)$.

我们还考虑 S 的一个任意扰动 $X \in \mathscr{X}$. 如上,对于任给 $t \in (-\infty,\infty)$，存在 B_0 唯一的 C^1 切向量场 $\bar{X}_{(s,\beta)}(t,y)$，或简记为

$\bar{X}_\beta(t,y)$，使得

$$d\mathscr{P}_{\beta,t}(\bar{X}_\beta(t,y)) = X(\mathscr{P}_\beta(t,y)).$$

记 $X_\beta(t,y) = \bar{X}_\beta(t,y) - \bar{S}_\beta(t,y)$。常微系统

$$\frac{dy}{dt} = X_t(t,y) = yR_\beta(t)^{\prime r} + X_{\mathrm{Rem}(\beta)}(t,y),(t,y)\in\mathscr{L}_0, \quad (X_\beta)$$

其中

$$X_{\mathrm{Rem}(\beta)}(t,y) = (\bar{X}_\beta(t,y) - \bar{S}_\beta(t,y)) + (S_\beta(t,y) - yR_\beta(t)^{\prime r}),$$

称为以 β 为基 S 的扰动 X 的典范组。

定理 2.2 S 的扰动典范组具有下列性质。

(i) 对任一 $X\in\mathscr{R}$，$X_{\mathrm{Rem}(\beta)}(t,y)$ 对 $(t,y)\in\mathscr{L}_0$ 连续，且在每个 $(s,u)\in\mathscr{L}_0$ 处满足局部的 Lipschitz 条件。

(ii) 若我们以 $\phi_{Xt}: M^n\to M^n$ $(-\infty<t<\infty)$ 表示由 $X\in\mathscr{R}$ 诱导的 M^n 上的单参数变换群，且若对于 $t\in$ 某个（含 s 的）区间 (s_y', s_y'')，$y_{(X,\beta)}(t;s,y)$ 为 (X_β) 满足 $y_{(X,\beta)}(s;s,y) = y$ 的解，则

$$\mathscr{P}_{\beta,t}(y_{(X,\beta)}(t;s,y)) = \phi_{X(t-s)}(\mathscr{P}_{\beta,s}(y)) \text{ 对 } t\in(s_y', s_y'').$$

§3. 低一维的约化

典范组 (S_β) 和 (X_β) 最初在[4]中引进，其目的是把 $S\in\mathscr{R}$ 的相空间及其扰动性质的研究部分地归结为欧氏空间中的通常的常微系统的研究。但它们在应用上并没有采取最方便的形式。以下我们提出两个更有用的替代形式。

记M 为 S 的所有常点集，它显然是 M^n 中的开集。设

$$\mathscr{D} = \bigcup_{x\in M}\mathscr{D}_x$$

为 S 的共轭丛，该丛的底空间为M且在 $x\in M$处的纤维为 $\mathscr{D}_x = \{u\in\mathscr{C}_x | \langle S(x), u\rangle = 0\}$。 对 每 一 $(t, u)\in(-\infty, \infty)\times$

$\mathscr{D}_x$, 取 ϕ_t 为 $\Phi_t(u)$ 到 $\mathscr{D}_{\phi_t}(x)$ 上的垂直投影. 则由于 $\Phi_t(S(x)) = S(\phi_t(x))$, 我们就得到一单参数变换群

$$\phi_t: \mathscr{D} \to \mathscr{D}, -\infty < t < \infty.$$

ϕ_t 显然把 $\mathscr{D}_x$ 线性地映到 $\mathscr{D}_{\phi_t(x)}$ 上.

我们发现下面的丛也是有用的,即丛

$$\mathscr{E} = \bigcup_{x \in M} \mathscr{E}_x,$$

其底空间为 M, 投射为 $\tau: \mathscr{E} \to M$, 而 $x \in M$ 上纤维 $\mathscr{E}_x$ 由 M 在 x 处满足

$$\langle S(x), \mathrm{proj}_k \gamma \rangle = 0, k = 1, 2, \cdots, n-1$$

的所有正规 $(n-1)$-标架 γ 组成. 设对 x 处标架 γ 置

$$\iota^*(\gamma) = (S(x)/\|S(x)\|, \gamma).$$

则这给出嵌入 $\iota^*: \mathscr{E} \to \mathscr{F}^{\#}_{*}$. 又由 $\Phi_t(S(x)) = S(\phi_t(x))$, 关系式 $\iota^*(\Theta_t(\gamma)) = \chi_t^{\#}\iota^*(\gamma)$ 确定一单参数变换群

$$\Theta_t: \mathscr{E} \to \mathscr{E}, -\infty < t < \infty.$$

对于任给 $\alpha \in \mathscr{E}_a$, $a \in M$ 和 $t \in (-\infty, \infty)$, $\Theta_t(\alpha)$ 可用作线性空间 $\mathscr{D}_{\phi_t(a)}$ 的一个基, 故而若 $u \in \mathscr{D}_a$, $\phi_t(u) \in \mathscr{D}_{\phi_t(a)}$ 关于 $\Theta_t(\alpha)$ 的坐标,即

$$(\langle \phi_t(u), \mathrm{proj}_1 \Theta_t(\alpha) \rangle, \cdots, \langle \phi_t(u), \mathrm{proj}_{n-1} \Theta_t(\alpha) \rangle),$$

在视作 t 的向量函数时,将满足线性系统

$$\frac{dz}{dt} = z\tilde{R}_a(t)^{tr}, -\infty < t < \infty, z \in E^{n-1}, \qquad (\tilde{R}_\alpha)$$

其中 $\tilde{R}_a(t)$ 为三角矩阵,它具有类似于命题 1.1 中关于 $R_\beta(t)$ 的那些性质. 事实上,我们有

$$R_{\iota^*(\alpha)}(t) = \begin{pmatrix} \omega_1(\chi_t^{\#}(\iota^*(\alpha))) & \cdot \\ 0 & \tilde{R}_a(t) \end{pmatrix}.$$

现在考虑 S 的任一扰动 $X \in \mathscr{K}$ 及 B_0 上由上一节给出的向量场 $\bar{X}_\beta(t,y), \bar{S}(t,y)$ 对 $(t,\beta) \in (-\infty,\infty) \times \mathscr{F}^{\#}_{*}$. 我们记

$$\bar{X}_\beta(t,y) = (\bar{X}^1_\beta(t,y), \bar{X}^2_\beta(t,y), \cdots, \bar{X}^n_\beta(t,y)) \in E^n,$$

$$\bar{S}_\beta(t,y) = (\bar{S}^1_\beta(t,y), \bar{S}^2_\beta(t,y), \cdots, \bar{S}^n_\beta(t,y)) \in E^n.$$

对于 M^n 的一个在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变的任意子集 Λ，我们将用记号

$$\mathscr{X}(S,\Lambda) = \{X \in \mathscr{X} \mid \bar{X}^1_{t}*_{(\alpha)}(0,0) > 0 \ \text{对所有}\ \alpha \in \tau^{-1}(\Lambda)\}.$$

易见，当 $X \in \mathscr{X}(S,\Lambda)$ 的奇点 x_0 在 Λ 中时，x_0 亦必为 S 的一个奇点。记

$$\tilde{L} = \{(t,z) \in E^n \mid \|z\| < \zeta_0\},$$

这里 ζ_0 与上一节给出的相同。

现在考虑这任给的 $X \in \mathscr{X}(S,\Lambda)$ 和 $\alpha \in \tau^{-1}(\Lambda)$. 记

$$\tilde{L}_{X,\alpha} = \{(t,z) \in \tilde{L} \mid \bar{X}^1_{t}*_{(\alpha)}(t,0,z) > 0, \bar{\bar{S}}_{t}*_{(\alpha)}(t,0,z) > 0\}.$$

易见 $\tilde{L}_{X,\alpha}$ 为 E^n 的一个含 t 轴的开子集。于是，我们考虑微分方程组

$$\frac{dz}{dt} = \tilde{X}_\alpha(t,z) = z\tilde{R}_\alpha(t)^{tr} + \tilde{X}_{\mathrm{Rem}(\alpha)}(t,z), (t,z) \in \tilde{L}_{X,\alpha}, \quad (\tilde{X}_\alpha)$$

其中 $\tilde{X}_\alpha(t,z)$ 由

$$(0,\tilde{X}_\alpha(t,z)) = \frac{\bar{\bar{S}}^1_{t}*_{(\alpha)}(t,0,z)}{\bar{X}^1_{t}*_{(\alpha)}(t,0,z)} \bar{X}_{t}*_{(\alpha)}(t,0,z)$$
$$- \bar{\bar{S}}_{t}*_{(\alpha)}(t,0,z) \in E^n$$

给出，而 $\tilde{X}_{\mathrm{Rem}(\alpha)}(t,z) = \tilde{X}_\alpha(t,z) - z\tilde{R}_\alpha(t)^{tr}$.

对于 $\alpha \in \mathscr{C}$，设

$$\tilde{\mathscr{P}}_\alpha : (-\infty,\infty) \times E^{n-1} \to M^n$$

为由 $\tilde{\mathscr{P}}_\alpha(t,z) = \mathscr{P}_{t}*_{(\alpha)}(t,0,z)$ 确定的映射。

命题 3.1 设 Λ 为 M^n 的一个在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变的子集。则对任一 $X \in \mathscr{X}(S,\Lambda)$ 和任一 $\alpha \in \tau^{-1}(\Lambda)$，系统 $(\tilde{X}_\alpha)$ 具有下列性质 (i)—(ii):

(i) $\tilde{X}_{\mathrm{Rem}}(\alpha)(t,z)$ 对 $(t,z) \in \tilde{L}_{X,\alpha}$ 连续，在每个 (s,u) 处满足局部 Lipschitz 条件，且关于 z 连续可微；

(ii) 若对 $t \in$ 某个(含 s 的)区间 (s',s''), $z_\alpha(t;s,u)$ 为$(\tilde{X}_\alpha)$ 的一个解使得 $z_\alpha(s;s,u) = u$，则 $\tilde{\mathscr{P}}_\alpha$ 把 $\tilde{L}_{X,\alpha}$ 中曲线 $\{(t,z_\alpha(t;s,u)) \mid t \in (s',s'')\}$ 映为 M^n 中 X 的过 $\tilde{\mathscr{P}}_\alpha(s,u)$ 的部分轨道.

据 $S_\beta(t,y)$ 的上述定义，S 本身在 $\mathscr{X}(S,M^n)$ 中，且对于

$\alpha \in \mathscr{S}$我们总有

$$\tilde{R}_\alpha(t) = \left.\frac{\partial \tilde{S}_\alpha}{\partial z}\right|_{z=0}.$$

定理3.2 假定Λ是M^n的一个在$\phi_t(-\infty < t < \infty)$下不变的闭子集，且不含$S$的奇点。则下面的(i)—(v)成立：

(i) 在$\mathscr{X}$中存在S的一个含于$\mathscr{X}(S, \Lambda)$的C^0邻域$\mathscr{V}$，及存在常数$\eta > 0$，使得对所有的$X \in \mathscr{V}$和所有的$\alpha \in \tau^{-1}(\Lambda)$，$\tilde{L}_{X,\alpha}$总包含集

$$J(\Lambda, \eta) = (-\infty, \infty) \times K,$$

其中$K = \{z \in E^{n-1} \mid \|z\| \leqslant \eta\}$；换句话说，系统$(\tilde{X}_\alpha)$在$J(\Lambda, \eta)$上总有定义；

(ii) 对任给$\mu > 0$和$\zeta > 0$，在$\mathscr{X}$中存在S的一个含于$\mathscr{V}$中的C^0邻域$\mathscr{W}_0$，及存在满足$\xi_0 < \zeta$的常数$\xi_0 > 0$，使得对所有的$X \in \mathscr{W}_0$和所有满足$\|z\| \leqslant \zeta$的$(t, z, \alpha) \in J(\Lambda, \eta) \times \tau^{-1}(\Lambda)$，我们有

$$\|X_{\mathrm{Rem}(\alpha)}(t, z)\| < \mu\xi_0;$$

(iii) 对于任给$X \in \mathscr{V}$，存在$J(\Lambda, \eta)$上的Lipschitz常数λ_X，使得

$$\|X_{\mathrm{Rem}(\alpha)}(t, z) - X_{\mathrm{Rem}(\alpha)}(t, z')\| \leqslant \lambda_X \|z - z'\|,$$

对所有的z和$z' \in K$，及$\alpha \in \tau^{-1}(\Lambda)$；

(iv) 对于任给$\lambda > 0$，在$\mathscr{X}$中存在S的一个含于$\mathscr{V}$中的C^1邻域W_1，及存在$\xi_1 > 0$，使得对所有的$X \in W_1$和所有满足$\|z\| < \xi_1, \|z'\| < \xi_1$的$(t, z, \alpha), (t, z', \alpha) \in J(\Lambda, \eta) \times \tau^{-1}(\Lambda)$，我们有

$$\|\tilde{X}_{\mathrm{Rem}(\alpha)}(t, z) - \tilde{X}_{\mathrm{Rem}(\alpha)}(t, z')\| \leqslant \lambda \|z - z'\|;$$

(v) 当$z \in K$趋于0时，

$$\frac{\partial \tilde{S}_\alpha(t, z)}{\partial z}$$

关于所有的$(t, \alpha) \in (-\infty, \infty) \times \tau^{-1}(\Lambda)$一致收敛于$\tilde{R}_\alpha(t)$。

这里我们注意，由$\mathscr{X}$的C^0和C^1模的定义(见§1)，$\mathscr{X}$中S

的 C^0 邻域也是 S 的一个 C^1 邻域。

然而，上面定理中的许多论断仅对闭集 A 不含 S 的奇点的情况有效。在 A 作为 M^n 的任一个不变子集其闭包可含 S 的奇点时，我们想，满足于如上（i）中一致性质的数 η 会不存在。克服这种阻力的一种方式是作变量变换 $z \to \|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|z$. 则系统$(\widetilde{X}_\alpha)$ 变为

$$\frac{dz}{dt}=X^*_\alpha(t,z),(t,z)\in L^*_{X,\alpha}, \qquad (X^*_\alpha)$$

其中

$$X^*_\alpha(t,z)=\frac{\widetilde{X}_\alpha(t,\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|z)}{\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|}-\omega_1(t^*\Theta_t(\alpha))z,$$

$$L^*_{X,\alpha}=\{(t,z)\in E^n\,|\,(t,\|S(\phi_t(\tau(\alpha)))\|z)\in\widetilde{L}_{X,\alpha}\}.$$

我们记

$$R^*_\alpha(t)=\widetilde{R}_\alpha(t)-\omega_1(t^*\Theta_t(\alpha))I_{n-1},$$

这里 $I_p=p\times p$ 恒等矩阵.

特别是考虑 $S\in\mathscr{R}(S,M^n)$.

定理 3.3 存在常数 $\zeta^*>0$ 使得对所有的 $\alpha\in\mathscr{E}$，集合

$$J(M^n,\zeta^*)=(-\infty,\infty)\times\{z\in E^{n-1}\,|\,\|z\|\leqslant\zeta^*\}$$

含于 $L^*_{S,\alpha}$ 中. 换句话说，(S^*_α) 对所有的 $\alpha\in\mathscr{E}$ 在 $J(M^n,\zeta^*)$ 上有定义. 当 z 趋于 0 时，

$$\frac{\partial S^*_\alpha(t,z)}{\partial z}$$

关于所有的 $(t,\alpha)\in(-\infty,\infty)\times\mathscr{E}$ 一致收敛于 $R^*_\alpha(t)$.

在 [4] 中曾就 M^n 上的 C^1 常微系统引进并研究从 (S_β) 到 $(\widetilde{X}^*_\alpha)$ 的典范组. 但在[5]中就 M^n 上的 C^2 常微系统对于从$(\widetilde{S}_\alpha)$ 到(S^*_α)的典范组所作的研究是以一种稍许不同的方式进行的.减弱可微性假设和其他一些假定，这种可能性的基础是在定理 2.1 中. 因此这个定理是基本的. 有关本课题包含上述诸定理的证明在内的一些细节，读者可参看[4].

§4. 应 用 例 子

这样我们看到，通过运用典范组，通常在欧氏空间中的常微分方程理论对于研究流形上常微系统的某些整体性质仍可能提供一种很合适的工具，虽然对于后者，有来自包括泛函分析和微分拓扑在内的数学领域的许多现代化技巧(例如见[6]或[7]中所示)已被用来解决当今的问题，并且已引起我们的关注。

例如，Pugh[8] 的 C^1 封闭性引理陈述，若 a 为 $S\in\mathscr{X}$ 的一个非游荡常点，则对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 S 的一个扰动 $X\in\mathscr{X}$ 使得 X 有一条过 a 的周期轨道且 $\|X-S\|_1<\varepsilon$。在用典范组的方法通过一种容易的线性化手续来证明[9]这个重要结果时，我们单纯地去考虑线性系统：

$$\frac{dy}{dt}=yP(t),0\leqslant t<\infty,y\in E^p \qquad (*)$$

($p\times p$ 矩阵 $P(t)$ 对 t 连续)，并且给出下面定理 4.1 的证明，其中 $Y^*(t)$ 为矩阵方程 $dY/dt=YP(t),P(0)=I_p$ 的解，而对于任给的 $b\in E^p$ 和 $0<\xi<\infty,B^p(b,\xi)$ 表示集合。

$$B^p(b,\xi)=\left\{y\in E^p\ \Big|\ \left\|y-\frac{b}{2}\right\|\leqslant(1+\xi)\frac{\|b\|}{2}\right\}.$$

定理 4.1 相应于系统($*$)及任意给定的 $\delta>0$ 和 $\xi>0$，存在 $T>\delta'>0,\lambda>0$ 和一个正则线性变换 $\varphi:E^p\to E^p$ 使得当 $w\in E^p$ 时，存在($*$)的一个扰动系统。

$$\frac{dy}{dt}=yP(t)+f_w(t,y),(t,y)\in(0,\infty)\times E^p$$

满足下列条件 (i)—(iii)：

(i) $f_w(t,y)\in E^p$ 关于 (t,y) 是 C^1 的，且

$$Nm\left(\frac{\partial f_w(t,y)}{\partial y}\right)<\delta,$$

$$\|f_w(t,y)\|+\left\|\frac{df_w(t,y)}{dt}\right\|\leqslant\lambda\|w\|$$

对所有的 $(t,y)\in\langle 0,T\rangle\times E^p$;

(ii) 该扰动系统有解 $y_w^*(t)$, $0\leqslant t<\infty$, 使得 $y_w^*(0)=0$, $y_w^*(T)=wY^*(T)$;

(iii) $f_w(t,y)$ 在下面集合之外为零

$$\{(t,y)\in\langle 0,\infty)\times E^p\,|\,\delta'\leqslant t\leqslant T,$$
$$y=y'Y^*(t)\text{对}y'\in\varphi^{-1}B^p(\varphi(w);\xi)\}.$$

本定理仅对线性系统而言。但要给出证明当然仍非象它初看起来那样很平凡。

作为典范组应用的另一个例子，我们只来考虑 S 的一个双曲集。正如最早在 Smale 的著名的综合报告[10]中那样，双曲性曾被认为是微分动力学理论中最重要的概念之一。设 A 是 M^n 的一个闭子集，它在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$下不变且不含 S 的奇点。正如能容易证明的那样，以通常的方式[10]说 A 是 S 的一个双曲集(或者也可说成是 S 在 A 上有双曲结构)，在用上一节给出的单参数变换群$\Theta_t(-\infty<t<\infty)$来说时，它等价于存在常数$d_A>0$和$\xi_A>0$，及在每个 $x\in A$ 处有 $\alpha_x\in\mathscr{E}_x$，使得当 $d_A\leqslant T<\infty$ 时，

$$\frac{1}{T}\int_0^T\omega_{k+1}(\iota^*\Theta_{s+t}(\alpha_x))dt$$

或者 $\leqslant-\xi_A$ 对所有的 $s\in(-\infty,\infty)$，或者 $\geqslant\xi_A$ 对所有的 $s\in(-\infty,\infty)$, $k=1,2,\cdots,n-1$.

S 在一个双曲集 A 上，特别地对于 Anosov S 在 $A=M^n$ 上是结构稳定的，这是一个周知的事实。在这方面 Anosov[11]，Moser[12] 和 Robinson[13] 曾运用稳定流形性质、泛函分析技巧和 ε-链性质这些不同的方法给出各种不同的证明。但在这里可以使我们感兴趣的是如何运用典范组进行证明。为此，根据上面的讨论并遵循 [4, §4]，我们主要被引导到考虑下面这种微分方程组族 $H_p(\eta,\bar\eta,\bar\rho)$，即

$$\frac{dz}{dt}=zA(t)+f(t,z),-\infty<t\infty,z\in E^p\qquad(**)$$

它关于某些数 $\eta>0$, $\bar\eta>0$ 和 $\bar\rho>0$，满足下列条件 (I)—

(III):

(I) $A(t)$ 为 $p\times p$ 三角矩阵，其对角线上的元为 0，对 t 连续且

$$\sup_{t\in(-\infty,\infty)} Nm(A(t))\leqslant\eta;$$

(II) $f(t,z)$ 对 (t,z) 连续及

$$\sup_{(t,z)\in(-\infty,\infty)\times E^p}\|f(t,z)\|\leqslant\bar{\eta},$$

而且 $f(t,z)$ 有一Lipschitz 常数 λ_f

$$\|f(t,z)-f(t,z')\|\leqslant\lambda_f\|z-z'\| \text{ 对所有的 } z,z'\in E^p;$$

(III) 对 $\sigma_k(s,t)=\exp\int_s^t \operatorname{diag}_k A(\theta)d\theta(k=1,2,\cdots,p)$ 且对其个 $r=(r_1,r_2,\cdots,r_p)$ 及 $r_k=\pm\infty$，按 $r_k=-\infty$ 或 $=\infty$ 有

$$\int_{r_k}^t \sigma_k(s,t)ds<\infty \text{ 或 } =-\int_t^{r_k}\sigma_k(s,t)ds>-\infty;$$

又有

$$\sup_{t\in(-\infty,\infty)}\sum_{k=1}^p\left|\int_{r_k}^t \sigma_k(s,t)ds\right|\leqslant\bar{\rho}.$$

我们仍考虑线性系统

$$\frac{dz}{dt}=zA(t),-\infty<t<\infty,z\in E^p. \qquad (\overline{**})$$

记 $z(t,u)$ 和 $\bar{z}(t,u)$ 分别为(＊＊)和$(\overline{＊＊})$ 满足 $z(0,u)=u=\bar{z}(0,u)$ 的解.

为了观察(＊＊)和$(\overline{＊＊})$的相空间之间的一些关系，我们记 $E_k(s,t)$ 为 $p\times p$ 对角矩阵，使 $\operatorname{diag}_j E_k(s,t)=\delta_{jk}\sigma_k(s,t)(j=1,2,\cdots,k)$. 又记 $A(t)=A^{(0)}(t)+A^{(1)}(t)$，其中对每个 t，$A^{(0)}(t)$ 是使 $\operatorname{diag}_j A^{(0)}(t)=\operatorname{diag}_j A(t)$的对角矩阵，而 $A^{(1)}(t)=A(t)-A^{(0)}(t)$. 于是对每个 $u\in E^p$，考虑赋范线性空间 $L(p)$ 中的算子

$$J_u(\xi(t))=\sum_{k=1}^p\int_{r_k}^t(\xi(s)A^{(1)}(s)+f(s,z(s,u)))E_k(s,t)ds,$$

这 $L(p)$ 由所有 $(-\infty, \infty)$ 上，取值在 E^p 中的有界连续函数 $\xi(t)$ 组成，模取为 $\sup_{t\in(-\infty,\infty)}|\xi(t)|$。

我们最初曾在[4,§3]中证明下面定理（作为某些更一般性定理的特殊情况）。

定理 4.2 设微分方程组(＊＊)如上给定，则

(i) 对每个 $u\in E^p$ 存在唯一的 $F(u)\in E^p$ 使得

$$\sup_{t\in(-\infty,\infty)}\|\bar{z}(t,F(u))-z(t,u)\|<\infty,$$

且 $u\longmapsto F(u)$ 给出一满映射：$E^p\to E^p$。

(ii) 对每个 $u\in E^p$ 存在唯一的 $\xi(t, u)\in L(p)$ 满足方程 $\xi(t,u)=J_u(\xi(t,u))$，而

$$\bar{z}(t,F(u))=z(t,u)-\xi(t,u).$$

(iii) $\|\bar{z}(t, F(u))-z(t, u)\|\leqslant \bar{\sigma}\eta(1+2\eta\bar{\rho})^p$ 对所有的 $(t,u)\in(-\infty,\infty)\times E^p$。

(iv) 若 $f(t,z)$ 有一 Lipschitz 常数

$$\lambda_f<\frac{1}{\bar{\rho}(1+2\eta\bar{\rho})^p},$$

则 F 为一拓扑映射。

证明是简单的。例如，(ii) 中 $\xi(t,u)$ 能表成

$$\xi(t,u)=\sum_{k=1}^{p}\xi^k(t,u),$$

其中 $\xi^k(t,u)$ 由下式归纳地定义：

$$\xi^p(t,u)=\int_{\tau_p}^{t} f(\theta,z(\theta,u))E_p(\theta,t)d\theta,$$

$$\xi^k(t,u)=\int_{\tau_k}^{t}\Big(\sum_{j=k+1}^{p}\xi^j(\theta,u)A^{(1)}(\theta)+f(\theta,z(\theta,u))\Big)$$

$$\times E_k(\theta,t)d\theta,k=p-1,p-2,\cdots,1.$$

对 $\xi(t,u)=J_u(\xi(t,u))$ 两边求导数证得 $z(t,u)-\xi(t,u)$ 满足 $(\overline{**})$.本定理的其余断言也可容易验证。

在[4,§4]中(＊＊)类微分方程组用于导出 Anosov $S\in\mathscr{R}$ 的半稳定性性质，而同样的结果也曾由 Kato-Morimoto[14] 通过不同

的途径得到。事实上，典范方程组的运用将贯穿于我们整个工作中，对此，我们在本报告的其余部分不再更多提及。

§5. 常微系统族$\mathscr{X}^*$

为以后方便起见，我们在这一节插入关于 $\mathscr{X}=\mathscr{X}(M^n)$ 中一个常微系统族的评述。这是由所有满足下面条件的 $X\in\mathscr{X}$ 组成的族 $\mathscr{X}^*=\mathscr{X}^*(M^n)$: X 有一 C^1 邻域 $\mathscr{U}$ 使得每个 $Y\in\mathscr{U}$ 的所有奇点和所有(不同于奇点的)周期轨道都是双曲的（或等价地，$\mathscr{U}$ 中每个 Y 只有有限个奇点和至多可数个周期轨道）.显然，$\mathscr{X}^*$ 在 $\mathscr{X}$ 中关于 $\mathscr{X}$ 的 C^1 模(见 §1)为开的。族 $\mathscr{X}^*$ 的重要性至少在于，部分地由于 Kupka-Smale 定理(见[10，第804 页])，它包含 $\mathscr{X}$ 的所有 Ω 稳定，从而所有结构稳定（两者都对 C^1 扰动来说)的常微系统 $\in\mathscr{X}$。故它可作为研究稳定性问题的一种中间工具。

再考虑由 $S\in\mathscr{X}$ 在其共轭丛 $\mathscr{D}$ 上诱导的单参数变换群 ϕ_t: $\mathscr{D}\to\mathscr{D}(-\infty<t<\infty)$（见§3)。对每个 $x\in M$，记

$$D_-(x)=\{u\in\mathscr{D}_x\,|\lim_{t\to\infty}\|\phi_t(u)\|=0\},$$

$$D_+(x)=\{u\in\mathscr{D}_x\,|\lim_{t\to-\infty}\|\phi_t(u)\|=0\}.$$

这些是 $\mathscr{D}_x$ 的线性子空间，并且 $\phi_t(D_-(x))=D_-(\phi_t(x))$, $\phi_t(D_+(x))=D_+(\phi_t(x))$。显然，当 $S\in\mathscr{X}^*$ 且 x 为 S 的周期轨道上的点时 $\mathscr{D}_x=D_-(x)\oplus D_+(x)$.

对每个给定的 $X\in M$ 和 $0\leqslant t<+\infty$，记

$$\eta_-(t,x)=\begin{cases}\sup_{u\in D_-(x),\|u\|=1}\log\|\phi_t(u)\|, & \text{当}\ \dim D^-(x)\geqslant 1\ \text{时},\\ -\infty, & \text{当}\ \dim D_-(x)=0\ \text{时},\end{cases}$$

$$\eta_+(t,x)=\begin{cases}\inf_{u\in D_+(x),\|u\|=1}\log\|\phi_t(u)\|, & \text{当}\ \dim D_+(x)\geqslant 1\ \text{时},\\ \infty, & \text{当}\ \dim D_+(x)=0\ \text{时}.\end{cases}$$

定理 5.1 存在 $\mathscr{X}^*$的一个开覆盖 $\mathscr{B}$，及相应于每个$H\in\mathscr{B}$，存在数 $\eta_H>0$ 和 $T_H>0$，使得：若 $V\in\mathscr{B}$ 和 $S\in V$，则

(i) 当 x 为 S 的周期轨道上的点且 $T_V\leqslant t<\infty$ 时，有

$$\frac{1}{t}(\eta_+(t,x)-\eta_-(t,x))\geqslant 2\eta_V.$$

(ii) 当 P 是 S 的具有周期 T_0 的周期轨道，$x\in P$，且

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_m=T$$

是〈0,T〉的一个满足

$$t_k-t_{k-1}\geqslant T_V,\ k=1,2,\cdots,m$$

的划分时，有

$$\frac{1}{T_0}\sum_{k=1}^{m}\eta_-(t_k-t_{k-1},\phi_{t_{k-1}}(x))\leqslant-\eta_V,$$

$$\frac{1}{T_0}\sum_{k=1}^{m}\eta_+(t_k-t_{k-1},\phi_{t_{k-1}}(x))\geqslant\eta_V.$$

该定理的证明在[15]中。但其中的叙述(i)早先曾由 Mañé[16] 对一特殊情形给出，即 M^* 上微分同胚生成的离散动力系统(通过通常的扭扩技巧看作由常微系统生成的连续流的特殊情形)。叙述(ii) 对同样特殊情形的一个证明，新近也由 Mañé[17] 给出（其确切的叙述见[17,命题 II. 1-(a)]）。

虽然我们有定理 5.1，但正如 Guckenheimer[18] 的一个例子所表明的，$\mathscr{K}^*$ 中的系统在其非游荡集上可以没有双曲结构。

但下面的定理成立。

定理 5.2 若 $S\in\mathscr{K}^*$，则它仅有有限个正向或负向可缩的周期轨道。

在 $S\in\mathscr{K}^*$ 情形，任一这样的可缩周期轨道 P 可通过性质：对 $x\in P$，$\dim D_-(x)=0$ 或 $\dim D_+(x)=0$ 来刻划。这个定理的一个证明，在[19]中是在 S 的奇点集孤立于非游荡集 $\Omega(S)$ 的其余部分这种特殊情形下给出的。一个仍然更加特殊的情形早先曾由 Pliss[20] 给出。

§6. 阻 碍 集

我们上面的讨论，实际上，主要是处理当给定的常微系统出现

小扰动时，一条轨道的性态是如何改变的问题。为抓住一组轨道的整体性态，我们曾在[21]中引进常微系统 $\in \mathscr{X}$ 的阻碍集的概念。

设 $S\in\mathscr{X}$ 给定，它所诱导的单参数变换群 $\phi_t:\mathscr{D}\to\mathscr{D}$ 已如上叙，我们定义另一个单参数变换群

$$\Psi_t:\mathscr{D}\to\mathscr{D},\quad -\infty<t<\infty$$

如下。对每个 $u\in\mathscr{D}_x$ ($x\in M$)，用 $\circledast u$ 表示 $\mathscr{D}_x$ 的所有与 u 正交的向量组成的线性子空间。因 $\phi_t(\circledast u)$ 为 $\mathscr{D}_{\phi_t}(x)$ 的线性子空间，存在唯一的与 $\phi_t(\circledast u)$ 正交的 $\Psi_t(u)\in\mathscr{D}_{\phi_t}(x)$ 使得 $\phi_t(u)-\Psi_t(u)\in\phi_t(\circledast u)$。这给出变换群 $\Psi_t(-\infty<t<\infty)$。

设 $\mathscr{D}^*$ 为 $\mathscr{D}$ 在 $\mathscr{C}$ 中的闭包。则上述变换群唯一地扩充到一单参数变换群(仍记作)

$$\Psi_t:\mathscr{D}^*\to\mathscr{D}^*,\quad -\infty<t<\infty.$$

这通过运用下列事实可容易看出：若 $u\in\mathscr{D}_x$ 使 $\|u\|\neq 0$，我们取任意 $\gamma\in\mathscr{F}_n$ 使 $u=\mathrm{proj}_n\gamma$，则总有 $\Psi_t(u)=\mathrm{proj}_n\chi_t(\gamma)$(这里 $\chi_t:\mathscr{F}_n\to\mathscr{F}_n$ 在 §1 中给出)。

类似地，若我们设 $\tilde{\mathscr{D}}=\{u\in\mathscr{D}^*\,|\,\|u\|=1\}$ 并命

$$\tilde{\omega}(u)=\omega_n(\gamma)\ \text{对}\ u\in\tilde{\mathscr{D}},$$

其中 $\gamma\in\mathscr{F}_n^\#$ 且 $u=\mathrm{proj}_n\gamma\in\tilde{\mathscr{D}}$，则 $\tilde{\omega}(u)$ 的确定与这样的 γ 的选择无关。因而由此得出 $\tilde{\omega}(u)$ 是紧致可度量空间 $\tilde{\mathscr{D}}$ 上的连续函数。

还存在一单参数群

$$\tilde{\Psi}_t:\tilde{\mathscr{D}}\to\tilde{\mathscr{D}},\quad -\infty<t<\infty,$$

使得 $\|\Psi_t(u)\|\tilde{\Psi}_t(u)=\Psi_t(u)$ 对 $(t,u)\in(-\infty,\infty)\times\tilde{\mathscr{D}}$。故由命题 1.2 知

$$\log\|\Psi_t(u)\|=\int_0^t\tilde{\omega}(\tilde{\Psi}_s(u))ds$$

对所有 $(t,u)\in(-\infty,\infty)\times\tilde{\mathscr{D}}$。

S 的阻碍集 $Ob(S)$ 定义为

$$Ob(S)=\{x\in M^*\,|\,\exists u\in\mathscr{D}^*\cap\mathscr{C}_x\ \text{使得}$$

$$\|u\| = 1 = \inf_{t\in(-\infty,\infty)}\|\Psi_t(u)\|\}.$$

由变换群 $\Psi_t(-\infty < t < \infty)$ 的连续性质我们容易看出 $Ob(S)$ 是 M^* 的闭子集。

用 $I(S)$ 表示 M^* 中 S 的所有奇点集的内部。下列简单的命题会是有趣味的。

命题 6.1 S 的奇点 x_0 不在 $I(S)\cup Ob(S)$ 中当且仅当 x_0 是双曲的。

命题 6.2 S 的周期轨道是双曲的当且仅当 $P\cap Ob(S) = 0$。

更一般地，考虑 M^* 的在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变的闭子集 Λ，我们称 S 在 Λ 上满足线性横截性条件，如果对每个 $x\in\Lambda$，每个 $u\in\mathscr{C}_x$ 是和

$$u = u_- + \lambda_u S(x) + u_+,$$

其中 $\lambda_u\in(-\infty,\infty)$，$u_-$ 和 $u_+\in\mathscr{C}_x$ 使

$$\lim_{t\to\infty}\|\Phi_t(u_-)\| = 0,\quad \lim_{t\to-\infty}\|\Phi_t(u_+)\| = 0,$$

而且，若 $\Lambda = M^*$，我们就称 S 满足线性横截性条件。

定理 6.3 $S\in\mathscr{X}$ 在 M^* 中 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$下不变的闭子集 Λ 上满足线性横截性条件当且仅当

$$\Lambda\cap(I(S)\cup Ob(S)) = 0.$$

线性横截性条件的概念在 [21] 中曾以“强横截性”的名称提出，它是 Robbin (见[22，第471页])最初为微分同胚生成的离散动力系统而引进的一相应概念的推广.在[22，第471页]中曾对 M^*上公理 A 微分同胚指出线性横截性和强横截性 (在 Smale 意义下，它是指稳定和不稳定流形总横截相交) 二者是等价的条件. 我们曾在[21，§1]一脚注中指出，对于常微系统的类似提法也成立。在[21，§3]中我们叙述了下面的

定理 6.4 若 S 满足线性横截性条件，则它也满足公理 A。

这定理在由 M^* 上微分同胚生成的离散动力系情形，Mañé[23] 也曾得到过. 另一方面，仍更一般的定理是下面的定理 6.5，其证明在[24]和[25]中完成，对于 M^* 中在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不

变的闭子集 Λ，记 Ω_Λ 为 $\phi_t|\Lambda(-\infty<t<\infty)$ 的非游荡集，简记 $\tilde{\Omega}$ 为 S 的所有奇点及所有周期轨道上点的集合。

定理 6.5 若 S 在 M^n 中一个 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变的闭子集 Λ 上满足线性横截性条件，则 S 在 Ω_Λ 上有双曲结构，且 Ω_Λ 的每一点为 $\tilde{\Omega}$ 的闭包点。

使 $\Lambda\cap(I(S)\cup Ob(S))=0$ 的 M^n 中闭不变子集 Λ 有许多有趣的性质，我们曾在[21]中提出并在[24]中作出详细证明，其中下面的定理 6.6 是基本的。我们用记号

$$E_-=\left\{u\in\tilde{\mathscr{D}}\;\middle|\;\overline{\lim_{t\to\infty}}\int_0^t\tilde{\omega}(\tilde{\Psi}_s(u))ds<0\text{ 及 }\right.$$

$$\left.\underline{\lim_{t\to-\infty}}\int_0^t\tilde{\omega}(\tilde{\Psi}_s(u))ds>0\right\},$$

$$E_+=\left\{u\in\tilde{\mathscr{D}}\;\middle|\;\underline{\lim_{t\to\infty}}\int_0^t\tilde{\omega}(\tilde{\Psi}_s(u))ds>0\text{ 及 }\right.$$

$$\left.\overline{\lim_{t\to-\infty}}\int_0^t\tilde{\omega}(\tilde{\Psi}_s(u))ds<0\right\},$$

$$E_0=\left\{u\in\tilde{\mathscr{D}}\;\middle|\;\overline{\lim_{t\to\infty}}\int_0^t\tilde{\omega}(\tilde{\Psi}_s(u))ds<0\text{ 及 }\right.$$

$$\left.\overline{\lim_{t\to-\infty}}\int_0^t\tilde{\omega}(\tilde{\Psi}_s(u))ds<0\right\}.$$

定理 6.6 设 Λ 为 M^n 中一在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变的闭子集使得

$$\Lambda\cap Ob(S)=0,$$

则下列 (i)—(iv) 成立：

(i) 子集 $\pi(\Lambda)=\{u\in\tilde{\mathscr{D}}|u\in\mathscr{C}_x\text{ 且 }x\in\Lambda\}$ 是下三个互不相交的子集之并，

$$\pi_-(\Lambda)=\pi(\Lambda)\cap E_-,\quad\pi_+(\Lambda)=\pi(\Lambda)\cap E_+,$$

$$\pi_0(\Lambda)=\pi(\Lambda)\cap E_0,$$

其中每一个都在 $\tilde{\Psi}(-\infty<t<\infty)$ 下不变；

(ii) $\pi_-(\Lambda)$ 和 $\pi_+(\Lambda)$ 在 $\pi(\Lambda)$ 中为闭，而 $\pi_0(\Lambda)$ 在 $\pi(\Lambda)$ 中为开；

(iii) 存在 $\pi(\Lambda)$ 的一闭子集 $\pi^*(\Lambda)$，形成 $\pi_0(\Lambda)$ 的一个截

面,即 $\tilde{\Psi}(t,u)=\tilde{\Psi}_t(u)$ 对 $(t,u)\in(-\infty,\infty)\times\pi^*(\Lambda)$ 给出 $(-\infty,\infty)\times\pi^*(\Lambda)$ 到 $\pi_0(\Lambda)$ 上的拓扑映射;

(iv) 存在常数 $\eta_\Lambda<0$ 和 $d_\Lambda>0$ 使得

$$\int_0^T \tilde{\omega}(\tilde{\Psi}_t(u))dt<\begin{cases}\eta_\Lambda T & \text{对所有 } u\in\pi_-(\Lambda) \text{ 和 } T\geqslant d_\Lambda,\\ -\eta_\Lambda T & \text{对所有 } u\in\pi_+(\Lambda) \text{ 和 } T\leqslant -d_\Lambda,\end{cases}$$

$$\int_0^T \tilde{\omega}(\tilde{\Psi}_{S+t}(u))dt<\begin{cases}\eta_\Lambda T & \text{对所有 } u\in\pi^*(\Lambda),\ S\geqslant 0 \text{ 和 } T\geqslant d_\Lambda,\\ -\eta_\Lambda T & \text{对所有 } u\in\pi^*(\Lambda), S\leqslant 0 \text{ 和 } T\leqslant -d_\Lambda.\end{cases}$$

§7. 简单与非简单极小歧变集

鉴于我们上面的讨论,可以说,条件 $I(S)\cup Ob(S)=0$ 实质上不是别的,只是对公理A加上强横截性作交替的描述,因而前者并不象以前所期望的那样引起更多的兴味。但是我们能够辩论说,使用阻碍集的好处在于使我们能考虑如同[26]中定义的所谓极小歧变集,而如果只利用公理A和强横截性条件就显然不能做这同样的事情。

M^n 的子集 Λ 称为 S 的歧变集,如果它是 M^n 中在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变的闭集,且 $\Lambda\cap Ob(S)\neq 0$。歧变集称为极小的,如果它不含真歧变集。

通过运用 Brouwer 简约定理,S 的每个歧变集至少含一极小歧变集,这一点是清楚的。由 §6 中的定理,若 Λ 是 S 的极小歧变集,则 Λ 的每个非空真闭不变子集含一非空双曲闭不变子集,这一点也是明显的。

S 的极小歧变集 Λ 称为是简单的,如果或者(1)Λ 不含 S 的常点,或者 (2)$\Lambda\cap Ob(S)$ 至少包含 S 的一个常点 a 使得轨道 $P_a=\{\phi_t(a)|t\in(-\infty,\infty)\}$ 的 α 极限集和 ω 极限集都是 Λ 的真子集.不然的话,极小歧变集就称为非简单的。

因此,若 Λ 为 S 的满足(1)的简单极小歧变集,则 Λ 由一个奇点组成,它是 S 的一个非双曲奇点。若 Λ 为 S 的非简单极小歧变集,则非空集 $\Lambda\cap Ob(S)$ 不含 S 的奇点,且 $\Lambda\cap Ob(S)$ 的每个点

是正向或负向 Poisson 稳定的。

简单极小歧变集的结构正如 [26, §3] 中的一个定理所指出的：在相空间中它有一个颇为良好的图象，即

定理 7.1 设 Λ 为 S 的一简单极小歧变集。则 Λ 由一个奇点 a 组成当且仅当 a 是 S 的一个非双曲奇点 $\in \Lambda$。设 Λ 含多于一点。则存在具有下列性质 (i)—(v) 的常点 $a \in \Lambda \cap Ob(S)$:

(i) 在轨道 $P_a = \{\phi_t(u) | t \in (-\infty, \infty)\}$ 的 ω 极限集 Γ_a 及 P_a 的 α 极限集 Γ'_a 上 S 有双曲结构;

(ii) $\Lambda = P_a \cup \Gamma_a \cup \Gamma'_a$, $(\Gamma_a \cup \Gamma'_a) \cap Ob(S) = 0$，而 $\Lambda \cap Ob(S)$ 包含在有限轨弧 $\subset P_a$ 中;

(iii) $\dim(D_-(a) + D_+(a)) < n - 1$，进而

$$\dim((\circledast D_-(a)) \cap (\circledast D_+(a))) \geqslant 1,$$

其中 $\circledast K = \bigcap_{u \in K}(\circledast u)$ 对 $K \subset \mathscr{D}_a$;

(iv) Γ_a 或者由 S 的一个奇点组成，或者 $\subset M$。在后一种情形，存在 $\mu < 0$ 和 $d > 0$ 使得

$$\|\phi_{s+t}(u)\| \leqslant \|\phi_s(u)\| \exp(\mu t) \text{ 对 } u \in D_-(a),$$
$$s \geqslant 0 \text{ 和 } t \geqslant d,$$

$$\|\phi_{s+t}(u)\| \geqslant \|\phi_s(u)\| \exp(-\mu t) \text{ 对 } u \in \circledast D_-(a), \ s \geqslant 0$$
$$\text{和 } t \geqslant d,$$

而且，$\dim D_-(x) = \dim D_-(a)$ 对 $x \in \Gamma_a$;

(v) Γ'_a 或者由 S 的一个奇点组成，或者 $\subset M$。在后一种情形，存在 $\mu' < 0$ 和 $d' > 0$ 使得

$$\|\phi_{s+t}(u)\| \leqslant \|\phi_s(u)\| \exp(-\mu' t) \text{ 对 } u \in D_+(a), \ s \leqslant 0 \text{ 和}$$
$$t \leqslant -d',$$

$$\|\phi_{s+t}(u)\| \geqslant \|\phi_s(u)\| \exp(\mu' t) \text{ 对 } u \in \circledast D_+(a), \ s \leqslant 0$$
$$\text{和 } t \leqslant -d',$$

而且，$\dim D_-(x) = \dim(\circledast D_+(a))$ 对 $x \in \Gamma'_a$。

作为本定理和 Kupka-Smale 定理(见[10, 第804页])的一个简易应用，S 的一个适当小的 C^1 扰动表明，若 S 是结构稳定的，则

不能有 S 的简单极小歧变集。

我们没有理由指望每个非简单极小歧变集在相空间中一般还具有较为简单的结构。但是，在[26，§5]中证得的下述定理 7.2 揭示出某种意义。

对 $X\in\mathscr{X}$ 的任一轨道 Q，我们记 $\mathrm{Ind}_X(Q)$ 为 $\mathscr{C}_a$，$a\in Q$ 的线性子空间

$$\left\{u\in\mathscr{C}_a\,\middle|\,\lim_{t\to\infty}\|\Phi_{X_t}(u)\|=0\right\}$$

的维数，其中 $\Phi_{X_t}=d\phi_{X_t}$，而 ϕ_{X_t} 为由 X 诱导的 M^n 上的单参数变换群。显然，Ind_XQ 的确定与点 $a\in Q$ 的选取无关。

对于 M^n 中一个在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变的、并且在其上 S 有双曲结构的连通闭子集 Λ，我们记

$$\mathrm{Ind}_S\,\Lambda=\mathrm{Ind}_S\,Q,$$

其中 Q 是 S 的含于 Λ 中的一条轨道，通过通常的论证，$\mathrm{Ind}_S\Lambda$ 的定义与 Λ 中轨道 Q 的选取无关。

设 $S\in\mathscr{X}^*$(见 §5)，S 的一个具有整数 $p\in\langle 0,n-1\rangle$的基本 p 序列是指序列$\{X_i,P_i\}$，这里对每个 i，X_i 为一常微系统 $\in\mathscr{X}^*$，且 P_i 为 X_i 的一个周期轨道使得

$$\lim_{i\to\infty}\|X_i-S\|_1=0\ \text{及}\ \mathrm{Ind}_{X_i}P_i=p.$$

定理 7.2 设 $S\in\mathscr{X}^*$ 且 Λ 为 S 的一个非简单极小歧变集。假定 Λ 不含 S 的奇点。则

(i) 对某个整数 $p\in\langle 0,n-1\rangle$，存在 S 的一基本 p 序列$\{X_i,P_i\}$ 使得周期轨列 $\{P_i\}$ 收敛于 Λ。

(ii) 对任意这样的 p，Λ 包含一个在 $\phi_t(-\infty<t<\infty)$ 下不变的双曲非空连通闭子集 K 使得

$$\mathrm{Ind}_S\,K\neq p,$$

从而 M^n 中 Λ 的任意给定的邻域包含 S 的一周期轨 P 使

$$p\neq\mathrm{Ind}_S\,P=\mathrm{Ind}_S\,K.$$

在 [26，§5] 中还明确地给出 $\mathrm{Ind}_S\,K$ 大于或小于 p 的条件。

§8. Ω 稳定性和结构稳定性

当今动力系统理论中的一个重要问题是寻求Ω稳定和结构稳定常微系统$\in \mathscr{X} = \mathscr{X}(M^n)$的特征。下面的猜想(最初由 Smale 对于微分同胚生成的离散动力学提出)已经有许多年了,即

猜想 I $S \in \mathscr{X}(M^n)$ 为Ω稳定的一个必要且充分条件是S满足公理A和无环性条件。

猜想 II $S \in \mathscr{X}(M^n)$ 为结构稳定的一个必要且充分条件是S满足公理A及强横截性条件。

按 Peixoto 早期的工作[27],这里的两个猜想对于 $\dim M^n = 2$ 是对的。这两个猜想中的充分性部分也曾由 Smale[28],Robbin[22],Pugh-shub[29] 和 Robinson[30] 证得(证明先是对微分同胚,而后是对常微系统)。但 $\dim M^n \geqslant 3$ 时的必要性部分仍未解决,直到最近几年才得到一些部分结果。

我们对于这些问题的处理办法主要是运用阻碍集和极小歧变集。例如,从我们在 §6 中的讨论看出,猜想 II 等价于下面的

猜想 II′ $S \in \mathscr{X}(M^n)$ 为结构稳定的必要且充分条件是

$$I(S) \cup Ob(S) = 0,$$

因而,若 $I(S) \cup Ob(S)$ 非空,则在 $I(S) = 0$ 情形下我们可以得到S的一个极小歧变集(当S的奇点都是双曲的时候,这种情形总会发生)。为看出在情形 $I(S) = 0$ 下,S在其非游荡集 $\Omega(S)$ 上是否有双曲结构,我们试取同样的方式,即先假定 $\Omega(S) \cap Ob(S) \neq 0$,而后考虑一极小歧变集 $\subset \Omega(S)$ 或类似于此的某个手续。

我们也来考虑由微分同胚生成的离散动力系统。

定理 8.1 设 $f \in \mathrm{Diff}^1(M^2)$。则$f$为$\Omega$稳定的一个必要条件是$f$满足公理A和无环性条件,而$f$为结构稳定的一个必要条件是$f$满足公理A和强横截性条件。

定理 8.2 为使 $f \in \mathrm{Diff}^1(M^2)$ 是Ω稳定的一个必要且充分的条件是 $f \in \mathscr{F}^*(M^2)$。

这里，我们用记号 $\mathscr{F}^*(M^n)$ 表示所有这样的 $g\in \mathrm{Diff}^1(M^n)$ 的集合：存在 g 的一个邻域 H 使任一 $h\in H$ 的所有周期点都是双曲的。

上两个定理曾在[19]中证得，最近又在[17]中证得。此外，Sannami[31] 也曾得到过定理 8.1。

运用上面两个定理及 Plykin[32]，Mañé[17] 和张筑生[33]曾得到的下面关于二维球面 S^2 的定理，即

存在周期源点或汇点是 $f\in \mathrm{Diff}^1(S^2)$ 的一个通有性质。

这回答了 Smale 和别人(例如，见[34])提出的一个问题。

用 $\Omega_0(S)$表示 $S\in\mathscr{X}(M^n)$的所有常非游荡点集，且用 $PR(S)$ 表示 S 的所有奇点和所有周期轨道上点的集合。还用 $\mathrm{per}(f)$ 表示 $f\in \mathrm{Diff}^1(M^n)$ 的所有周期点集。

Mañé[17] 主要是利用微分同胚的一个遍历封闭性引理(见[17，定理 A])证得上面两个定理，而我们对于这些定理的证明实际上是遵循与阻碍集加上所谓"筛滤"引理(见[19，§5])相类似的某种手续，并通过先证明下面的定理，然后运用通常的把微分同胚扭扩成常微系统的技巧来作出的。

定理 8.3 假设 $S\in\mathscr{X}^*(M^3)$，又设 $\Omega_0(S)$在 M^3 中为闭，且 $PR(S)$ 在 $\Omega(S)$ 中稠密。则 S 在 $\Omega(S)$ 上有双曲结构。

由熟知的论证，$PR(S)$ 在 $\Omega(S)$ 中稠密，只要 S 为 Ω 稳定，这样我们就容易从定理 8.3 得到定理 8.1。设 $f\in\mathscr{F}^*(M^n)$。用上 C^1 封闭性引理[8,9] 容易看出 $\mathrm{per}(f)$ 在 f 的非游荡集 $\Omega(f)$ 中稠密。于是因 f 在扭扩流形 M_f^{n+1} 上的扭扩常微系统 S_f 是在 $\mathscr{X}^*(M_f^{n+1})$ 中，故 $PR(S_f)$ 也在 $\Omega(S_f)$ 中稠密，因而我们还可以容易地从定理 8.3 得到定理 8.2。定理 8.2 可推广到 3 维常微系统如下。

定理 8.4 若 $S\in\mathscr{X}(M^3)$ 无奇点，则 S 为 Ω 稳定的当且仅当 $S\in\mathscr{X}^*(M^3)$。

很难看出在[17]或[18]中定理 8.2 最初证明的方法能被用来证明定理 8.4。一个本质的区别在于：对 $f\in\mathscr{F}^*(M^n)$，$\mathrm{per}(f)$

在 $\Omega(f)$中总是稠密的. 但对任一$S\in\mathscr{X}^*(M^n)$(及一般的 n),我们到现在还不知道类似的结果是否成立. 因而定理 8.4 在[26,§6]中通过运用极小歧变集证得,我们已在[26,§6]中强调过这种注解了.

我们曾在[26, §6]中以同样的精神就别的事情证明了下面的定理 8.5, 其中 $\mathscr{X}^{**}(M^n)$ 表示所有具有下列性质的 $X\in\mathscr{X}^*(M^n)$组成的集合:存在X在 $\mathscr{X}^*(M^n)$中的一 C^1 邻域 $\mathscr{W}$ 及 M^n 的互不相交的开子集 G, W_0, $W_1,\cdots,W_{n-1}$, 使得任一 $Y\in\mathscr{W}$ 的所有奇点都在G中,且任一 $Y\in\mathscr{W}$ 具有 $\mathrm{Ind}_Y P=k$ 的所有周期轨道P都包含在 W_k 中 ($k=1,2,\cdots,n-1$).

定理 8.5 为使 $S\in\mathscr{X}(M^n)$ 满足公理A和无环条件, 必要且充分条件是 $S\in\mathscr{X}^{**}(M^n)$.

对于 $f\in\mathrm{Diff}^1(M^n)$ 和 $x\in\mathrm{per}\,(f)$, 我们用 $\mathrm{Ind}_f(x)$ 表示线性空间 $\{u\in\mathscr{C}_x|\lim_{j\to\infty}\|df^j(u)\|=0\}$ 的维数, 而用 $\Lambda_k(f)$ 表示 M^n 中满足下面性质的所有点 x 组成的子集: 存在 M^n 中收敛于 x 的序列 $\{x_i\}$ 使得 $x_i\in\mathrm{per}(f)$ 及 $\mathrm{Ind}_f\,(x_i)=k$($k=1,2,\cdots,n$). 显然,每个 $\Lambda_k(f)$ 在 M^n 中为闭.

对于 $S\in\mathscr{X}(M^n)$, 我们还用 $M_0(S)$ 表示S的奇点集,而用 $\Gamma_k(S)$ 表示满足下面性质的所有点 x 组成的 M^n 的子集: 存在收敛于 x 的 M^n 中序列 $\{x_i\}$, 这里对每个 i, $x_i\in$一周期轨道P_i使 $\mathrm{Ind}_S\,(P_i)=k$ ($k=0, 1, \cdots, n-1$). 显然, $M_0(S)$ 和所有 $\Gamma_k(S)$ 都是 M^n 的闭子集.

Mañé 新近利用他的遍历封闭性引理对微分同胚证得下面美好的定理(即[17]中的定理 B)如下:

为使 $f\in\mathrm{Diff}^1(M^n)$ 满足公理A和无环性, 必要和充分条件是 $f\in\mathscr{F}^*(M^n)$ 且 $\Lambda_i(f)\cap\Lambda_j(f)=0$ 对所有 $0\leqslant i<j\leqslant n$.

Mañé 提出关于类似的结果对于常微系统是否成立的问题,即如他在[17,第508页]中所说的:

"……因而,定理 B 对于流说来是否成立仍有待考虑. 但在我们将对微分同胚采用的方法中,紧要的一步是 $f\in\mathscr{F}^*(M^n)$ 蕴涵

$\Omega(f)=\overline{\mathrm{per}(f)}$ 这件事实。我们不知道这个性质对于流是否正确。所以定理 B 对于流的推广似乎是需要对微分同胚所采用的技巧作不平凡的改进。"

这就是说，我们需要更多的东西来对常微系统 $S\in\mathscr{X}(M^n)$ 建立类似的结果，因 $PR(S)$ 可以不在 $\Omega(S)$ 中稠密，而这正相当于我们在上面就定理 8.4 的证明及定理 8.5 的证明所作的注解，在那里我们利用了极小歧变集的一些性质。

[17] 中的定理 B 和这里的定理 8.5 可看成是分别部分地回答了关于微分同胚和常微系统的 Ω 稳定性的猜想 I，虽然我们现在还不知道后一个定理是否能看作前者的令人满意的扩广。指出如下这一点也是有兴味的，即前一个定理不引用遍历封闭性引理也可得到。

事实上，设 $\mathscr{X}^{\circledast}(M^n)$ 为所有具有下列性质的 $X\in\mathscr{X}^*(M^n)$ 组成的集合：存在 X 在 $\mathscr{X}^*(M^n)$ 中的 C^1 邻域 $\mathscr{V}$ 使得对任意映射 $\theta:\langle 0,1\rangle\to\mathscr{V}$（对于 $\mathscr{X}(M^n)$ 的 C^1 模连续，见§1）和 $\theta(0)$ 的任一周期轨 P，存在 P 的形变 $H:\langle 0,1\rangle\times P\to M^n$ 使得对每个 $s\in\langle 0,1\rangle$，H 把 $(s)\times P$ 映到 $\theta(s)$ 的一周期轨道上。简而言之，我们可以说 P 通过 θ 形变到周期轨道。对于 $S\in\mathscr{X}(M^n)$，设 $M_0(f)$ 和 $\Gamma_k(S)$ 仍如上给出。那么，因为 $f\in\mathscr{F}^*(M^n)$ 的扭扩常微系统 S_f 如上所指出的那样是在 $\mathscr{X}^*(M_f^{n+1})$ 中，并且我们还容易看出 S_f 实际上是在 $\mathscr{X}^{\circledast}(M_f^{n+1})$ 中，所以[17，定理 B]易从下面的断语推得：

设 $S\in\mathscr{X}^{\circledast}(M^n)$。为使 S 满足公理 A 和无环性，必要且充分条件是 $M_0(S),\Gamma_0(S),\Gamma_1(S),\cdots,\Gamma_{n-1}(S)$ 为 M^n 中互不相交的子集。

这个断语可由定理 8.5 通过运用极小歧变集等得到，而不必引用遍历封闭性引理。

参 考 文 献

[1] 廖山涛，紧致微分流形上常微分方程系统的某类诸态备经性质，北京大学学报

(自然科学),(3),9(1963),241—265;309—326(即本书第一章).
[2] Oseledec, V.I., A multiplicative ergodic theorem, Lypunov characteristic numbers for dynamical systems, Trudy Moskov, *Mat. Obsc.*, **19** (1968), 179--210.
[3] Ruelle, D., Differentiable dynamical systems and the problem of turbulence, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **5** (1981), 29—42.
[4] 廖山涛,典范方程组,数学学报,17(1974),100—109;175—196;270—295(即本书第二章).
[5] 廖山涛,常微分方程系统所导出的在切丛上的单参数变换群的诸态备经性质对相空间结构的探讨的应用 I,北京大学学报(自然科学),12(1966),1—43.
[6] Nitecki, Z., Differentiable Dynamics, M. I. T. Press, Cambridge, 1971.
[7] Irwin, M., Smooth Dynamical Systems, London, Academic, 1980.
[8] Pugh, C., An improved closing lemma and a general density theorem, *Amer. J. Math.*, **89** (1967), 1010—1021.
[9] 廖山涛,一个推广的 C^1 封闭引理,北京大学学报(自然科学),(3),(1979),1—41.
[10] Smale, S.,Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747—817.
[11] Anosov, D. V., Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature, *Proc. Steklov Math. Inst.*,**90** (1967).
[12] Moser, J., On a theorem of Anosov, *J. Diff. Equs.*, **5** (1969), 411—440.
[13] Robinson, C., Stability theorems and hyperbolicity in dynamical systems, *Rocky Mountain J. Math.*, **7** (1977), 425—437.
[14] Kato, K., and Morimoto, A.,Topological stability of Anosov flows and their centralizers, *Topology*, **12** (1973), 255—273.
[15] 廖山涛,某类常微系统的一个基本性质,数学学报,22(1979),316--343.
[16] Mañé, R., Expansive difleomorphisms, Dynamical Systems-Warwick 1974 Lecture Notes in Math., 468, Springer-Verlag, 1975, 162—174.
[17] Mañé, R., An ergodic closing lemma, *Annals of Math.* **116** (1982), 503—540.
[18] Guckenheimer, J., A strange, strange attractor, The Hopf Bifurcation Theorem and Its Applications, Springer-Verlag,1976, 368—381.
[19] 廖山涛,关于稳定性推测,数学年刊,1(1980),9—30(即本书第五章).
[20] Pliss, V. A., On a conjecture of Smale, *Diff. Uravnenifa*, **8**(1972), 268—282.
[21] 廖山涛,阻碍集与强匀断条件,数学学报,19(1976),203—209(即本书第三章).
[22] Robbin, J.,A structural stability theorem,*Annals of Math.*, **94**(1971), 447—493.
[23] Mañé, R., Characterizations of AS diffeomorphisms, Geometry and Topology, Lecture Notes in Math.,597,Springer-Verlag,1977,389—394.
[24] 廖山涛,阻碍集 (I),数学学报,23(1980),411—453(即本书第四章).

[25] 廖山涛，一个关于周期轨道存在的定理，北京大学学报（自然科学），(1)，(1979)，1—20.

[26] 廖山涛，阻碍集.（II），北京大学学报（自然科学），(2)，(1981)，1—36（即本书第六章）.

[27] Peixoto, M., Structural stability on two-dimensional manifolds. *Topology*, 1 (1962), 101—120.

[28] Smale, S., The Ω-stability theorem, Proc. Symp. Pure Math., Amer. Math. Soc., 14, 1970, 289—297.

[29] Pugh, C. and Shub, M., The Ω-stability theorems for flows, *Inventiones Math.*, **11**(1970), 150—158.

[30] Robbinson, C., Structural stability of C^1 flows, Dynamical Systems-Warwick 1974, Lecture Notes in Math., 468, Springer-Verlag, 1975, 262—277.

[31] Sannami, A.,The stability theorems for discrete dynamical systems on two-dimensional manifolds, *Nagoya Math. J.* **90**(1983), (Announcement and summary, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **57**(1981),403—407.)

[32] Plykin, R. V., Sources and sinks of A-diffeomorphisms of surfaces, *Mat. Sb.*, 136, **94** (1974), 243—264.

[33] 张筑生，A generic property for diffeomorphisms on the 2-sphere, *Chinese Annals of Math.*, **4B** (1983), 105—107.

[34] Smale, S., Problems of Present day Mathematics (XVII), Mathematical developments from Hilbert problems, Proc. Symp. Pure Math., Amer. Math. Soc., 28, 1976.

第八章　关于结构稳定的特征性质

§1. 引　　言

在微分动力体系理论中，寻找 n 维紧致光滑流形 $M^n(n \geq 2)$ 上结构稳定的微分同胚的特征性质是长时期以来的一个基本问题。我们说 $f \in \mathrm{Diff}^1(M^n)$ 是结构稳定的，若 f 有一在 $\mathrm{Diff}^1(M^n)$ 中的邻域 V 使得每一 $g \in V$ 都与 f 拓扑同轭。多年前[1]中推测过，$f \in \mathrm{Diff}^1(M^n)$ 结构稳定的一个充要条件是 f 满足公理 A 及强横截条件。稍迟，这推测的充分性在 [2,3] 中得证。可是，必要性部分尚待解决，只有近时在 [4—6] 中，在 $\dim M^n = 2$ 的情况下有过证明。

我们说 $f \in \mathrm{Diff}^1(M^n)$ 是一个 Kupka-Smale 微分同胚，如果 f 的每个周期点都是双曲的，且这些周期点的稳定流形与非稳定流形都横截相交。

本章提出下述当 $\dim M^n = 3$ 时的一个特征性定理，并在 §3 和 §4 中给出证明它的线索。

定理 1.1　一个使 $f \in \mathrm{Diff}^1(M^3)$ 结构稳定的充要条件是 f 在 $\mathrm{Diff}^1(M^3)$ 中有一邻域 W 使得每一 $g \in W$ 都是 Kupka-Smale 微分同胚。

附带地，我们也验证了，当 $\dim M^n = 3$ 时的上述推测。

我们指出，定理 1.1 对于 $f \in \mathrm{Diff}^1(M^2)$ 仍然成立。可是，这容易从一些以前已有的(包括[4，5]在内的)结果推出。较多的细节见下面 §4。

§2. 预备. 阻碍集与极小歧变集

我们打算在略有限制的情况下先建立一个与上述定理相类似的，有关向量场的结果。然后通常的扭扩办法即可导出上述定

理。

记$\mathscr{X}(M^n)$为M^n上所有的C^1切向量场(即常微系统)X作成的线性空间。就M^n上一任给定的C^∞ Riemann度量赋$\mathscr{X}(M^n)$以C^1模$\|X\|_1$后，$\mathscr{X}(M^n)$即成为一Banach空间。命

$$\mathscr{C}=\bigcup_{x\in M^n}\mathscr{C}_x$$

为M^n的切空间丛，其中$\mathscr{C}_x$表M^n在x处的切空间。

考虑一任给的$S\in\mathscr{X}(M^n)$。S导出一C^1单参变换群ϕ_t: $M^n\to M^n(-\infty<t<\infty)$，由是导出一单参变换群

$$\Phi_t=d\phi_t:\mathscr{C}\to\mathscr{C},-\infty<t<\infty.$$

记M为S所有常点作成的集合，并考虑S的共轭丛

$$\mathscr{D}=\bigcup_{x\in M^n}\mathscr{D}_x.$$

这丛以M为底空间，在x处的纤维为$\mathscr{D}_x=\{u\in\mathscr{C}_x|\langle S(x),u\rangle=0\}$。对$u\in\mathscr{D}_x$取$\phi_t(u)$为$\Phi_t(u)$在$\mathscr{D}_{\phi_t(x)}$上的垂直投影，即给出一单参变换群

$$\phi_t:\mathscr{D}\to\mathscr{D},-\infty<t<\infty,$$

ϕ_t把$\mathscr{D}_x$线性变换至$\mathscr{D}_{\phi_t(x)}$上。

我们尚需另外一个变换群

$$\Psi_t:\mathscr{D}\to\mathscr{D},-\infty<t<\infty,$$

它是这样来定义使得$\phi_t(u)-\Psi_t(u)\in\phi_t(⊛u)$且$\Psi_t(u)$与$\phi_t(⊛u)$正交，这里

$$⊛u=\{v\in\mathscr{D}_x|\langle u,v\rangle=0\}\text{ 对于 }u\in\mathscr{D}_x,$$

这个变换群可自然且唯一地扩充到$\mathscr{D}$在$\mathscr{C}$中的闭包$\mathscr{D}^*$上，仍记作

$$\Psi_t:\mathscr{D}^*\to\mathscr{D}^*,-\infty<t<\infty.$$

按照[8,9]我们定义S的阻碍集$Ob(S)$作为

$$Ob(S)=\{x\in M^n|\exists u\in\mathscr{D}^*\cap\mathscr{C}_x\text{ 使得}$$

$$\|u\| = 1 = \inf_{t \in (-\infty, \infty)} \|\Psi_t(u)\|\}.$$

按照[10]，M^n 的一子集 Λ 将叫作 S 的一个歧变集，如果 Λ 在 M^n 中闭，在 $\phi_t(-\infty < t < \infty)$ 下不变，且 $\Lambda \cap Ob(S) \neq 0$. 一个歧变集将叫作极小的，如果它不包含有真歧变子集. 用 Brouwer 约化定理可看出每一歧变集都至少包含一个极小歧变集.

S 的一极小歧变集 Λ 将叫作简单的，如果或 (i)Λ 不含有 S 的常点，或 (ii)$\Lambda \cap Ob(S)$ 至少含有 S 的一常点 c 使得轨线 $\{\phi_t(c) | t \in (-\infty, \infty)\}$ 的 ω-极限集合与 α-极限集合都是 Λ 的真子集. 否则，这极小歧变集将叫作非简单的.

极小歧变集这概念在我们的工作中将几乎到处出现.

我们也将用下面的一些记号：对于 $t \in (0, \infty)$, $x \in M$ 及 $\mathscr{D}_x$ 中一个维数 >0 的子线性空间 A，写

$$\eta_-(t, A) = \sup_{u \in A, \|u\| = 1} \log \|\phi_t(u)\|,$$

$$\eta_+(t, A) = \inf_{u \in A, \|u\| = 1} \log \|\phi_t(u)\|.$$

如同 S 这情况一样，每一 $X \in \mathscr{X}(M^n)$ 也将导出 M^n 的切空间从 $\mathscr{C}$ 上一单参变换群(将记作)

$$\Phi_{Xt}: \mathscr{C} \to \mathscr{C}, -\infty < t < \infty.$$

显然 $\Phi_{Xt} = \Phi_t$ 对于 $X = S$. 若 K 是 M^n 中一非空的连通闭子集，且是 X 的一双曲不变集(例如，K 是 X 的一双曲周期轨道)，我们写

$$\mathrm{Ind}_X K = \dim\{u \in \mathscr{C}_x : \lim_{t \to \infty} \|\Phi_{Xt}(u)\| = 0\},$$

其中 $x \in K$. $\mathrm{Ind}_X K$ 的定义与 K 中的点 x 的选取无关.

§3. 关 键 步 骤

考虑 $\mathscr{X}(M^n)$ 中所有具有下述性质的 X 作成的族 $\mathscr{X}^*(M^n)$. 这性质是 X 在 $\mathscr{X}(M^n)$ 中有一邻域 W 使得每一 $Y \in W$ 的所有奇点和周期轨道都是双曲的. 我们曾经在[11, 10]中对 $\mathscr{X}^*(M^n)$ 作过较广泛的讨论(关于微分同胚的相应的讨论，可参考[5]).

设 $S\in\mathscr{X}^*(M^n)$。对于一整数 $p\in\langle 0,\ n-1\rangle$，由 $X_i\in\mathscr{X}^*(M^n)$ 及 X_i 的周期轨道 P_i 作成的序列 $\{X_i,\ P_i\}$ 将叫作 S 的一基本 p-序列，如果

$$\lim_{i\to\infty}\|X_i-S\|_1=0\ \text{且}\ \mathrm{Ind}_{X_i}P_i=p,\ i=1,2,3,\cdots.$$

定理 3.1 设 $S\in\mathscr{X}^*(M^n)$ 且设 Λ 是 S 的一非简单极小歧变集 $\subset M$。下面 (i) 及 (ii) 成立。

(i) 存在 S 的一基本 p-序列 $\{X_i,\ P_i\}$，其中 p 不同于 0 和 $n-1$，使得周期轨道序列 $\{P_i\}$ 收敛到 Λ。由是存在数 $\eta>0$ 及 $T>0$ 使得在每一 $x\in\Lambda$ 处，$\mathscr{D}_x$ 可唯一地分解成直和

$$\mathscr{D}_x=\Delta_-(x)\oplus\Delta_+(x),\ \dim\Delta_-(x)=p$$

满足

$$\phi_t(\Delta_-(x))=\Delta_-(\phi_t(x))\ \text{及}\ \phi_t(\Delta_+(x))=\Delta_+(\phi_t(x)),$$
$$t\in(-\infty,\ \infty),$$

$$\eta_+(t,\Delta_+(x))-\eta_-(t,\Delta_-(x))\geqslant 2\eta,\ t\in\langle T,\infty).$$

(ii) 如果有 S 的一基本 p-序列 $\{X_i,\ P_i\}$ 以及 η，T 满足 (i) 中要求，且如果

$\eta_+(t,\Delta_+(x))\geqslant\eta$ 对所有 $(t,\ x)\in\langle T,\ \infty)\times\Lambda$，则存在数 $\xi>0$ 及 $d>0$ 及点 $c_*\in\Lambda$ 以及负整数

$$m_1>m_2>m_3>\cdots$$

使得对于点 $c_j=\phi_{m_jd}(c_*)$ 我们有

$$\frac{1}{md}\sum_{k=0}^{m-1}\eta_-(d,\Delta_-(\phi_{kd}(c_j)))\leqslant-\xi,$$

$$m=1,2,\cdots,-m_j;\ j=1,2,3,\cdots,$$

且使得 S 过 c_* 的轨线的 ω-极限集合 Γ 是 S 的一双曲不变集具有

$$0<\mathrm{Ind}_S\Gamma<p.$$

这里，(i) 的一部分是 [10] 中一些结果的重述。从一些与 [10，§6] 相类似的论据可看出 $p\neq 0,n-1$。明显地，Γ 是 Λ 中非空的连通闭子集。

(ii) 是新的，且是证明上述定理 1.1 这类定理的关键步骤.对于所给的非简单极小歧变集作较细致的分析并应用如同[12]中所述的定理可导至定理 3.1 的证明。

现在，记 $\mathscr{X}^{\#}(M^n)$ 为所有具有下述性质的 $X \in \mathscr{X}^*(M^n)$ 作成的族。这性质是 X 在 $\mathscr{X}^*(M^n)$ 中有一邻域 U，使得如果 Q_1 及 Q_2 是 $Y \in U$ 的奇点或周期轨道，则就 Y 来说，Q_1 的稳定流形与 Q_2 的非稳定流形总横截相交。简单地说，每一 $Y \in U$ 都是一 Kupka-Smale 系统。

定理 3.2 设 $S \in \mathscr{X}^{\#}(M^n)$ 且设 Λ 是 S 的一非简单极小歧变集 $\subset M$。则 S 不能有基本 p-序列 $\{X_i, P_i\}$ 使得定理 3.1 的结论 (ii) 成立。

定理 3.3 如果 $S \in \mathscr{X}^{\#}(M^n)$，则 S 不能有简单极小歧变集。

最后的这个定理可以下述方式来证。设相反地有一如此的极小歧变集 Λ。则按照[10,§3]中一个定理，Λ 含有 S 的一常点 c 使得 $\{\phi_t(c) | t \in (-\infty, \infty)\}$ 的 ω-极限集合与 α-极限集合都是 S 的双曲不变集，且有 $u \in \mathscr{D}_c, \|u\| = 1$，使得

$$\lim_{t\to\infty} \|\Psi_t(u)\| = \infty = \lim_{t\to-\infty} \|\Psi_t(u)\|,$$

且实际上，当 $t \to \pm\infty$ 时，$\|\Psi_t(u)\|$ 象指数般增长。由是适当的 C^1 小扰动将破坏 $S \in \mathscr{X}^{\#}(M^n)$ 的 Kupka-Smale 特性。

§4. 应　用

考虑 $n = 4$ 及 $S \in \mathscr{X}^{\#}(M^4)$ 无奇点这情况。用定理 3.2 及 [10,§5;4,§3] 中的定理，我们易导出

定理 4.1 设 $S \in \mathscr{X}^{\#}(M^4)$ 无奇点。则 S 不能有非简单极小歧变集。

定理 4.2 设 $S \in \mathscr{X}(M^4)$ 无奇点.则下面的叙述 (i)—(iv) 是等价的:

(i) S 结构稳定;

(ii) $S\in\mathscr{X}^{\#}(M^4)$;

(iii) $Ob(S)=0$;

(iv) S满足公理A及强横截条件。

这里 (i) ⇒ (ii) 易从 Kupka-Smale 定理[7]及结构稳定定义推出。(ii) ⇒ (iii) 是上面定理 3.3 及 4.1 的结论，因为否则，S就会有极小歧变集。(iii) ⇒ (iv)给在[9]及[12,第18页]中。(iv) ⇒ (i) 给在 Robinson[13] 中。

我们指出，上述定理对于 $S\in\mathscr{X}(M^3)$ 仍成立，且可以同法得证。可是，这样一个三维定理也易从以前已有的结果推出。这些结果包括如下的一个，即[10,§6]：要使无奇点的 $S\in\mathscr{X}(M^3)$ Ω-稳定的充要条件是 $S\in\mathscr{X}^{*}(M^3)$，也是S满足公理A及无环性条件。从 Peixoto [14]，定理 4.2 对于无奇点的 $S\in\mathscr{X}(M^2)$ 显然仍成立。

通过扭扩，我们得出类似的

定理 4.3 对于 $f\in \mathrm{Diff}^1(M^3)$，下面的叙述 (i)—(iii) 是等价的：

(i) f结构稳定；

(ii) f在 $\mathrm{Diff}^1(M^3)$ 中有一邻域V使得每一$g\in V$都是 Kupka-Smale 微分同胚；

(iii) f满足公理A及强横截条件。

同样，这定理对于 $f\in \mathrm{Diff}^1(M^2)$ 仍成立。但这也容易从以前已有的结果(包括[4,5]中关于Ω-稳定的特征性质)来导出。

参 考 文 献

[1] Palis, J. and Smale, S., Structural stability theorems, Global Analysis, Proc. Symp. Pure Math., Amer Math. Soc., Providence. R. I., 14, 1970, 223—231.

[2] Robbin, J., A structural stability theorem, *Ann. of Math.*, **94**(1971), 447—493.

[3] Robinson, C., Structural stability of C^1 diffeomorphisms, *J. Diff. Equations* 22 (1976) 28—71.

[4] Liao Shan-tao, On the stability conjecture, *Chinese Annals of Math.*,

1, 1(1980), 9--29.

[5] Mañé, R., An ergodic closing lemma. *Annals of Math.*, **116**(1982), 503--540.

[6] Sannami, A., The stability theorems for discrete dynamical systems on two-dimen sional manifolds, *Nagoya Math. J.*, **90** (1983); Announcement and summary: Proc. Japan Acad. Ser. AMath. Sci., 57, 1981, 403—407.

[7] Abraham, R. and Robbin, J., Transversal Mappings and Flaws, Benjamin, New York, 1967.

[8] 廖山涛,阻碍集与强匀断条件,数学学报,**19**(1976),203—209(即本书第三章).

[9] 廖山涛,阻碍集 (I)., 数学学报,**23**(1980),411—453(即本书第四章).

[10] 廖山涛,阻碍集 (II),北京大学学报(自然科学),(2),(1981),1—36 (即本书第六章).

[11] 廖山涛,某类常微系统的一个基本性质,数学学报, **22**(1979),316—343.

[12] 廖山涛,一个关于周期轨道存在的定理,北京大学学报(自然科学),(1),(1979),1—**20**.

[13] Robinson, C., Structural stability of C^1 flows. Dynamical Systems-Warwick 1974, Lecture Notes in Math., 468, Springer-Verlag, 1975.

[14] Peixoto, M., Structural stability on two-dimensional manifolds *Topology*, **1**(1962), 101—120.

附　　录

（1989 年 5 月）

（一）

第二章（看前言）§1 中的大部分叙述引自第一章或可从第一章直接导出；其余部分是关于紧致的 n 维 C^∞ Riemann 流形 M^n 上常微系统 S 的典范方程组 $(\tilde{S}_\alpha)$，(S_α^*) 及它们的性质的.这些性质原见于文献[1]（看本附录末），但第二章引述这些的目的只是为其中后来所得出的某些结论作对比用的。正如同第二章前言中所述，[1]中采用的办法有若干不便之处，特别是，不便于处理 S 的扰动；此外，还不得不假定 S 是 C^2 系统。第二章的一个目的是要循另一种方式给出典范方程组。这样一来，S 是 C^2 系统这假定可弱化成 S 是 C^1 的，这也较便于讨论 S 的扰动，同时在某种情况下，原来有关 S 的奇点的假定也可取消。为这目的，一个主要步骤是第二章中的定理 2.1。

（二）

由微分动力系统研究的需要而发展起来的几何和泛函分析方法，从文献[2—5]中可窥见一般。但微分动力系统这数学分支就其所探讨的对象来说，是常微分方程定性论的延伸。所以，直接应用常微分方程作为研究这分支的工具将仍有方便之处。

今取欧氏空间 E^n 上关于向量场的 Grobman-Hartman 定理的证明为例。关于这定理的泛函分析式或几何式的证明，可看[2，第二章，§4 和 §7]，还可参考[3，第八章]，这里不重述；也还有见于[6，§2]的方程方式证明，显得直截了当。因[6]这份资料目前已难在各个地方找到，故下面转述这证明以便比较；读者还可参看[7]。

考虑 E^n 上一常系数线性方程组

$$\frac{dz}{dt}=zC,\ z\in E^n \tag{$*$}$$

及其扰动方程组

$$\frac{dz}{dt}=zC+f(z),\ z\in E^n, \tag{$*$}_f$$

其中

$$C=\text{分块方阵}\begin{pmatrix}C_- & 0\\ 0 & C_+\end{pmatrix},$$

C_- 及 C_+ 分别为 n_- 及 n_+ 阶方阵，其特征根实部都分别 <0 和 >0，$f(z)\in E^n$ 对 z 连续，在 E^n 上有界且具有 Lipschitz 常数 κ：

$$\sup_{z\in E^n}\|f(z)\|\leqslant\tau<\infty,$$

$$\|f(z)-f(z')\|\leqslant\kappa\|z-z'\|\ \text{对所有的}\ z\ \text{及}\ z'\in E^n.$$

记 $z(t,u)$ 及 $z_f(t,u)$ 分别为 $(*)$ 及 $(*)_f$ 的解，$z(0,u)=u=z_f(0,u)$。记 I_-，I_+ 为对角式方阵；I_- 的前 n_- 个对角线系数都是 1，其余的系数都是零；I_+ 的后 n_+ 个对角线系数都是1，其余的系数都是 0。对任一 p 阶方阵 A 记

$$\mathcal{N}(A)=\sup_{u\in E^p,\|u\|=1}\|uA\|,$$

又记

$$\varepsilon_*=\int_{-\infty}^{0}\mathcal{N}(I_-\exp(-sC))ds+\int_{0}^{\infty}\mathcal{N}(I_+\exp(-sC))ds.$$

由于 C_- 及 C_+ 的特征根实部都 <0 及 >0，这里的无穷积分都存在。显然 $\varepsilon_*>0$。

定理 (Grobman-Hartman) 上述方程组$(*)$是结构稳定的。

证 只须证明下述 (i)—(iv)，其中我们考虑$(*)$的、任一给定的扰动方程组 $(*)_f$ 如上。

(i) 对应于每一 $u\in E^n$，存在唯一的点 $\Delta_f(u)\in E^n$ 使

$$\sup_{t\in(-\infty,\infty)}\|z_f(t,u)-z(t,\Delta_f(u))\|<\infty.$$

(ii) Δ_f 给出一满映射 $E^n\to E^n$，它保相(即 $\Delta_f(z_f(t,u))=$

$z(t,\Delta_f(u)))$，且是一 $(\tau\varepsilon_*)$-映射

$$\sup_{u\in E^n}\|\Delta_f(u)-u\|\leqslant\tau\varepsilon_*.$$

(iii) Δ_f 可由 Grobman 公式

$$\Delta_f(u)=u-\int_{-\infty}^{0}f(z_f(s,u))I_-\exp(-sC)ds$$

$$+\int_0^{\infty}f(z_f(s,u))I_+\exp(-sC)ds,\ u\in E^n$$

给出。

(iv) 若 f 具有 Lipschitz 常数 $\kappa<1/\varepsilon_*$，则 Δ_f 是一拓扑变换。

事实上，就式子

$$\Delta_f(z_f(t,u))=z_f(t,u)-\int_{-\infty}^{0}f(z_f(s,z_f(t,u))I_-\exp(-sC)ds$$

$$+\int_0^{\infty}f(z_f(s,z_f(t,u))I_+\exp(-sC)ds$$

$$=z_f(t,u)-\left(\int_{-\infty}^{t}f(z_f(s,u))I_-\exp(-sC)ds\right)\exp(tC)$$

$$+\left(\int_t^{\infty}f(z_f(s,u))I_+\exp(-sC)ds\right)\exp(tC)$$

两端对 t 取微商，即看出 $\Delta_f(z_f(t,u))$ 满足(*)，由是 $\Delta_f(z_f(t,u))=z(t,\Delta_f(u))$。从 C 的性质可得

$$\sup_{t\in(-\infty,\infty)}\|z(t,u)-z(t,u')\|=\sup_{t\in(-\infty,\infty)}\|z(t,u-u')\|<\infty$$

蕴涵 $u=u'$。又用 (iii) 也易看出 Δ_f 是 $(\tau\varepsilon_*)$-映射。为证 Δ_f 满，考虑 E^n 上由

$$F_\lambda(u)=(1-\lambda)u+\lambda\Delta_f(u),u\in E^n,\lambda\in\langle 0,1\rangle$$

给出的、连接恒同映射及 Δ_f 的同伦 $F_\lambda:E^n\to E^n$。明显地，它可扩充至 n 维球 $S^n=E^n\cup(\infty)$ 上一同伦 F'_λ 满足 $F'_\lambda(\infty)=\infty$。由是 F'_1 的拓扑度是 1，这蕴涵 Δ_f 满。故 (i)—(iii) 成立。

尚余证(iv)。设 $\kappa<1/\varepsilon_*$。因 E^n 上一个到其自身上的单映射是拓扑变换。我们只余证 Δ_f 单，为此，设相反地有某 $u_0\neq v_0\in E^n$ 使 $\Delta_f(u_0)=\Delta_f(v_0)$。则

$$z_f(t,u_0) - z_f(t,v_0) = \int_{-\infty}^{0} (f(z_f(s+t,u_0))$$
$$- f(z_f(s+t,v_0)))I_- \exp(-sC)ds$$
$$- \int_0^{\infty} (f(z_f(s+t,u_0))$$
$$- f(z_f(s+t,v_0)))I_+ \exp(-sC)ds,$$

从而若置 $\lambda = \sup_{t\in(-\infty,\infty)}\|z_f(t,u_0) - z_f(t,u_1)\|$，则

$$0 < \lambda \leqslant 2\tau\varepsilon_* \text{ 及 } \lambda \leqslant \kappa\lambda\varepsilon_*.$$

这蕴涵 $\kappa\varepsilon_* \geqslant 1$。这是一矛盾，证明了 (iv)。定理证完。

这证明还表明了一个值得一提的事情：这定理结构稳定叙述中所需要的从 $(*)_f$ 到 $(*)$ 相图间的拓扑变换，有如同 (iii) 中给出的解析表达式。

(三)

命 $\mathscr{X} = \mathscr{X}(M^n)$ 为 M^n 上所有的 C^1 常微系统 X 作成的线性空间，赋以 C^1 后，$\mathscr{X}$ 成为一 Banach 空间。每一 $X\in\mathscr{X}$ 都导出 M^n 上一 C^1 单参变换群 $\phi_{Xt}: M^n \to M^n (-\infty < t < \infty)$，从而导出 M^n 的切丛上一单参变换群

$$\Phi_{Xt} = d\phi_{Xt}: \mathscr{C} = \bigcup_{x\in M^n} \mathscr{C}_x \to \mathscr{C}, -\infty < t < \infty$$

(其中 $\mathscr{C}_x$ 表 M^n 在 x 处的切空间)。记 $\tilde{\mathscr{X}} = \mathscr{X} \times (-\infty, \infty) \times \mathscr{C}$。命

$$\tilde{\Phi}: \tilde{\mathscr{X}} \to \mathscr{C}$$

由 $\tilde{\Phi}(X, t, u) = \Phi_{Xt}(u)$ 给出。又每一 $X\in\mathscr{C}$ 也都在它的共轭丛

$$\mathscr{D}_X = \bigcup_{x\in M_X} \mathscr{D}_{Xx}$$

(其中 $M_X = \{x\in M^n \mid \|X(x)\| > 0\}$，$\mathscr{D}_{Xx} = \{u\in\mathscr{C}_x \mid \langle X(x), u\rangle = 0\}$) 上导出一单参变换群

$$\psi_{Xt}: \mathscr{D}_X \to \mathscr{D}_X, -\infty < t < \infty,$$

即：若 $u\in\mathscr{D}_{Xx}$，则 $\phi_{Xt}(u)$ 是 $\Phi_{Xt}(x)$ 在 $\mathscr{D}_{\Phi_{Xt}(x)}$ 上的垂直投影．命

$$H:\Gamma=\{(X,t,u)\in\tilde{\mathscr{X}}\mid u\in\mathscr{D}_X\}\to\mathscr{C}$$

由 $H(X,t,u)=\phi_{Xt}(u)$ 给出．下述的简单命题对我们普遍有用(例如在第三、五章中)．

命题 $\tilde{\Phi}$ 及 H 分别在 $\tilde{\mathscr{X}}$ 及 Γ 上连续．

证明可在[1第 13—14 页]中发现，是初等的．为读者方便，略述如下．命 $\mathscr{U}_2$ 及 $\mathscr{F}_2$ 分别为 M^* 的 2-标架丛及正交 2-标架丛．又对于 $X\in\mathscr{X}$ 命

$$\Phi_{Xt}:\mathscr{U}_2\to\mathscr{U}_2\text{ 及 }\chi_{Xt}:\quad\mathscr{F}_2\to\mathscr{F}_2,\quad -\infty<t<\infty$$

为单参变换群，分别由 $\Phi_{Xt}(u_1,\ \ u_2)=(\Phi_{Xt}(u_1),\ \ \Phi_{Xt}(u_2))$ 及 $\chi_{Xt}(\beta)=\pi\Phi_{Xt}(\beta)$ 给出，其中 π 是映射：$\mathscr{U}_2\to\mathscr{F}_2$，它把每一 $\gamma\in\mathscr{U}$ 按 Gram-Schmidt 手续正交化成 $\pi(\gamma)$．取

$$\bar{\Phi}:\ \mathscr{X}\times(-\infty,\infty)\times\mathscr{U}_2\to\mathscr{U}_2,$$

$$\chi:\mathscr{X}\times(-\infty,\infty)\times\mathscr{F}_2\to\mathscr{F}_2,$$

分别由 $\bar{\Phi}(X,t,\beta)=\Phi_{Xt}(\beta),\chi(X,t,\beta)=\chi_{Xt}(\beta)$ 给出．因 $\chi(X,t,\beta)=\pi\bar{\Phi}(X,t,\beta)$，而由 $\iota(X,t,u)=(X,t,\ (X(x),\ u))$ 对于 $0\neq u\in\mathscr{D}_{Xx}$ 给出嵌入 $\Gamma\to\mathscr{X}\times(-\infty,\infty)\times\mathscr{F}_2$，且

$$H(X,t,u)=\mathrm{proj}_2\iota(X,t,u),$$

所以要证 H 连续，只余证 χ 连续，也只余证 $\bar{\Phi}$ 连续，由是也只余证 $\bar{\Phi}$ 连续．

由于 $\tilde{\Phi}(X,t,\tilde{\Phi}(X,s,u))=\tilde{\Phi}(X,s+t,u)$恒成立，要证$\tilde{\Phi}$在一点 (X_0,t_0,u_0) 处连续，我们不妨设 t_0 充分小，从而可在 M^* 的局部坐标卡上，用常微分方程组的通常性质来完成证明．

(四)

受典范方程组研究的启发，得出阻碍集．今解释这过程如下．先回顾第二章 §3 中提到的有关线性方程组的一些性质． 考虑一线性方程组

$$\frac{dz}{dt}=zB(t),-\infty<t<\infty,z=(z^1,z^2,\cdots,z^p)\in E^p,\quad(\tilde{*})$$

其中 $B(t)=(b_{ij}(t))$ 是 p 阶三角式方阵，其对角线以上的系数都是零，$B(t)$ 对 t 连续，且在 $(-\infty,\infty)$ 上有界

$$\sup_{t\in(-\infty,\infty)}\mathcal{N}(B(t))<\infty.$$

记 $\tilde{z}(t,u)$为 $(\tilde{*})$的解使 $\tilde{z}(0,u)=u$。

我们将称$(\tilde{*})$对于 E^p 的一直和分解

$$E^p=E_-\oplus E_+$$

及常数 $\eta_1<0,d_1>0$ 在 $\langle 0,\infty)$ 上具有性质 (P_1)，如果

$\|\tilde{z}(s+t,u)\|\leqslant\|\tilde{z}(s,u)\|\exp(\eta_1 t)$

对所有的 $(s,u)\in\langle 0,\infty)\times E_-$ 及 $t\geqslant d_1$,

$\|\tilde{z}(s,u)\|\leqslant\|\tilde{z}(s+t,u)\|\exp(\eta_1 t)$

对所有的 $(s,u)\in\langle 0,\infty)\times E_+$ 及 $t\geqslant d_1$.

我们将称$(\tilde{*})$对于 $\{1,2,\cdots,p\}$ 的一子集 J_- 及常数 $\eta_2<0$, $d_2>0$ 在 $\langle 0,\infty)$ 上具有性质 (P_2)，如果

$$\frac{1}{T}\int_0^T b_{ii}(s+t)dt\leqslant\eta_2 \text{ 对所有 } i\in J_-,s\geqslant 0 \text{ 及 } T\geqslant d_2,$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T b_{ii}(s+t)dt\geqslant-\eta_2 \text{ 对所有 } i\in\{1,2,\cdots,p\}-J_-,$$

$s\geqslant 0$ 及 $T\geqslant d_2$.

从第二章 §3 中所述，我们有

命题 方程组$(\tilde{*})$对于 E^p 的一直和分解 $E^p=E_-\oplus E_+$ 在 $\langle 0,\infty)$ 上具有性质 (P_1) 的充要条件是它对 $\{1,2,\cdots,p\}$ 的一子集 J_-在 $\langle 0,\infty)$ 上具有性质 (P_2)。在这条件下，$\dim E_1$ 必等于 J_-中所含整数的个数，并且，若 p不$\in J_-$，则 E_-包含在 E^p的超平面 $z^p=0$ 内。

这命题叙述了有关线性方程组的一个简单的性质。如果把这性质应用到通常所指的常微系统的双曲集上，会引出什么结论呢？考虑 M^n 上一任给的 C^1 常微系统 S 及它的一个不含有奇点

的双曲集 Λ。考虑对于 S 来说的丛

$$\mathscr{D}=\bigcup_{x\in M}\mathscr{D}_x,\ \mathscr{E}=\bigcup_{x\in M}\mathscr{E}_x$$

(其中 $\mathscr{D}=\mathscr{D}_S, M=M_S$, $\mathscr{D}_x=\mathscr{D}_{Sx}$ 如(三)中所给),单参变换群 $\phi_t(=\phi_{St}):\mathscr{D}\to\mathscr{D}$ 及 $\Theta_t:\mathscr{E}\to\mathscr{E}$ $(-\infty<t<\infty)$ 以及对任一$\alpha\in\mathscr{E}_a(a\in\Lambda)$ 来说的,S 以 α 为基的线性化方程组

$$\frac{dz}{dt}=z\tilde{R}_\alpha(t)^{tr},-\infty<t<\infty,\ z\in E^{n-1} \qquad (\tilde{R}_\alpha)$$

等如同第二章 §1 中的。$(\tilde{R}_\alpha)$ 是一方程组,类同于上面的$(\tilde{*})$.因 Λ 是双曲的,用第二章 §1 中提到的关于 $(\tilde{R}_\alpha)$ 的解的几何解释,即看出 $(\tilde{R}_\alpha)$ 对于 E^{n-1} 的一直和分解具有上面所述的性质(P_1).由是据上述命题,对于某数 $\eta_\alpha<0$ 及 $d_\alpha>0$ 来说的不等式

$$\log\|\mathrm{proj}_{n-1}\Theta_T(\alpha)\|-\int_0^T\omega_n(t^*\Theta_t(\alpha))dt\geqslant-\eta_\alpha T$$

$$\text{对 } T\geqslant d_\alpha$$

或

$$\log\|\mathrm{proj}_{n-1}\Theta_T(\alpha)\|\leqslant\eta_\alpha T \quad \text{对 } T\geqslant d_\alpha$$

两者中必有一个成立,且前者蕴涵

$$\langle u,\mathrm{proj}_{n-1}(\alpha)\rangle=0 \quad \text{对 } u\in D_-(a),$$

其中 $D_-(a)=\{v\in\mathscr{D}_a|\lim_{t\to\infty}\|\phi_t(v)\|=0\}$。另一方面,若把这结论应用到$-S$(它仍以 Λ 为双曲集),则可导出结论:对某数 $\eta'_\alpha<0$ 及 $d'_\alpha>0$ 来说的不等式

$$\log\|\mathrm{proj}_{n-1}\Theta_T(\alpha)\|\geqslant\eta'_\alpha T \quad \text{对 } T\leqslant-d'_\alpha$$

或

$$\log\|\mathrm{proj}_{n-1}\Theta_T(\alpha)\|\leqslant-\eta'_\alpha T \quad \text{对 } T\leqslant-d'_\alpha$$

两者中必有一成立,且前者蕴涵

$$\langle u,\mathrm{proj}_{n-1}(\alpha)\rangle=0 \quad \text{对 } u\in D_+(a),$$

其中 $D_+(a)=\{v\in\mathscr{D}_a|\lim_{t\to-\infty}\|\phi_t(v)\|=0\}$.

但 Λ 是双曲集,$\mathscr{D}_a=D_-(a)\oplus D_+(a)$。故

$$\log\|\mathrm{proj}_{n-1}\Theta_t(\alpha)\|\geqslant-\eta_\alpha t \quad \text{对 } t\geqslant d_\alpha$$

及

$$\log\|\mathrm{proj}_{n-1}\Theta_t(\alpha)\| \geqslant \eta'_n t \quad 对\ t \leqslant -d'_n$$

这两个不等式不能同时都成立(对任意的 $\alpha\in\mathscr{D}_a$ 及 $a\in\Lambda$)。换言之，若考虑 $\mathscr{D}$ 及 $\mathscr{D}^*$ 上的单参变换群 $\Psi_t(-\infty<t<\infty)$ 如同文第三和第四章中，则也就不能有 $u\in\mathscr{D}|\Lambda,\|u\|=1$，使

$$\|\Psi_t(u)\|\geqslant 1 \quad 对所有\ t\in(-\infty,\infty).$$

这就是导至我们后来探讨 M^* 的子集

$$\{\sigma(u)\in M^*|u\in\mathscr{D}^*,\|u\|=1=\inf_{t\in(-\infty,\infty)}\|\Psi_t(u)\|\}$$

的由来，这里 $\sigma(u)$ 表示 u 是 M^* 在点 $\sigma(u)$ 处的切向量。这个集合后来称作与 S 相联系的阻碍集，记作 $Ob(S)$。

(五)

在第五章§5 及第六章§5 中还有别处均涉及到所谓准双曲轨弧。这个概念原见[8]中。一任给的 $S\in\mathscr{X}$ 导出单参变换群 $\phi_t(=\phi_{St}): M^*\to M^*(-\infty<t<\infty)$ 及 S 的共轭丛 $\mathscr{D}$ 上一单参变换群 $\phi_t:\mathscr{D}\to\mathscr{D}(-\infty<t<\infty)$ 如前所述. 对 $t\in\langle 0,\infty)$ 及 $\mathscr{D}_x$ 的一子线性空间 $E(x\in M)$。记

$$\eta_-(t,E)=\begin{cases}\sup_{u\in E,\|u\|=1}\{\log\|\phi_t(u)\|\}, & 若\ \dim E\geqslant 1,\\ -\infty, & 若\ \dim E=0,\end{cases}$$

$$\eta_+(t,E)=\begin{cases}\inf_{u\in E,\|u\|=1}\{\log\|\phi_t(u)\|\}, & 若\ \dim E\geqslant 1,\\ \infty & 若\ \dim E=0.\end{cases}$$

任给数 $\zeta>0,e>0$ 及一整数 $q\in\langle 0,n-1\rangle$，我们称 S 的一个时长为 T 的轨弧

$$Q=\{\phi_t(a)|t\in\langle 0,T\rangle\},a\in M,0<T<\infty$$

是 S 就 $\mathscr{D}_a$ 的一直和分解

$$\mathscr{D}_a=N_-(a)\oplus N_+(a)$$

来说的一$(\zeta,e;q)$ 准双曲轨弧，如果 $\dim N_-(a)=q$，且 $\langle 0,T\rangle$ 有一分割

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_m=T,m\geqslant 1$$

满足 $t_k-t_{k-1}\leqslant e$ 对 $k=1,2,\cdots,m$，且使得对于 $k=1$,

$2,\cdots,m$ 恒有

$$\frac{1}{t_k}\sum_{j=1}^{k}\eta_-(t_j-t_{j-1},\phi_{t_{j-1}}(N_-(a)))\leqslant -\zeta,$$

$$\frac{1}{t_m-t_{k-1}}\sum_{j=k}^{m}\eta_+(t_j-t_{j-1},\phi_{t_{j-1}}(N_+(a)))\geqslant \zeta$$

且

$$\eta_+(t_k-t_{k-1},\phi_{t_{k-1}}(N_+(a)))-\eta_-(t_k-t_{k-1},\phi_{t_{k-1}}(N_-(a)))$$
$$\geqslant 2(t_k-t_{k-1})\zeta.$$

(注：[8,第 1—2 页]中所叙述的准双曲轨弧，形式与这里微有不同．彼处所指的$(\zeta, e; q)$准双曲轨弧将是这里的$(\zeta, e; q)$准双曲轨弧对于 $\zeta=\zeta/(1+e)$．为了方便起见，我们采用了这里的叙述形式.)

取定 M^n 和 $\mathscr{C}$ 上的拓扑度量分别为 ρ_0 及 ρ_1．记$\tilde{\mathscr{C}}=\{u\in\mathscr{C}\mid\|u\|=1\}$，这是 M^n 的切球丛．对任一 $K\subset\tilde{\mathscr{C}}$ 及任一数 $\delta>0$，记 $U(K,\delta)$ 为K在 $\tilde{\mathscr{C}}$ 中就 ρ_1 来说的 δ-邻域．

准双曲轨弧的性质对我们有用的是一个关于周期轨道存在的定理．

定理　设F是 M^n 中一闭子集，不含有 S 的奇点． 任给数 $\zeta>0,e>0$ 及 $\varepsilon>0$．则存在对应的数 $\delta_*>0$ 及 $T_*>e$ 使得只要 S 有一轨弧

$$Q=\{\phi_t(a)\mid t\in\langle 0,T\rangle\}\subset F,\quad T_*\leqslant T<\infty,$$

它对 $\mathscr{D}_a$ 的一直和分解 $\mathscr{D}_a=N_-(a)\oplus N_+(a)$来说是一$(\zeta, e;q)$准双曲轨弧，$q>0$，且满足

$$\phi_T(N_-(a))\cap\tilde{\mathscr{C}}\subset U(N_-(a)\cap\tilde{\mathscr{C}},\delta_*),$$

即有 S 的一周期轨道P过某一点 $b\in M$以及 $\langle 0,T\rangle$ 上一连续的严格递增函数 $\theta(t),\theta(0)=0$，使

$$\phi_{\theta(T)}(b)=b,\ \rho_0(\phi_t(a),\phi_{\theta(t)}(b))<\varepsilon \text{ 对所有 } t\in\langle 0,T\rangle.$$

这个定理原见于[8]．它的一推广形式是[9]中的定理 5.5.

（六）

微分动力系统理论中一个基本问题是寻找 $\mathscr{X}=\mathscr{X}(M^n)$ 中的常微系统结构稳定和 Ω-稳定的特征性质. 对于相应的离散系统(明确地说，这里是指由 M^n 上 C^1 微分同胚所产生的离散系统)也有同样的问题. 对于一离散系统 f 来说,Smale 先证明 $f\Omega$-稳定的充分条件是它满足公理 A 和无环性,后来 Robbin-Robinson 又证明 f 结构稳定的充分条件是它满足公理 A 和强匀断性. 进一步，Pugh-Shub 和 Robinson 又分别证明，同样的条件对于常微系统的 Ω-稳定和结构稳定也是充分的. 关于这些进展的历史,可参看第七章或[10]. 猜想这样的充分性条件也是必要的，这就是所谓稳定性推测. 最近，Mañé[11] 和 Palis[12] 验证了离散系统的稳定推测. 2 维常维系统稳定推测成立,见 M. Peixoto 二十多年前的工作中. 但现时，要对高维常维系统在这方面得出完备的结论,距离尚颇遥远.

如所周知,在稳定性及一些相关问题的研究中,常微系统的结果常可通过扭扩的办法直接导出离散系统的结果. 但反过来，适用于离散系统的办法不是总容易引申到常微系统这一情况. 这原故除开后者有其更复杂些的一面外（因为常微系统一般不能由扭扩的办法来得到,且可能有奇点),还有如下所述的不同：技术上，有所谓常微系统族 $\mathscr{X}^*=\mathscr{X}^*(M^n)\subset\mathscr{X}$ （见[13]),相应地有所谓微分同胚族 $\mathscr{F}^*=\mathscr{F}(M^n)\subset\mathrm{Diff}(M^n)$ （见 [14]). 如所知，$\mathscr{F}^*$ 中一离散系统的周期点集在其非游荡集中稠密. 但相应的结论对于 $\mathscr{X}^*$ 中的常微系统不一定再成立，如果这系统有奇点的话[15];如果这系统没有奇点,则相应的结论是否成立在目前尚是一难题. 看第六章,§6 及[14, 第 508 页]关于这方面的评述;前者提到用阻碍集和由它派生出来的极小歧变集的一个理由.

用这类集合的性质来探讨常微系统的稳定性问题也显得方便. 例如,第六章末叙述了一个有关 3 维常微系统的结果,用极小歧变集和 $\mathscr{X}^*$ 的性质很容易推导得出. 从而,若 $S\in\mathscr{X}(M^3)$ 无

奇点，则它Ω稳定当且仅当$S\in\mathscr{R}^*(M^3)$。这有一定兴趣，因为它与当前大家普遍关注的浑沌（chaos）问题有关（见[16]）。阻碍集是我们工作中的重要工具，它不仅已经用在第五、六、八章有关常微系统的稳定性研究中，也将继续出现在这方面以后我们可能有的进一步工作中。同时，阻碍集（或者尚有它的延伸）也将出现在以后我们可能有的、一些另外方面有关微分动力系统的工作中。

参 考 文 献

除开第一至八章外，我们还参考了下面的一些文献。

[1] 廖山涛，常微分方程系统所导出的在切丛上的单参数变换群的诸态备经性质对相空间结构的探讨的应用 1，北京大学学报（自然科学），12(1966)，1—43.

[2] J.帕利斯、W.梅罗，动力系统几何理论引论，科学出版社，1988.

[3] 张筑生，微分动力系统原理，科学出版社，1987.

[4] Robbin, J., Topological conjugacy and structural stability for discrete dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 78(1972), 923—952.

[5] Robinson, C., Structural stability of C^1 diffeomorphisms, *J. diff. Equations*, 22(1976), 28—73.

[6] 廖山涛，常微系统的结构稳定性及一些相关的问题，计算机应用与应用数学，7，1978，52—64.

[7] Grobman, D., Global topological equivalence of systems of differential equations, *Mat. Sb.* (N.S.), 73(115), 1967, 600—609.

[8] 廖山涛，一个关于周期轨道存在的定理，北京大学学报（自然科学），(1)，(1979)，1—20.

[9] 廖山涛，常微系统的某些一致性质及一个周期轨道存在定理的推广，北京大学学报（自然科学），(2)，(1985)，1—19.

[10] Smale, S., The Mathematics of Time, Springer-Verlag, 1980.

[11] Mañé, R., A proof of the C^1 stability conjecture, *IHES Publ. Math.*, (66), (1988), 162—210.

[12] Palis, J., On the C^1 Ω-stability conjecture, *IHES Publ. Math.* (66), (1988), 211—215.

[13] 廖山涛，某类常微系统的一个基本性质，数学学报，22(1979)，316—343.

[14] Mañé, R., An ergodic closing lemma, *Annals of Math.*, 116(1982), 503—540.

[15] 丁红宇，同宿轨线的扰动及应用，北京大学学报（自然科学），(1)，(1986)，53—63.

[16] Liao Shantao, Perturbation of periodic orbits and stability problems in differential dynamics, 数学季刊，(2)，1(1986)，1—8.

补充（1990年10月）。自去年5月后，一些有关稳定性研究的情况与信

息可综述如下：

(1) 今年 9 月上旬在日本举行的一次动力系统讨论会上，N. Aoki 基于 Mañé[11]，给出定理"$f \in \mathscr{F}^*(M^n)$ 满足公理 A 及无环性"，简述其证明过程，推进了离散系统以往的有关结果（见 The set of Axiom A diffeomorphisms with no cycle, Abstracts, International Conference on Dynamical Systems and Related Topics, Nagoya, 1990, 1—8)。

(2) 去年 8 月中旬，本书作者曾将一篇题名为"Obstruction sets, minimal rambling sets and their applications"的综合论文投送到《二十一世纪中国数学展望论文选集》(将出版)[1]。这论文 §6含有关于 3 维常微系统的定理，它用扰动中的双曲奇点与周期轨道的稳定流形与非稳定流形的匀断相交性刻划 $\mathscr{X}(M^3)$ 中系统的稳定性，简述从阻碍集出发的证明方式。

(3) 去年 12 月初，胡森在一预印本中，从[11]中有关离散系统扰动技术的推广形式出发，详细验证 3 维常微系统的结构稳定推测(见 Sen Hu, A proof of C^1 stability conjecture for 3 dimensional flows, preprint, 8Dec. 1989)。更细致的讨论预计将要出现在胡森的普灵斯顿大学博士论文中。

上述这些可供常微系统稳定性研究的参考。

---

1) 见 Chinese Mathematics into the 21 st Century, Peking Urnivesity Press, 1991, 1—14.

编 后 记

廖山涛教授是我国著名数学家，曾因微分动力学等领域研究的贡献获首届第三世界科学院数学奖。本书收集廖山涛先生1963—1984年间在微分动力系统方面有代表性的学术论文八篇，并按投稿的时间顺序分章节编排。为进一步反映这八篇文章的内在关系，还请廖山涛先生为本书增写了前言和附录。

本书由唐云和吕虹编辑。编辑中，在忠于原文的基础上，根据科学出版社的要求对原有的记号和编排作了适当的修改和统一，并更正了所发现的印刷错误和疏漏。廖山涛先生对于本书的编辑出版给予了热情的支持和大量的帮助，我们深表谢意。